بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

متریک‌های (α, β) پایا روی خمینه‌های همگن

استاد راهنما

دکتر داریوش لطیفی

توسط

مسیح‌اله صابرپور

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

به پاس تمامی زحمات بی‌دریغشان

آنانکه در یکایک لحظه‌های زندگی همواره پشتیبان و همدم من بوده‌اند.

آنانکه دعاهای خالصانه آنها همواره راهگشا و امیدبخش زندگی من بوده است.

براستی که هیچ واژه‌ای قادر به تحسین و ستایش بزرگی و عظمت شما نیست.

در برابر وجود پربرکتتان سر تعظیم فرود آورده و دستان پرمهرتان را می‌بوسم.

وجود مهربانتان همیشه پاینده و استوار باد

و تقدیم به

برادران و خواهران مهربانم

عزیزانی که کلام امید بخششان مایه دلگرمی و آرامش

و وجود پرمحبت‌شان شادی بخش زندگی من بوده است.

تقدیر و تشکر:

سپاس خداوند مهربان را که به من این فرصت را داد تا به این مرحله از علم برسم و در تمام مراحل زندگی‌ام همواره همراه و یاورم بوده است. سپاس خدا را به اندازه همه سپاسی که نزدیکترین فرشتگان و گرامی‌ترین بندگان و پسندیده‌ترین ستایش کنندگان او را ستایش کرده‌اند، سپاسی که بر سپاس‌های دیگر برتری داشته باشد مانند برتری که پروردگار نسبت به آفرینندگان دارد.

در آغاز لازم می‌دانم از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام نهایت تشکر را داشته باشم، چراکه همواره مشوق و پشتیبان من بوده‌اند و دلگرمی و دعاهای خیرشان تحمل مشکلات را برایم مقدور می‌گرداند.

از استاد فرزانه و ارجمندم جناب آقای دکتر داریوش لطیفی که با راهنمایی‌های دلسوزانه خود بنده را در نوشتن این پایان نامه یاری نمودند، کمال سپاسگزاری را دارم. امید به اینکه شایستگی شاگردی ایشان را دارا بوده باشم و دوباره توفیق افتخار شاگردی ایشان نصیب من گردد.

در پایان از همکلاسی‌های عزیز خود که در طی دوران تحصیل مشوق و همراه من بودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مسیح‌اله صابرپور

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: صابرپور **نام:** مسیح اله
عنوان پایان نامه :   متریک‌های (α,β) پایا روی خمینه‌های همگن
استاد راهنما: دکتر داریوش لطیفی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** هندسه   **دانشگاه:** محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی   **تاریخ فارغ التحصیلی:** **تعداد صفحه:** ۷۱
کلید واژه‌ها :   متریک فینسلر، (α,β)—متریک‌ها ، متریک راندرز
چکیده: در این پایان نامه (α,β)—متریک‌های پایا روی فضاهای همگن را بررسی می‌کنیم. یک روش برای ساختن (α,β)—متریک‌های پایا روی فضاهای همگن ارائه می‌دهیم و سپس تعدادی شرط برای اینکه برخی از (α,β)—متریک‌های از نوع بروالد و داگلاس باشند بدست می‌آوریم. در نهایت یک شرط صلبیت در مورد متریک‌های راندرز و متریک‌های ماتسوموتو روی فضاهای همگن که از نوع بروالد باشند ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

هندسه‌ی فینسلری در واقع تعمیمی از هندسه‌ی ریمانی است. این نوع از فضاهای هندسی اولین بار توسط ریاضیدان آلمانی، پل فینسلر[۱] مورد بررسی قرار گرفت. هر چند فینسلر این نوع از فضاهای هندسی را بطور گسترده مورد بررسی قرار نداد ولی بعدها این فضاها، فضاهای فینسلری نام گرفتند. یک فضای فینسلری در واقع یک منیفلد هموار به همراه یک متریک فینسلری است. یکی از مهمترین مجموعه‌ی متریک های فینسلری، خانواده‌ی (α, β)—متریکها هستند. این نوع از متریک های فینسلری از یک متریک ریمانی و یک ۱—فرمی روی یک منیفلد هموار تشکیل می‌شوند. هدف این پایان نامه بررسی (α, β)—متریک‌های پایا روی منیفلدهای همگن می‌باشد. بدین منظور این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

در فصل اول تعاریف و قضیه های اساسی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان شده است. در همین راستا در فصل یک مطالبی از گروه های لی و جبرهای لی و همچنین هندسه‌ی ریمانی و هندسه‌ی فینسلری ذکر شده است.

در فصل دوم متریک های ریمانی پایا روی فضاهای همگن بررسی شده و فصل سوم این پایان نامه متریک های فینسلری پایا روی فضاهای همگن را مورد بررسی قرار داده است.

در واقع هدف از سه فصل اول مهیا کردن شرایط لازم برای بررسی (α, β)—متریک‌های پایا روی فضاهای همگن بوده است. لذا در فصل چهارم و با مهیا شدن همه‌ی مقدمات لازم (α, β)—متریک‌های پایا روی منیفلد های همگن بررسی شده است. از آنجایی که محاسبات مربوط (α, β)—متریک‌ها در حالت کلی بسیار پیچیده است، هر (α, β)—متریک بطور جداگانه بررسی می‌شود. (α, β)—متریک‌هایی که در فصل چهارم بررسی شده‌اند، متریک راندرز[۲]، متریک ماتسوموتو[۳] و متریک کروپینا[۴] هستند.

---

[۱] Paul Finsler

[۲] Randers metric

[۳] Matsumoto metric

[۴] Kropina metric

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و قضیه های اساسی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار میگیرند، بیان خواهند شد.

۱.۱ گروه لی و جبر لی

تعریف ۱.۱ فضای توپولوژیک M را موضعاً اقلیدسی گوییم هرگاه برای هر نقطه‌ی $p \in M$ یک همسایگی باز U از p و یک همیومرفیسم $\phi : U \longrightarrow o \subset \mathbb{R}^n$ موجود باشد. در ایجا o یک زیر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۲.۱ فضای توپولوژیک M را یک منیفلد توپولوژیک گوییم هرگاه
۱)دارای پایه‌ی شمارا باشد،
۲)هاسدورف باشد،
۳)موضعاً اقلیدسی باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنید M یک منیفلد توپولوژیک باشد.یک کارت حول نقطه‌ی $p \in M$ عبارت است از زوج (U, x) که در آن U یک همسایگی باز حول p و x یک همیومورفیسم از U به یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

تعریف **۴.۱** فرض کنید M یک منیفلد توپولوژیک باشد و (U,x) و (V,y) دو کارت حول نقطه‌ی p باشند.در این صورت این دو کارت را سازگار یا C^∞−مرتبط گوییم هرگاه

$$yox^{-1} : x(U\cap V)\subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y(U\cap V)\subset \mathbb{R}^n$$

$$xoy^{-1} : y(U\cap V)\subset \mathbb{R}^n \longrightarrow x(U\cap V)\subset \mathbb{R}^n$$

از کلاس C^∞ باشد.

تعریف **۵.۱** فرض کنید M یک منیفلد توپولوژیک باشد. در این صورت یک مجموعه از کارت‌های روی M را یک اطلس برای M می‌گوییم هرگاه

۱)این کارت‌ها کل M را بپوشاند،

۲)این کارت‌ها C^∞−مرتبط باشند.

اگر $A=\{(U_\alpha,x_\alpha)\}$ یک اطلس برای منیفلد توپولوژیک M باشد، در این صورت با اضافه کردن تمامی کارت‌هایی که با تمام اعضای A، C^∞−مرتبط هستند، A را به یک اطلس ماکسیمال تبدیل می‌کنیم.

تعریف **۶.۱** یک اطلس ماکسیمال روی منیفلد توپولوژیک M را یک ساختار دیفرانسیل پذیر روی M گوییم.

تعریف **۷.۱** فرض کنید M یک منیفلد توپولوژیک باشد، اگر A یک ساختار دیفرانسیل پذیر روی M باشد، آنگاه زوج (M,A) را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر یا منیفلد هموار گوییم.

تعریف **۸.۱** فرض کنید $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد. در این صورت گوییم f در $p\in M$ ایمرسیون است هرگاه $rank(f)_p = dim\ M$. یعنی f_{*p} یک به یک باشد.

تعریف **۹.۱** فرض کنید M و N دو منیفلد هموار و N زیرمجموعه‌ی M باشد. در این صورت N را زیر منیفلد ایمرسیون M گوییم هرگاه نگاشت شمول $J : N \longrightarrow M$ ایمرسیون باشد.

تعریف ۱۰.۱ مجموعه G یک گروه لی نامیده می‌شود هرگاه:

۱) G یک گروه باشد،

۲) G یک منیفلد هموار باشد،

۳) عمل گروه هموار باشد.

عبارت (۳) به این معناست که تابع

$$\phi : (G, *) \times (G, *) \longrightarrow (G, *)$$

که به صورت $(a, b) \longrightarrow \phi(a, b) = a * b$ تعریف میشود هموار باشد.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید G یک گروه لی باشد.گروه لی H یک زیرگروه لی G است هرگاه

۱) H یک زیر منیفلد ایمرسیون G باشد،

۲) H یک زیرگروه از گروه G باشد.

تعریف ۱۲.۱ برای هر نقطه ثابت $a \in G$ نگاشت $L_a : G \longrightarrow G$ که به صورت $L_a(x) = ax$ تعریف میشود یک انتقال چپ نامیده میشود.

L_a یک نگاشت C^∞ و همچنین یک دیفیومورفیسم است.

به طور مشابه انتقال راست روی G تعریف میشود و آن را با R_a نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱ برای هر نقطه ثابت $a \in G$ نگاشت $i_a : G \longrightarrow G$ باضابطه

$$i_a := L_a o R_{a^{-1}}$$

$$i_a(x) = axa^{-1}$$

یک نگاشت C^∞ روی G است که آن را اتومورفیسم درونی G می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱ میدان برداری X را روی گروه لی G چپ پایا گوییم هرگاه $(L_a)_*X = X$. به طور دقیق‌تر

$$\forall a, x \in G \quad (L_a)_*X_x = X_{ax}.$$

ملاحظه : مجموعه تمام میدانهای برداری چپ پایا روی G را با $\underline{g}$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۱ برای هر $X, Y \in \underline{g}$ و $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

۱) $aX + bY \in \underline{g}$،

۲) $[X, Y] \in \underline{g}$.

در عبارت (۲)براکت $[X, Y]$ به صورت زیر تعریف میشود:

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

برهان : مراجعه شود به [۱۴]. □

تعریف ۱۵.۱ فضای برداری n- بعدی V روی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ همراه با یک براکت $V \longrightarrow V \times V : [\ ,\ ]$ یک جبر لی نامیده میشود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $[\ ,\ ]$ دو خطی باشد،

۲) برای هر $X \in V$ داشته باشیم $[X, X] = 0$،

۳) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad \forall \ X, Y, Z \in V$.

جبر لی یک گروه لی:

فرض کنید X و Y میدانهای برداری چپ پایا روی گروه لی G باشند. پس برای $a \in G$

$$(L_a)_*X = X \ \ , \ \ (L_a)_*Y = Y$$

بنابراین داریم

$$(L_a)_*[X,Y] = [X,Y].$$

به طور کلی اگر $\phi : M \longrightarrow N$ یک نگاشت C^∞ ، X و Y میدانهای برداری روی M و X' و Y' میدانهای برداری روی N باشند به طوری که

$$\phi_* X = X \quad , \quad \phi_* Y = Y$$

در این صورت داریم

$$\phi_*[X,Y] = [X',Y'].$$

گزاره ۲.۱ مجموعه $\underline{g}$ متشکل از همه‌ی میدانهای برداری چپ پایای روی گروه لی G نسبت به براکت لی $[X,Y]$ یک جبر لی است. $\underline{g}$ جبر لی متناظر با گروه لی G نامیده میشود.

برهان : مراجعه شود به [۱۴]. □

گزاره ۳.۱ می‌توان جبر لی متناظر با گروه لی G را با فضای مماس T_eG (e عنصر همانی گروه G) یکی دانست. در واقع برای $x \in G$

$$X \in \underline{g} \longrightarrow X_e \in T_eG,$$

$$X_e \in T_eG \longrightarrow X_x := (L_x)_* X_e.$$

برهان : مراجعه شود به [۱۴]. □

تعریف ۱٦.۱ زیر مجموعه W را یک زیر جبر لی V گوییم هرگاه W یک زیر فضای V و نسبت به براکت بسته باشد یعنی:

$$X\ ,\ Y\ \in W \longrightarrow aX+bY \in W \quad a\ ,\ b\ \in \mathbb{R},$$

$$[X,Y] \in W \quad \forall\, X\ ,\ Y\ \in W.$$

قضیه ۱.۱ فرض کنید $\underline{g}$ جبر لی متناظر با گروه لی G باشد. اگر $\underline{h}$ یک زیر جبر لی $\underline{g}$ باشد در این صورت یک زیر گروه لی همبند یکتای H از G موجود است به طوری که $\underline{h}$ جبر لی متناظر با H است.

برهان : مراجعه شود به [۲۱]. □

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید G و H دو گروه لی باشند. یک هomomorphism گروه لی بین G و H عبارت است از نگاشت $\phi : G \longrightarrow H$ به طوری که

۱) ϕ هومورفیسم باشد یعنی $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$،

۲) ϕ هموار باشد.

تعریف ۱۸.۱ یک هومورفیسم جبر لی نگاشتی خطی بین دو جبر لی می‌باشد به طوری که براکت ها را حفظ کند.

لم ۱.۱ فرض کنید G یک گروه لی باشد. برای هر $X \in \underline{g}$ یک هومورفیسم C^∞ یکتای

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow G,$$

موجود است به طوری که

$$\frac{d\phi}{dt}\Big|_{t=0} = X.$$

برهان : مراجعه شود به [۲۱]. □

تعریف ۱۹.۱ یک همومورفیسم $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ را یک زیر گروه ۱—پارامتری گوییم.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنید $X \in \underline{g}$ باشد. $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ را زیر گروه ۱—پارامتری متناظر با میدان برداری X گوییم هرگاه

$$\phi(\circ) = e \quad , \quad \frac{d\phi}{dt}|_{t=\circ} = X.$$

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید G یک گروه لی باشد. در این صورت برای گروه لی G نگاشت نمایی به صورت زیر تعریف میشود:

$$\exp : \underline{g} \longrightarrow G$$

که در آن اگر $X \in \underline{g}$ و ϕ زیر گروه ۱—پارامتری متناظر با میدان برداری X باشد آنگاه

$$\exp(X) = \phi(۱).$$

لم ۲.۱ فرض کنید G یک گروه لی و $X \in \underline{g}$. در این صورت زیر گروه ۱—پارامتری متناظر با X برابر است با

$$\phi(s) = \exp(sX).$$

برهان : مراجعه شود به [۲۱]. □

گزاره ۴.۱ هر گروه لی دلخواه، exp در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\exp(t_1 + t_2)X = \exp t_1 X . \exp t_2 X,$$
$$\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}.$$

برهان : مراجعه شود به [۱۴]. □

نمایش الحاقی:

فرض کنید G یک گروه لی و i_a نشان دهنده‌ی اتومورفیسم درونی توسط $a \in G$ باشد.
مشتق i_a را به وسیله $Ad(a)$ نشان می‌دهیم:

$$Ad(a) := (i_a)_{*e}.$$

برای هر میدان برداری چپ پایای $X \in \underline{g}$ ، $Ad(a)X = (i_a)_* X$ نیز چپ پایا است.

تعریف ۲۲.۱ هومورفیسم $Ad : G \longrightarrow Gl(\underline{g})$ را نمایش الحاقی G می‌نامیم.

فرض کنید $\underline{g}$ همراه با براکت لی [,]، جبر لی متناظر با گروه لی G باشد. برای هر $X \in \underline{g}$ نگاشت خطی

$$ad(X) : \underline{g} \longrightarrow \underline{g}$$
$$Y \longrightarrow ad(X)Y := [X, Y]$$

در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$ad(X)[Y, Z] = [ad(X)Y, Z] + [Y, ad(X)Z].$$

هومورفیسم

$$ad : \underline{g} \longrightarrow gl(\underline{g})$$
$$X \longrightarrow ad(X)$$

نمایش الحاقی $\underline{g}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید G یک گروه لی و $\underline{g}$ جبر لی متناظر با آن باشد. در این صورت نمایش الحاقی $\underline{g}$ عبارت است از همومورفیسم خطی $ad : \underline{g} \longrightarrow gl(\underline{g})$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$ad(X) = (Ad)_{*e}X \quad , \quad X \in \underline{g}.$$

تعریف ۲۴.۱ فرض کنید $\underline{g}$ یک جبر لی باشد. در این صورت فرم کیلینگ برای $\underline{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B : \underline{g} \times \underline{g} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$B(X,Y) = tr(ad(X)\ o\ ad(Y)).$$

تعریف ۲۵.۱ فرم $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ را ناتباهیده گوییم هرگاه

$$\forall Y \quad F(X,Y) = \circ \longrightarrow X = \circ.$$

تعریف ۲۶.۱ فرض کنید $\underline{g}$ یک جبر لی باشد. زیر جبر لی $\underline{h}$ از $\underline{g}$ را یک ایده‌آل گوییم هرگاه:

$$a \in \underline{h}\ ,\ b \in \underline{g} \Rightarrow [a,b] \in \underline{h}.$$

تعریف ۲۷.۱ گروه لی G را نیم ساده گوییم هرگاه فرم کیلینگ متناظر با جبر لی آن ناتباهیده باشد، یعنی:

$$\forall Y \quad B(X,Y) = 0 \longrightarrow X = 0.$$

لم ۳.۱ اگر گروه لی G نیم ساده باشد، در این صورت $Z(\underline{g}) = 0$. در اینجا $Z(\underline{g})$ مرکز جبر لی $\underline{g}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Z(\underline{g}) = \{X \in \underline{g} \mid [X,Y] = 0 \quad \forall Y \in \underline{g}\}.$$

برهان : فرض کنید $X \in Z(\underline{g})$ دلخواه باشد. در این صورت داریم

$$\forall Y \quad [X,Y] = 0 \to \forall Y \quad ad(X)Y = 0 \to ad(X) = 0.$$

در نتیجه

$$\forall Y \quad B(X,Y) = tr(adX \ o \ adY) = 0.$$

چون G نیم ساده است بنابراین $X = 0$ و لذا برهان کامل است. $\square$

تعریف ۲۸.۱ جبر لی $\underline{g}$ را ساده گوییم هرگاه $[\underline{g},\underline{g}] \neq 0$ و ایده آلی بجز صفر و خودش نداشته باشد.

تعریف ۲۹.۱ گروه لی G را ساده گوییم هرگاه جبر لی متناظر با آن ساده باشد.

۲.۱ هندسه ریمانی

هندسه‌ی ریمانی[۱] شاخه ای از هندسه دیفرانسیل است که به بررسی منیفلدهای ریمانی می‌پردازد. یک منیفلد ریمانی در واقع یک منیفلد هموار است که به یک متریک ریمان مجهز باشد. هندسه‌ی ریمانی در قرن نوزدهم توسط برنارد ریمان[۲] پایه گذاری شد. این هندسه در نظریه نسبیت عام نقش اساسی دارد. در این بخش ابتدا به معرفی منیفلدهای ریمانی و التصاق لوی چیویتا[۳] می‌پردازیم و سپس انحنای منیفلدهای ریمانی را تعریف می‌کنیم.

فضای مماس و کلاف مماس:

فرض کنید M یک منیفلد هموار n—بعدی، $p \in M$، (U,x) یک کارت حول p و $c: (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ یک خم هموار باشد به طوری که در لحظه‌ی صفر از نقطه‌ی p عبور کند. در این صورت قرار می‌دهیم

$$\frac{dc}{dt}|_{t=0} = \frac{d(x \ o \ c)}{dt}|_{t=0}$$

و آن را سرعت خم c در لحظه $t=0$ گوییم.

خم‌های هموار‌ی که در لحظه‌ی صفر از نقطه p عبور می‌کنند تشکیل کلاسهای هم ارزی می‌دهند. دو خم هموار زمانی در یک کلاس هم ارزی قرار می‌گیرند که در نقطه p دارای سرعت برابر باشند.

یک کلاس هم ارزی دلخواه را با $[c]_p$ نمایش می‌دهیم که در آن

$$[c]_p = \{\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M \mid \alpha(0) = c(0) \ , \ \frac{d\alpha}{dt}|_{t=0} = \frac{dc}{dt}|_{t=0}\}.$$

مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم ارزی در یک نقطه مانند p را با T_pM نمایش می‌دهیم. T_pM یک فضای برداری n—بعدی است.

اگر $\frac{dc}{dt}|_{t=0}$ را معرف $[c]_p$ در نظر بگیریم می‌توان نشان داد یک تناظر یک به یک و پوشا بین T_pM، فضای مماس در نقطه p و D_pM، مجموعه‌ی تمام مشتق گیری‌ها در نقطه p موجود است، لذا

[۱] Riemannian geometry

[۲] Berhnard Riemann

[۳] Levi-Civita

می‌توان این دو فضای برداری را یکی در نظر گرفت.
از آنجایی که $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=۱}^{n}$ یک پایه نسبت به به کارت (U,x) حول نقطه p برای D_pM است، لذا می‌توان آن را یک پایه برای T_pM نیز در نظر گرفت.

تعریف ۳۰.۱ اجتماع همه‌ی فضاهای مماس روی منیفلد هموار M، کلاف مماس نامیده می‌شود و آن را با TM نشان می‌دهیم. در واقع

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM.$$

TM خود یک منیفلد $۲n$—بعدی است.

تعریف ۳۱.۱ مجموعه تمام تابعک های خطی از T_pM به $\mathbb{R}$ را دوگان فضای مماس T_pM می‌نامیم و آن را با T_p^*M نمایش می‌دهیم. لذا اگر $\omega \in T_p^*M$ باشد آنگاه $\omega : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابعک خطی است. عناصر T_p^*M را ۱—فرمی می‌نامیم.

تعریف ۳۲.۱ یک متریک ریمان روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر M یک تناظر است که به هر نقطه $p \in M$ یک ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای T_pM نسبت می‌دهد به طوری که این نسبت دادن هموار باشد.

ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_p$، متقارن، دوخطی و مثبت معین است. مثبت معین بودن به این معنی است که برای هر $V \in T_pM$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$g_p(V,V) \geq ۰ \quad , \quad g_p(V,V) = ۰ \leftrightarrow V = ۰.$$

متقارن بودن یعنی برای هر $V,W \in T_pM$ عبارت زیر را داشته باشیم:

$$g_p(V,W) = g_p(W,V).$$

و در نهایت دو خطی بودن یعنی:

$$g_p(V+W,Z) = g_p(V,Z) + g_p(W,Z),$$

$$g_p(V,W+Z) = g_p(V,W) + g_p(V,Z).$$