بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

گروههای متناهی با کوچکترین نمایش جایگشتی صادق

محمد مهدی قمی اویلی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

استاد راهنما:

دکتر مهدی علاییان

آبان ۱۳۸۱

تقدیم به

مادر مهربان و بزرگوار

و

روح پدرم

چکیده

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد . در اینصورت کوچکترین عدد صحیح و مثبت n را که به ازای آن G با زیرگروهی از S_n یکریخت است ، کوچکترین درجه جایگشتی صادق گروه G می نامیم و با $\mu(G)$ نمایش می دهیم . هر نمایش جایگشتی صادق از G روی یک مجموعه با مرتبه $\mu(G)$ را یک نمایش جایگشتی صادق مینیمال گروه G می گوییم .آشکار است که اگر $H \le G$ آنگاه $\mu(H) \le \mu(G)$. اگر $N \lhd G$ آنگاه $\mu(\frac{G}{N})$ ممکن است بزرگتر از $\mu(G)$ باشد . در این بحث چنین گروههایی استثنایی نامیده می‌شوند . در این پایان نامه خواص گروههای استثنایی مورد تحقیق قرار گرفته است و چند خانواده از گروههای استثنایی ارائه شده اند . همچنین ثابت می کنیم که $\mu(\frac{G}{N}) \le \mu(G)$ اگر $\frac{G}{N}$ زیرگروه نرمال آبلی نابدیهی نداشته باشد

در بخش دوم به اثبات یک قضیه درباره حرکت گروهها می پردازیم . زیرمجموعه Γ از Ω ،نسبت به گروه G از جایگشتهای Ω ، $m-$شبه پایا نامیده می شود ، هرگاه برای هر $g \in G$ ، $|\Gamma^g - \Gamma| \le m$. همچنین فرض کنیم Σ_1 و Σ_2 دو زیرمجموعه از Ω باشند . در اینصورت تعریف می‌کنیم : $d(\Sigma_1, \Sigma_2) = |\Sigma_1 \Delta \Sigma_2|$ ،که در آن Δ عمل تفاضل متقارن دو مجموعه است . ما ثابت می کنیم برای زیرمجموعه $m-$شبه پایای Γ ،زیرمجموعه $G-$پایای A از Ω وجود دارد بطوریکه $d(\Gamma, A) \le 2m-1$.

تقدیر و تشکر

در اینجا از زحمات و راهنماییهای استادم دکتر مهدی علاییان سپاسگزاری می نمایم .

همچنین لازم است از استادان گرامی آقایان دکتر حمید تولایی و دکتر علیرضا جمالی و خانم دکتر زهره مستقیم که در جلسه دفائیه شرکت نموده‌اند ، تشکر و قدردانی نمایم .

از همه دوستان و عزیزانی که با کمکها و راهنماییهای خود مرا در به انجام رساندن این پایان‌نامه یاری کرده‌اند ، سپاسگزارم .

فهرست مطالب

فصل پنجم

فصل اول

مفاهیمی از گروههای متناهی

در فصل نخست به ارائه مفاهیم ، تعاریف و قضایایی درباره گروههای متناهی می‌پردازیم که شامل مباحثی چون حاصلضرب گروهها ، p – گروهها ، گروههای پوچتوان و گروههای حلپذیر می باشد .

۱-۱ حاصلضرب گروهها

الف : حاصلضرب مستقیم

تعریف۱-۱-۱: فرض کنیم H و K دو گروه باشند . در اینصورت مجموعه $G=\{(h,k)\,|\,h\in H, k\in K\}$ با عمل

$$\forall (h_1,k_1)\,,\,(h_2,k_2)\in G \quad : \quad (h_1,k_1)(h_2,k_2)=(h_1h_2\,,k_1k_2)$$

تشکیل یک گروه می دهد ، که به آن حاصلضرب مستقیم H و K می گوییم و با نماد $H\times K$ نمایش می دهیم .

قضیه۱-۱-۲: فرض کنید $\{G_i\}_{i=1}^n$ خانواده ای از زیرگروه های گروه G باشد . اگر داشته باشیم :

الف) $\forall\, 1\le i\le n \,:\, G_i \lhd G$ ،

ب) $\forall 1\le i\le n \quad : \quad G_1\ldots G_{i-1}G_{i+1}\ldots G_n \bigcap G_i=\{1\}$ ،

ج) $G=G_1G_2\ldots G_n$.

آنگاه G با حاصلضرب مستقیم G_n هایکریخت است، یعنی $G\cong G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$.

در حالت خاص ، اگر G یک گروه و H و K زیرگروههای آن باشند و داشته باشیم :

الف) $H\lhd G\,,\,K\lhd G$ ،

ب) $G=HK$ ،

ج) $H\bigcap K=\{1\}$ ،

آنگاه $G\cong H\times K$.

نتیجه۱-۱-۳: اگر G یک گروه آبلی متناهی باشد ، آنگاه G مساوی حاصلضرب مستقیم سیلو زیرگروههایش است .

قضیه۱-۱-۴: فرض کنید H و K دو گروه باشند و $G=H\times K$. اگر $H_1\lhd H$ و $K_1\lhd K$ ، آنگاه :

الف) $H_1\times K_1\lhd G$ ،

ب) $\dfrac{G}{H_1\times K_1}\cong\dfrac{H}{H_1}\times\dfrac{K}{K_1}$.

قضیه۱-۱-۵: اگر H و G دو گروه باشند . آنگاه $(G\times H)'=G'\times H'$ ؛ و در حالت کلی $(\prod_{i=1}^{n}G_i)'=\prod_{i=1}^{n}G_i'$.

ب : حاصلضرب نیم مستقیم

تعریف۱-۱-۶: فرض کنید H,K دو گروه باشند و $\psi:K\to Aut(H)$ یک همریختی باشد . مجموعه تمام زوج های مرتب $(h,k)\in H\times K$ که در رابطه زیر صدق می‌کنند را در نظر می گیریم : $(h_1,k_1)(h_2,k_2)=(h_1\psi_{k_1}(h_2),k_1k_2)$: $\forall h_1,h_2\in H\ ,\ k_1,k_2\in K$.

در اینصورت این مجموعه با عمل فوق دارای ساختمان گروه است که به آن حاصلضرب نیم مستقیم H و K می گویند و با $H\rtimes K$ و یا $H\times_{\psi}K$ نمایش می دهند .

در حالت خاص ، وقتی ψ همریختی بدیهی باشد . آنگاه $H\rtimes K=H\times K$.

قضیه۱-۱-۷: فرض کنید گروه G دارای زیرگروه نرمالی مانند N و زیرگروهی مانند M باشد، بطوریکه $G=MN$ و $M\bigcap N=\{1\}$. در اینصورت یک همریختی مانند $\psi:M\to Aut(N)$ وجود دارد که $G\cong N\rtimes M$.

ج : حاصلضرب زیرمستقیم

تعریف۱-۱-۸: فرض کنید H و K زیرگروههای نرمالی از $G = H \times K$ و π_1 و π_2 توابع تصویری از G به ترتیب به توی H و K باشند.

زیرگروه L از G را حاصلضرب زیرمستقیم از H و K می‌گویند هرگاه :

الف) $\pi_1(L) = H$, $\pi_2(L) = K$ ،

ب) $L \leq H \times K$.

قضیه۱-۱-۹: فرض کنید $L \leq G$. آنگاه L حاصلضرب زیرمستقیم دو زیرگروه H و K است اگر و فقط اگر $HL = G = KL$.

برهان:

فرض می کنیم که L حاصلضرب زیرمستقیم از H و K باشد . بنابراین $L \leq G = H \times K$ و $\pi_1(L) = H$ و $\pi_2(L) = K$. فرض کنیم $k \in \pi_2(L)$ دلخواه باشد . در اینصورت $h \in H$ وجود دارد که $hk \in L$ و لذا

$$(k \in h^{-1}L \subseteq HL \Rightarrow k \in HL) \;\Rightarrow\; K \leq HL \qquad (۱)$$

از طرفی $H \leq HL$ (۲) . از (۲) و (۱) نتیجه میگیریم $H \times K \leq HL$ (۳) . چون $H \lhd G$ و $L \leq G$ بنابراین $HL \leq G = H \times K$ (۴) . از (۳) و(۴) نتیجه می شود که $G = HL$. به طریق مشابه نتیجه می گیریم که $G = KL$.بنابراین داریم $HL = G = KL$.

اینک فرض می کنیم که $HL = G = KL$. فرض کنیم $k \in K$.

$$K \leq G = HL \;\Rightarrow k \in HL \;\Rightarrow \exists h \in H \,\big|\, k \in hL \;\Rightarrow h^{-1}k \in L \;\Rightarrow k \in \pi_2(L)$$
$$\Rightarrow K \subseteq \pi_2(L) \quad \Rightarrow K = \pi_2(L)$$

به طریق مشابه ثابت می شود که $H = \pi_1(L)$. بنابراین $L \leq H \times K$ حاصلضرب زیرمستقیم H , K می‌باشد .

د : حاصلضرب حلقوی

تعریف۱-۱-۱۰: فرض کنید H و K دو مجموعه باشند . کلیه توابع از H به K را با $Fun(H,K)$ نمایش میدهیم ، یعنی $Fun(H,K)=\{f \mid f:H\to K\}$

اگر K یک گروه باشد ، آنگاه $Fun(H,K)$ با عمل دو تایی زیر تشکیل یک گروه می دهد .

$$\forall f,g\in Fun(H,K)\ ,\ \forall h\in H\ :\ fg(h)=f(h)g(h)$$

اگر H متناهی باشد ، آنگاه ($|H|$ مرتبه) $Fun(H,K)\cong K^{|H|}=K\times\ldots\times K$.

تعریف۱-۱-۱۱: فرض کنید H و K دو گروه باشند، بطوریکه H روی Γ عمل کند .در این صورت حاصلضرب حلقوی را با $K\, wr_{\Gamma}\, H$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$K\, wr_{\Gamma}\, H=Fun(\Gamma,K)\times H$$

بطوریکه H روی $Fun(\Gamma,K)$ با قاعده $\forall x\in H\ ,\ \forall f\in Fun(\Gamma,K)\ :\ f^{x}(\gamma)=f(\gamma^{x^{-1}})$ عمل میکند .

$B=\{(f,1)\mid f\in Fun(\Gamma,K),1\in H\}$ را پایه گروه می گویند .

حال اگر Γ متناهی باشد و $|\Gamma|=m$ داریم $B\cong Fun(\Gamma,K)\cong K^{m}$ و $|K\, wr_{\Gamma}\, H|=|Fun(\Gamma,K)|\times|H|=|K|^{m}.|H|$.

تذکر۱-۱-۱۲: اگر H روی خودش با عمل طبیعی گروه ، $\forall\alpha\in H,\forall h\in H\ :\ \alpha^{h}=\alpha h$ عمل کند . آنگاه $K\, wr_{\Gamma}\, H$ را با $K\, wr\, H$ نمایش می دهیم .

ه : حاصلضرب مرکزی

تعریف۱-۱-۱۳: فرض کنید G یک گروه و H و K زیرگروههای آن باشند . در اینصورت G را حاصلضرب مرکزی H,K می گوییم هرگاه داشته باشیم :

الف) $G=HK$ ،

ب) $hk = kh \; : \; \forall h \in H, \forall k \in K$.

حاصلضرب مرکزی H و K را با $G = H * K$ نمایش می دهیم .

قضیه۱-۱-۱۴: فرض کنید G حاصلضرب مرکزی H و K باشد . در اینصورت

الف) $H \lhd G$ و $K \lhd G$ ،

ب) $\frac{H \times K}{D} \cong H * K$ که در آن D زیرگروه نرمالی از $H \times K$ است .در حالتی که G گروهی متناهی باشد داریم $|H * K| = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|}$.

برهان:

فرض کنیم $h \in H$ و $g \in G$ دلخواه باشند .چون $G = HK$ لذا $h_1 \in H$ و $k_1 \in K$ وجود دارند بطوریکه $g = h_1 k_1$. بنابراین $g^{-1} h g = k_1^{-1} h_1^{-1} h h_1 k_1 \in H$. لذا $H \lhd G$.

به همین روش ثابت می شود که $K \lhd G$.

ب) نگاشت $\begin{array}{l} \psi : H \times K \to H * K \\ (h, k) \mapsto hk \end{array}$ یک همریختی است و

$$\ker \psi = \{(h,k) \,|\, hk = 1\} = \{(h, h^{-1}) \,|\, h \in H \cap K\} = D$$

لذا طبق قضیه اول یکریختی داریم $H * K \cong \frac{H \times K}{D}$.اگر G متناهی باشد. آنگاه

$$|H * K| = \frac{|H| \times |K|}{|D|} = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|}$$

۱-۲ p -گروهها

تعریف۱-۲-۱: فرض کنیم که p یک عدد اول باشد . در اینصورت G را یک p -گروه می‌گویند ، هرگاه مرتبه هر عضو آن توانی از p باشد .

تعریف۱-۲-۲: فرض کنیم که G یک گروه متناهی باشد و $|G| = p^{\alpha}.n$ کـه در آن p یـک عدد اول است و p ، n را نمـی شـمارد . در اینصـورت هـر زیـرگروه از مرتبـه p^{α} را یـک

p–زیرگروه سیلوی G می گویند و مجموعه تمام p–زیرگروههای سیلوی G را با $Syl_p(G)$ و تعداد آنها را با n_p نمایش می دهند .

قضیه۱-۲-۳: قضیه اصلی سیلو

فرض کنیم که G یک گروه متناهی باشد و $|G| = p^{\alpha}.n$ که در آن p ، n را نمی شمارد . در اینصورت داریم :

الف) G حداقل دارای یک p–زیرگروه سیلو است .

ب) هر p–زیرگروه G مشمول در یک p–زیرگروه سیلوی G است .

ج) هر دو p–زیرگروه سیلوی G در G مزدوج هستند .

د) (هنگ p) $n_p \equiv 1$.

قضیه۱-۲-۴: فرض کنید که G یک گروه متناهی و $p||G|$ ، N یک زیرگروه نرمال در G و P یک p–زیرگروه سیلو از G باشند . در اینصورت داریم :

الف) $P \cap N$ یک p–زیرگروه سیلو از N است .

ب) $\frac{PN}{N}$ یک p–زیرگروه سیلو از $\frac{G}{N}$ است .

قضیه۱-۲-۵: استدلال فراتینی

فرض کنید که G یک گروه متناهی و H یک زیرگروه نرمال از G باشد . اگر p یک عدد اول باشد بطوریکه $p||H|$ و $P \in Syl_p(H)$ ، آنگاه داریم $G = N_G(P).H$.

قضیه۱-۲-۶: قضیه نرمالساز ـ مرکزساز

فرض کنید که G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد . در اینصورت داریم :

الف) $C_G(H) \lhd N_G(H)$ ،

ب) $\frac{N_G(H)}{C_G(H)} \lesssim Aut(H)$.

قضیه۱-۲-۷: فرض کنید G یک گروه و N زیرگروه نرمال آن باشد . آنگاه $\frac{G}{N}$ آبلی است اگر و فقط اگر $G' \leq N$.

قضیه۱-۲-۸: اگر P یک $p-$گروه باشد و هیچ زیرگروه آبلی غیردوری نداشته باشد . آنـــگاه یا P دوری است و یا $p=2$ و P با گروه $(m \geq 3)$ Q_{2^m} یکریخت است .

۱-۳ گروههای پوچتوان

تعریـــــف۱-۳-۱: فـــرض کنیـــم کـــه G یـــک گروه باشـــد . در اینصـــورت $1=G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی می نامیم هرگاه داشته باشیم :

الف) $G_i \lhd G \ : \ 1 \leq i \leq r$

ب) $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}}) \quad \forall i$

و G را پوچتوان گوییم هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد . طول کوتاهترین سـری مرکـزی G را رده پوچتوانی G می نامیم .

نتایج:

۱-۳-۲: هر گروه آبلی پوچتوان است .

۱-۳-۳: هر $p-$گروه متناهی پوچتوان است .

۱-۳-۴: اگر G پوچتوان باشد .آنگاه هر زیرگروه از آن نیز پوچتوان است .

قضیه۱-۳-۵: اگر G یک گروه پوچتوان و M زیرگروه ماکسیمال G باشد آنگاه $M \lhd G$ و $|G:M|$ عددی اول است .

قضیه۱-۳-۶: فرض کنید G یک گروه متناهی باشد . در اینصورت احکام زیر معادلند :

الف) G پوچتوان است .