بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان
دانشکده علوم پایه

گروه آمار و علوم کامپیوتر

مطالعه ای بر میانگین طول عمر باقی مانده و سپری شده از یک سیستم $n-k+1$ از n

نگارش:

علی اصغر اسدی تکلم

استاد راهنما:

دکتر محمدحسین پورسعید

استاد مشاور:

مهندس عبدالرضا مصلایی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمار گرایش آمار ریاضی

بهمن ماه ۱۳۹۳

نام خانوادگی: اسدی تکلم **نام:** علی اصغر
عنوان پایان نامه: مطالعه ای بر میانگین طول عمر باقی مانده و سپری شده از یک سیستم $n-k+1$ از n
استاد راهنما: دکتر محمد حسین پورسعید **استاد مشاور:** مهندس عبدالرضا مصلایی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** آمار (گرایش آمار ریاضی) **محل تحصیل:** دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی:** بهمن ماه ۱۳۹۳ **تعداد صفحات:** ۱۱۲
کلیدواژه‌ها: آماره های ترتیبی ، تابع قابلیت اعتماد ، سیستم منسجم ، میانگین طول عمر باقی مانده ، میانگین طول عمر سپری شده ، نرخ خطر معکوس ،

چکیده: در این پایان نامه یک سیستم $n-k+1$ از n را که مرکب از n مولفه ی یکسان به طوری که طول عمر مولفه ها مستقل از هم و دارای تابع توزیع مشترک F هستند را ، بررسی می کنیم . فرض کنید تعداد نظارت برابر ℓ و تعداد خرابی مولفه ها در زمان t_i برابر m_i و $i = 1, \cdots, \ell - 1$ باشد. همچنین فرض کنید در زمان $t_\ell (t_1 < t_2 < \cdots < t_\ell)$ سیستم خراب یا هنوز کار می کند؛ تحت این شرایط میانگین طول عمر باقی مانده و سپری شده سیستم وبرخی از ویژگی های آن را بررسی می کنیم .

پیشگفتار

دانشمندان و مولفین زیادی در حوزه قابلیت اعتماد ، آنالیز بقاء و ویژگی های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم از قبیل طول عمر سیستم ، تابع توزیع (بقاء) طول عمر ، طول عمر باقی مانده و مدت زمان سپری شده از خرابی آن در زمان نظارت ، تعاریفی ارائه و در باره آنها به مطالعه و پژوهش پرداخته اند .
بارلو و پروشان [۱] از اولین کسانی هستند که در زمینه علم قابلیت اعتماد سیستم منسجم و ویژگی های آن کتاب نوشته اند و همچنین محققان زیادی در این زمینه پژوهش کرده اند از جمله : بایرام اف ، احسان الله و اخدوف [۲] در مورد تابع طول عمر باقی مانده و سپری شده از یک سیستم با ساختار موازی و سری ، اسدی و بایرام اف (۲۰۰۵) درخصوص تابع میانگین طول عمر باقی مانده از یک سیستم موازی و اسدی [۳]درسال (۲۰۰۶) در مورد میانگین طول عمر سپری شده از مولفه های یک سیستم موازی پژوهش کرده اند.
همچنین پورسعید و نعمت الهی[۴] (۲۰۰۸) طول عمر سپری شده و باقی مانده از یک سیستم موازی تحت نظارت دوگانه بررسی و در سال (۲۰۱۰) پورسعید[۵] آن را تحت نظارت چند گانه تعمیم و مورد بررسی قرار داده و برخی از خواص مهم آن را بدست آورده است . و دراین پژوهش ، مقالات اسدی (۲۰۰۶) و پورسعید (۲۰۱۰) مورد بررسی قرار می گیرند.

---

[۱] Barlow and Proschan

[۲] Bairamov ، Ahsanullah and Akhundov

[۳] Asadi

[۴] Poursaeed and Nematollahi

[۵] Poursaeed

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

دراین فصل برخی از نمادها و مفاهیم مورد نیاز در فصل های دیگر معرفی می شود و در صورت لزوم بعضی از قضایای مفید آورده می شود .

بنابراین دراین فصل ابتدا بعضی نماد ها و علائم اختصاری در قالب جدول آورده شده و سپس مفاهیم آماره های ترتیبی ارائه می شود ، همچنین خواص ساختاری سیستم و اجزای آن مورد بررسی قرار می گیرد و در پایان قابلیت اعتماد وابسته به زمان و مفاهیم سالخوردگی مورد مطالعه قرار می گیرد .

مطالب و اثبات قضایای این فصل را می توانید در کتاب های نخستین درس آماره های ترتیبی آرنولد و همکاران [۱] (۱۹۹۲) ، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد مجید اسدی (۱۳۹۲) و نظریه آماری قابلیت اعتماد و آزمون طول عمر بارلو و پروشان[۲] (۱۹۷۵) ببینید .

نمادگذاری

در این بخش، برخی از نمادهای ریاضی و آماری برای بیان راحت و ساده مسائل و مفاهیم اساسی که در این پژوهش استفاده می شوند، ارائه داده شده است.

T: طول عمر سیستم

n : تعداد مولفه های سیستم

$T_1, ..., T_n$: طول های عمر مولفه های سیستم

$T_{i:n}$: i امین آماره مرتب طول عمر

$R(t)$: تابع قابلیت اعتماد

$r(t)$: نرخ خطر معکوس مشترک مولفه های سیستم

$h(t)$: نرخ خطر مشترک مولفه های سیستم

RL : باقی مانده طول عمر

[۱] Arnold et al.

[۲] Barlow and Proschan

MRL : میانگین باقی مانده طول عمر
PL : طول عمر سپری شده از خرابی
MPL : میانگین طول عمر سپری شده از خرابی
IFR : نرخ خطر صعودی
DFR : نرخ خطر نزولی

۲.۱ آماره های ترتیبی

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ ، n متغیر تصادفی از جامعه ای با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی مطلقا پیوسته $F(x)$ باشد . آماره های ترتیبی متناظر با این متغیرهای تصادفی عبارتند از

کوچکترین بین $X_1, \ldots, X_n = X_{1:n}$
دومین کوچکترین بین$X_1, \ldots, X_n = X_{2:n}$
$\vdots$
نهایتا بزرگترین بین $X_1, \ldots, X_n = X_{n:n}$

بنابراین کوچکترین X_i ها را با $X_{1:n}$، مشاهده کوچکتر بعدی را با $X_{2:n}$، و نهایتا بزرگترین مشاهده را با $X_{n:n}$نشان می دهیم پس از این رو داریم

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}$$

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ ، یک نمونه تصادفی با تابع توزیع مشترک F و تابع چگالی fباشد و $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ آماره های مرتب شده این نمونه باشند تابع چگالی توام n آماره مرتب را به صورت زیر نمایش می دهیم

$$\begin{aligned} f_{X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(x_1, \ldots, x_n) &= n! f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n) \\ &= n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i)\,, \qquad (-\infty < x_1 < \ldots < x_n < \infty) \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

با در نظر گرفتن تابع چگالی توام n آماره ترتیبی در رابطه (۱.۱) و انتگرال گیری روی متغیرهای $(X_{1:n}, \ldots X_{i-1:n})$ و $(X_{i+1:n}, \ldots X_{n:n})$ تابع چگالی کناری i امین آماره ترتیبی یعنی $X_{i:n}, (1 \leq i \leq n)$ بدست می آید که برابر است با

$$f_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \{F(x)\}^{i-1} \{1 - F(x)\}^{n-i}\,,\ (-\infty < x < \infty) \tag{۲.۱}$$

بنا به رابطه (۲.۱) تابع چگالی احتمال کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی به ترتیب برابر است با

$$f_{X_{1:n}}(x) = n\{1 - F(x)\}^{n-1} f(x) \quad , \quad (-\infty < x < \infty)$$

و

$$f_{Xn:n}(x) = n\{F(x)\}^{n-1} f(x) \quad , \quad (-\infty < x < \infty)$$

با انتگرال گیری از تابع چگالی احتمال کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی ، توابع توزیع کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی بدست می آید که به صورت زیر می باشند:

$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - \{1 - F(x)\}^n \quad , \quad (-\infty < x < \infty)$$

و

$$F_{X n:n}(x) = \{F(x)\}^n \quad , \quad (-\infty < x < \infty)$$

به طور کلی تابع توزیع تجمعی X_i را با انتگرال گیری از تابع چگالی احتمال X_i در رابطه (۲.۱) می توان بدست آورد ، که به صورت زیر نمایش می دهیم

$$F_{X_{i:n}}(x) = \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} \{F(x)\}^j \{1 - F(x)\}^{n-j} \quad , \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (۳.۱)$$

از این رو در می یابیم که تابع توزیع تجمعی $X_{i:n}$ در واقع احتمال دنباله (شروع از i) توزیع دو جمله ای با احتمال پیروزی $F(x)$ وتعداد آزمایش n است .

تعریف ۲.۲.۱. برای هر $1 \leq i < j$ تابع چگالی توام $X_{i:n}$ و $X_{j:n}$ برابر است با

$$f_{X_{i:n},X_{j:n}}(x_i, x_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}$$
$$\times \{F(x_i)\}^{i-1} \{F(x_j) - F(x_i)\}^{j-i-1} \{1 - F(x_j)\}^{n-j} \qquad (۴.۱)$$

اگر $-\infty < x_i < x_j < \infty$، در غیر این صورت برابر با صفر است .
توجه داشته باشید که اگر $j = i + 1$ آنگاه داریم

$$f_{X_{i:n},X_{i+1:n}}(x_i, x_{i+1}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!} \{F(x_i)\}^{i-1} \{1 - F(x_{i+1})\}^{n-i-1} \qquad (۵.۱)$$

همچنین تابع توزیع تجمعی X_i و $X_j$$(1 \leq i < j \leq n)$ را با انتگرال گیری دوگانه از تابع چگالی X_i و X_j در (۴.۱) را می توان بدست آورد که به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$F_{X_{i:n},X_{j:n}}(x_i, x_j) = \sum_{k=j}^{n} \sum_{j=i}^{k} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}$$
$$\times \{F(x_i)\}^j \{F(x_j) - F(x_i)\}^{k-j} \{1 - F(x_j)\}^{n-k} \quad , (-\infty < x_i < x_j < \infty) \qquad (۶.۱)$$

اکنون در قضیه های زیر به برخی از خواص آماره های ترتیبی که در واقع توزیع شرطی آماره ترتیبی (به شرط آماره ترتیبی دیگر) را با توزیع آماره دیگر از جامعه اصلی $F(x)$ قطع شده را بیان می کنیم .

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه تصادفی از یک جامعه مطلقا پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشد و فرض کنید $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}$ آماره های ترتیبی حاصل از این نمونه را نشان می دهد . در این صورت توزیع شرطی X_j به شرط X_i برای $i < j$ مانند توزیع آماره ترتیبی $(j-i)$ ام از نمونه ای با حجم $(n-i)$ است از جامعه ای که توزیع آن به طور ساده $F(x)$ قطع شده از چپ در x_i است که به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{aligned} f_{X_{j:n}|X_{i:n}}(x_j|x_{i:n}=x_i) &= f_{Xi:n,X_{j:n}}(x_i,x_j)/f_{Xi:n}(x_i) \\ &= \frac{n!}{(j-i-1)!(n-j)!}\{\frac{F(x_j)-F(x_i)}{1-F(x_i)}\}^{j-i-1} \\ &\times \{\frac{1-F(x_j)}{1-F(x_i)}\}^{n-j}\frac{f(x_j)}{1-F(x_i)} \quad , \\ & i<j\leq n \quad , \qquad (x_i \leq x_j < \infty) \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

نتیجه حاصل با توجه به این واقعیت است که $\{\frac{F(x_j)-F(x_i)}{1-F(x_i)}\}$ و $\{\frac{f(x_j)}{1-F(x_i)}\}$ تابع توزیع و تابع چگالی جامعه ای هستند که توزیع آن با قطع کردن توزیع $F(x)$ از چپ در x_i بدست می آید .

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ ، نمونه تصادفی از یک جامعه مطلقا پیوسته با تابع توزیغ $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشد و فرض کنید $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}$ آماره های ترتیبی حاصل از این نمونه را نشان می دهد . در این صورت توزیع شرطی X_i به شرط X_j برای $i < j$ مانند توزیع آماره ترتیبی i ام از نمونه ای با حجم $(j-1)$ است از جامعه ای که توزیع آن به طور ساده $F(x)$ قطع شده از راست در x_j است که به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{aligned} f_{X_{i:n}|X_{j:n}}(x_i|x_{j:n}=x_j) &= f_{X_{i:n},X_{j:n}}(x_i,x_j)/f_{X_{j:n}}(x_j) \\ &= \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i-1)!}\{\frac{F(x_i)}{F(x_j)}\}^{i-1} \\ &\times \{\frac{F(x_j)-F(x_i)}{F(x_j)}\}^{j-i-1}\frac{f(x_i)}{F(x_j)} \quad , \\ & 1\leq i<j, \qquad (-\infty < x_i \leq x_j) \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

با توجه به این که $\{\frac{F(x_i)}{F(x_j)}\}$ و $\{\frac{f(x_i)}{F(x_j)}\}$ تابع توزیع و تابع چگالی جامعه ای هستند که توزیع آن با قطع کردن توزیع $F(x)$ از راست در x_j بدست می آید .

با کاربرد استدلالی مشابه آنجه در قضایای فوق به کار برده شد ، در قضیه زیر نشان می دهیم که دنباله آماره های ترتیبی از یک جامعه مطلقا پیوسته یک زنجیر مارکوف را تشکیل می دهند. قبل از بیان قضیه ابتدا تعریف زنجیر مارکوف را بیان می کنیم .

تعریف ۳.۲.۱. زنجیر مارکوف [۳]: زنجیر مارکوف، دنباله ای از متغیرهای تصادفی است که همگی این

[۳] Markov chain

متغیرهای تصادفی دارای فضای نمونه ای یکسان هستند،اما توزیع احتمالات آنها می تواند متفاوت باشد. در ضمن هر متغیر تصادفی در یک زنجیره مارکوف تنها به متغیر ما قبل از خود وابسته است. بنابراین با توجه به تعریف زنجیر مارکوف ، دانستن اولین مولفه زنجیر و رابطه ای که مولفه i ام را از مولفه $i-1$ ام تولید می کند، برای ساختن زنجیره کافی است .

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید $\{X_i\}_i$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل از یک جامعه مطلقا پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ و $\{X_{i:n}\}_i$ دنباله نظیر آن از آماره های ترتیبی باشد . در این صورت این دنباله آماره های ترتیبی یک زنجیره مارکوف را تشکیل می دهد .

اثبات : با توجه به رابطه(۱.۱) تابع چگالی توام $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{i:n}$ برابر است با

$$\begin{aligned} & f_{X_{1:n},\dots X_{i:n}}(x_1,\dots,x_i) \\ & = \frac{n!}{(n-i)!}\{1-F(x_i)\}^{n-i} f(x_1)\dots f(x_i) \quad , \\ & \qquad (-\infty < x_1 < \dots < x_i < \infty) \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

به طور مشابه تابع چگالی توام $X_{1:n}, \dots, X_{i:n}, X_{j:n} (1 \le i < j \le n)$ ، عبارت است از

$$\begin{aligned} & f_{X_{1:n},\dots,X_{i:n},X_{j:n}}(x_1,\dots,x_i,x_j) \\ & = \frac{n!}{(j-i-1)!(n-j)!}\{F(x_j)-F(x_i)\}^{j-i-1}\{1-F(x_j)\}^{n-j} f(x_1)\dots f(x_i) f(x_j) \quad , \\ & \qquad (-\infty < x_1 < \dots < x_i < x_j < \infty) \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

از معادلات (۹.۱) و (۱۰.۱) تابع چگالی شرطی $X_{j:n}$ به شرط $X_{1:n}=x_1, \dots, X_{i:n}=x_i$ را به شکل زیر بدست می آوریم

$$\begin{aligned} f_{X_{j:n}|X_{1:n},\cdots,X_{i:n}}(x_j|x_1,\dots,x_i) &= f_{X_{1:n},\cdots,X_{i:n},X_{j:n}}(x_1,\dots x_i,x_j)/f_{X_{1:n},\cdots,X_{i:n}}(x_1,x_2,\dots,x_i) \\ &= \frac{(n-i)!}{(j-i-1)!(n-j)!}\{\frac{F(x_j)-F(x_i)}{1-F(x_i)}\}^{j-i-1} \\ &\times \{\frac{1-F(x_j)}{1-F(x_i)}\}^{n-j}\frac{f(x_j)}{1-F(x_i)} \quad , \\ &(-\infty < x_1 < \dots < x_i < x_j < \infty) \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

با توجه به این که رابطه (۱۱.۱) دقیقا همان تابع چگالی شرطی $X_{j:n}$ به شرط $X_{i:n}$ حاصل از رابطه (۷.۱) است . بنابراین اثبات کامل می شود .

نتایج ارائه شده در قضیه های (۱.۲.۱) و (۱.۲.۲) را نیز می توان با نسبت دادن توزیع شرطی آماره ترتیبی (به شر ط دو آماره ترتیبی) به توزیع آماره ترتیبی از جامعه ای که توزیع آن تابع توزیع جامعه اصلی قطع شده از دو طرف است تعمیم داد واین نتیجه در قضیه زیر آمده است .

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه تصادفی از یک جامعه مطلقا پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشد و فرض کنید $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}$ آماره های ترتیبی حاصل از این نمونه را نشان می دهد . در این صورت توزیع شرطی $X_{j:n}$ به شرط $X_{i:n}$ و $X_{k:n}$ برای $i < j < k$ مانند توزیع آماره ترتیبی $(j-i)$ ام از نمونه ای با حجم $(k-j-1)$ است از جامعه ای که توزیع آن به طور ساده $F(x)$ قطع شده از چپ در x_i و از راست x_k است .

اثبات : مشابه تابع چگالی توام دو آماره ترتیبی در رابطه(۴.۱) ، تابع چگالی توام $X_{i;n}, X_{j:n}, X_{k:n}$ نیز عبارت است از

$$\begin{aligned} f_{X_{i:n},X_{j:n},X_{k:n}}(x_i,x_j,x_k) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(k-j-1)!(n-k)!} \\ &\times \{F(x_i)\}^{i-1}\{F(x_j)-F(x_i)\}^{j-i-1}\{F(x_k)-F(x_j)\}^{k-j-1}\{1-F(x_k)\}^{n-k} \\ &\times f(x_i)f(x_j)f(x_k) \quad , \quad (-\infty < x_i < x_j < x_k < \infty) \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

از معادلات (۴.۱) و(۱۲.۱) تابع چگالی شرطی $X_{j:n}$ به شرط $X_{i:n} = x_i$ و $X_{k:n} = x_k$ به شکل زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} f_{X_{j:n}|X_{i:n},X_{k:n}}(x_j|x_i,x_k) &= \frac{f_{X_{i:n},X_{j:n},X_{k:n}}(x_i,x_j,x_k)}{f_{X_{i:n},X_{k:n}}(x_i,x_j)} \\ &= \frac{(k-i-1)!}{(j-i-1)!(k-j-1)!}\{\frac{F(x_j)-F(x_i)}{F(x_k)-F(x_i)}\}^{j-i-1}\{\frac{F(x_k)-F(x_j)}{F(x_k)-F(x_i)}\}^{k-j-1} \\ &\times \frac{f(x_j)}{F(x_k)-F(x_i)} \quad , \quad (x_i < x_j < x_k) \end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

با توجه به این که $\{\frac{F(x_j)-F(x_i)}{F(x_k)-F(x_i)}\}$ و $\frac{f(x_j)}{F(x_k)-F(x_i)}$ تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی جامعه ای است که توزیع آن با قطع کردن $F(x)$ از چپ در x_i و از راست در x_k به دست آمده ،حاصل می شود .

۳.۱ سیستم های منسجم و قابلیت سیستم های منسجم

توابع ساختار

یک سیستم را در نظر بگیرید که شامل تعدادی مولفه[۴] (جزء)است و برای هدفی معین طراحی شده است . طبیعی است که فرض کنیم عملکرد سیستم ، تابعی از عملکرد اجزای آن است . در این جا فرض می کنیم سیستم دارای $n(n \geq 1)$ جزء است و هر جزء در آن فعال یا غیر فعال است . برای توصیف این وضعیت

[۴]component

یک متغیر دو مقداری x_i ، $i=1,\dots,n$ ، را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر مولفه } i \text{ ام فعال باشد} \\ 0 & \text{اگر مولفه } i \text{ ام غیر فعال باشد} \end{cases}$$

فرض بر این است که جزء iام در سیستم یا به طور رضایت بخش کار می کنند و یا این که از کار افتاده است . همچنین فرض می کنیم که سیستم نیز در یکی از دو وضعیت فعال یا غیر فعال است . برای تعیین وضعیت سیستم بر حسب وضعیت اجزاء فرض می شود که پیوند سیستم با اجزای آن ، با تابع دو مقداری $\phi(\mathbf{x})$ ، که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص می شود که در آن $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ و بردار $\mathbf{x}$ را بردار وضعیت سیستم می گوییم . بنابراین بسته به وضعیت بردار $\mathbf{x}$ داریم

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر سیستم فعال باشد} \\ 0 & \text{اگر سیستم غیر فعال باشد} \end{cases}$$

بنابراین بسته به نوع ساختار سیستم، هربردار وضعیت نتیجه می دهد که مقدار $\phi(\mathbf{x})$ صفر یا یک شود. همچنین در نظر داشته باشید که ما اغلب از عبارت ساختار ϕ به جای تابع ساختار ϕ استفاده می کنیم و همچنین تعداد مولفه های یک سیستم را مرتبه سیستم می گویند .

در ادامه به معرفی برخی از ساختارهای اساسی می پردازیم .

تعریف ۱.۳.۱. (ساختار سری[۵]): سیستمی را در نظر بگیرید که وقتی کار می کنند که همه ی مولفه ها در حال کار کردن باشند چنین سیستمی را سیستم سری می نامند ، یعنی

$$\phi(\mathbf{x})=1 \iff x_i=1 \quad , \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

یا بعبارتی ، با توجه به صفر یا یک بودن x_i ها داریم :

$$\phi(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n} x_i = min(x_1,\dots,x_n)$$

تعریف ۲.۳.۱. (ساختار موازی[۶]) : سیستمی را در نظر بگیرید که وقتی کار می کنند که حداقل یکی از مولفه ها ی آن در حال کار کردن باشند. چنین سیستمی را سیستم موازی می نامند ، یعنی

$$\phi(\mathbf{x})=1 \iff \exists i\in\{1,\dots,n\}: \quad x_i=1$$

یا بعبارتی ، با توجه به صفر یا یک بودن x_i ها داریم :

$$\phi(\mathbf{x})=\coprod_{i=1}^{n} x_i = max(x_1,\dots,x_n)$$

[۵] sereis structure

[۶] parallel structure

نکته ۱.۳.۱. چون x_i دو مقدار صفر و یک را می پذیرد لذا

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i = max(x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = min(x_i, \ldots, x_n)$$

یعنی $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ یا $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ و $min(x_i, \ldots, x_n) = 0$ یا $min(x_i, \ldots, x_n) = 1$) $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 0$ یا $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1$ و $max(x_1, \ldots, x_n) = 0$ یا $max(x_1, \ldots, x_n) = 1$)؛بنابراین

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

تعریف ۳.۳.۱. ساختار k از n ($k - out - of - n$) : سیستم k از n کار می کنند اگر و تنها اگر حداقل k مولفه آن کار کند که تابع ساختار آن به صورت زیر می باشد

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & o.w \end{cases}$$

برای روشن تر شدن مسئله k از n ، هواپیمایی را در نظر بگیرید که سه موتور دارد و فرض کنید برای آن که هواپیما بتواند با موفقیت پرواز کند باید دو موتور از سه موتور آن فعال باشد . چنین هواپیمایی به عنوان یک سیستم ۲ از ۳ شناخته می شود .

تعریف ۴.۳.۱. مولفه i ام (جزء i ام) در ساختار ϕ نا مرتبط است [۷] اگر ϕ بر x_i ثابت باشد یعنی $\phi(1_i, \mathbf{x}) = \phi(0_i, \mathbf{x})$ برای همه $\phi(._i, \mathbf{x})$. در غیر این صورت مولفه i ام در ساختار ϕ مرتبط است . که در آن

$$(1_i, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$(0_i, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$(._i, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots x_{i-1}, ., x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

تعریف ۵.۳.۱. یک سیستم با تابع ساختار ϕ را در نظر بگیرید . سیستم را یکنوا [۸] گوییم هر گاه برای هر دو بردار وضعیت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ که در آن $x < y$ داشته باشیم $\phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{y})$.

---

[۷] Irrelevant

[۸] isotone

قرارداد : $x < y$ بدین معنی است که $x_i \le y_i, (i = 1, \ldots, n)$ ، اما حداقل برای یک j داشته باشیم $x_j < y_j$ ، یعنی حداقل برای یک i نامساوی اکید باشد .

بنابراین در یک سیستم یکنوا هر گاه وضعیت یکی از اجزای سیستم از غیر فعال به فعال تبدیل شود وضعیت سیستم بدتر نخواهد شد .

تعریف ۶.۳.۱. اگر ϕ یک ساختار باشد دوگان [۹] آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\phi^d(\mathbf{x}) = 1 - \phi(\underset{\sim}{1} - \mathbf{x}) \quad , \quad \underset{\sim}{1} - \mathbf{x} = (1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)$$

با توجه به تعریف دوگان؛ دوگان ساختاری موازی(سری) ساختار سری (موازی) است . به طور کلی دوگان ساختاری k از n ساختار $n - k + 1$ از n می باشد .

سیستم منسجم

یک سیستم فیزیکی غیر عادی است اگر بهبود یافتن یک مولفه (جایگزین کردن یک مولفه ی خراب توسط مولفه ی سالم) سبب خرابی سیستم شود . بنابراین توجه خود را به توابع ساختاری محدود می کنیم که به طور یکنوا در هر یک از وضعیت های مولفه ی افزایشی است .

تعریف ۷.۳.۱. ساختار ϕ را ساختار منسجم گویند اگر

۱) تابع ساختار ϕ افزایشی باشد

۲) هر مولفه ی آن مرتبط باشد

اگر تابع ساختار منسجم باشد داریم $\phi(1, \cdots, 1) = 1$ و $\phi(0, \cdots, 0) = 0$.

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنید ϕ تابع ساختار منسجم باشد آنگاه

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \le \phi(\mathbf{x}) \le \coprod_{i=1}^{n} x_i \qquad (۱۴.۱)$$

اثبات . فرض کنید $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ ، آنگاه داریم $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. در نتیجه بر اساس تعریف سیستم های منسجم $\phi(\mathbf{x}) = 1$. بنابراین سمت چپ نامساوی برقرار است . حال فرض کنید $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ لذا. $\coprod_{i=1}^n x_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$ (۱.۳.۱) یا بنا به نکته $\coprod_{i=1}^n x_i = 0$ و همچنین بنا به تعریف سیستم های منسجم $\phi(\mathbf{x}) = 0$. لذا سمت راست نامساوی برقرار است .

[۹] dual

نمایش سیستم های منسجم بر اساس مجموعه های مسیر و قطع کننده

تعریف ۱.۳.۸. فرض کنید $\mathbf{x}$ نشان دهنده وضعیت های مجموعه مولفه های $c = \{1, \ldots, n\}$ باشد . بنابراین تعریف می کنیم $c_0(\mathbf{x}) = \{i | x_i = 0\}$ و $c_1(\mathbf{x}) = \{i | x_i = 1\}$.
فرض کنید (c, ϕ) نشان دهنده تابع ساختار منسجم باشد . بردار$\mathbf{x}$ بردار مسیر است[۱۰] اگر$\phi(\mathbf{x}) = 1$ باشد و متناظر با آن مجموعه مسیر [۱۱] $c_1(\mathbf{x})$ است . و همچنین بردار $\mathbf{y}$ را بردار قطع کننده [۱۲]گویند هر گاه $\phi(\mathbf{y}) = 0$ و متناظر با آن مجموعه قطع کننده [۱۳] $c_0(\mathbf{y})$ است .
بردار$\mathbf{x}$را بردار مینیمال مسیر گویند[۱۴] هر گاه $\mathbf{x}$ یک بردار مسیر باشد به طوری که$\mathbf{x} > \mathbf{y}$ آنگاه $\phi(\mathbf{y}) = 0$ و بردار $\mathbf{y}$را بردار مینیمال قطع کننده [۱۵] گویند هر گاه $\mathbf{y}$ یک بردار قطع کننده باشد به طوری که$\mathbf{x} > \mathbf{y}$ آنگاه $\phi(\mathbf{x}) = 1$.
به طور فیزیکی ، یک مجموعه مینیمال مسیر [۱۶]، یک مجموعه مینیمال از مولفه های سیستم است به طوری که کار کردن آن ، کار کردن سیستم را تضمین می کند و همچنین یک مجموعه مینیمال قطع کننده [۱۷]، مجموعه مینیمال از مجموعه هاست که خرابی آنها سبب خرابی سیستم می شود .

۱.۴ قابلیت اعتماد وابسته به زمان و مفاهیم سالخوردگی

تابع بقاء

تعریف ۱.۴.۱. زمان تا از کار افتادگی : فرض کنید یک سیستم غیر قابل تعمیر (سیستمی که پس از کار افتادگی حتما باید تعویض شود وقابل تعمیر نیست) داریم . منظور از زمان کار افتادگی مدت زمانی است که سیستم شروع به کار می کند تا اولین زمانی که از کار می افتد نقطه شروع را $t = 0$ در نظر می گیریم .
زمان تا از کار افتادگی به تغییرات تصادفی بستگی دارد ، پس طبیعی است که تا زمان کار افتادگی را بعنوان متغیر تصادفی T فرض کنیم .
وضعیت یک سیستم در زمان t ممکن است با وضعیت متغیر تصادفی $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$

[۱۰] path vector
[۱۱] path set
[۱۲] cut vector
[۱۳] cut set
[۱۴] minimal path vector
[۱۵] minimal cut vector
[۱۶] minimal path set
[۱۷] minimal cut set

، $i = 1, \cdots, n$ که به صورت زیر تعریف می شود ، توصیف کرد:

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & T_i > t \\ 0 & T_i \leq t \end{cases}$$

که در آن $T_i (i = 1, 2, \cdots n)$ زمان خرابی مولفه i ام است. اگر T را نیز زمان خرابی سیستم بدانیم آنگاه متغیر T همواره توسط زمان تقویمی اندازه گیری نمی شود ، یعنی ممکن است توسط مفهوم های زمانی غیر مستقیم نظیر تعداد کیلومترهای طی شده توسط یک اتومبیل اندازه گیری شود . با این مثال در می یابیم که T می تواند یک متغیر تصادفی گسسته نیز باشد . در بحث آتی فرض خواهیم کرد که T یک متغیر تصادفی نا منفی پیوسته است مگر این که خلاف آن ذکر شود .
فرض کنید که T دارای تابع چگالی $f(t)$ و تابع توزیع $(t > 0) F(t) = P(T \leq t)$ است ؛ بنابراین $F(t)$ برابر است با احتمال این که سیستم مربوطه در بازه زمانی $[0, t)$ از کار بیافتد .

تعریف ۲.۴.۱. تابع بقاء : تابع بقای یک سیستم به صورت $R(t) = \overline{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$ تعریف می شود . از این رو $\overline{F}(t)$ احتمال از کار نیفتادن سیستم در بازه زمانی $[0, t)$ است .

قابلیت اعتماد یک قطعه یا یک سیستم به شرط اینکه تا زمان t قطعه سالم باشد برابر است با

$$\overline{F}(x|t) = \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)} \tag{۱۵.۱}$$

مشروط به اینکه $\overline{F}(t) > 0$. و مشابها ، احتمال شرطی خرابی در طی فاصله زمانی به طول x یک قطعه که t واحد زمان کار کرده است برابر است با

$$F(x|t) = \frac{F(x+t) - F(t)}{\overline{F}(t)} = 1 - \overline{F}(x|t) \tag{۱۶.۱}$$

تابع نرخ خطر

احتمال اینکه یک سیستم در بازه زمانی $(t, t + \triangle t)$ از کار بیفتد به شرط اینکه بدانیم سیستم در زمان t در حال کار کردن است برابر است با

$$\begin{aligned} P(t < T < t + \triangle t | T > t) &= \frac{P(t < T \leq t + \triangle t)}{P(T > t)} \\ &= F(t + \triangle t) - F(t) \frac{1}{\overline{F}(t)} \end{aligned}$$

اگر احتمال شرطی بالا را بر $\triangle t$ تقسیم و حد آن را هنگامی که به سمت صفرمیل می کند محاسبه کنیم ، تابعی حاصل می شود که به تابع نرخ خطر معروف است .

تعریف ۱.۴.۳. تابع نرخ خطر متغیر تصادفی طول عمر T که آن را با $h(t)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

$$h(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(t < T \leq t+ \triangle t)}{P(T > t)}$$
$$= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{F(t+ \triangle t) - F(t)}{\triangle t} \frac{1}{\overline{F}(t)}$$

$$= \begin{cases} \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} & \overline{F}(t) > 0 \\ \infty & \overline{F}(t) = 0 \end{cases} \tag{۱.۱۷}$$

که نشان می دهد وقتی که $\triangle t$ کوچک است پس $P(t < T < t+ \triangle t | T > t) \simeq h(t) \triangle t$.
چون $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - \overline{F}(t)) = -\overline{F}(t)$ بنابراین

$$h(t) = -\frac{\overline{F}^{'}(t)}{\overline{F}(t)} = -\frac{d}{dt} log(\overline{F}(t))$$

از طرفی $\overline{F}(0) = 1$ بنابراین

$$\int_0^t h(u)du = -log(\overline{F}(t))$$

در نتیجه

$$\overline{F}(t) = exp\{-\int_0^t h(u)du\} \tag{۱.۱۸}$$

تابع بقای $\overline{F}(t)$ و تابع توزیع $F(t) = 1 - \overline{F}(t)$ طبق این نتیجه توسط $h(t)$ به طور یکتا مشخص می شود و اگر از رابطه (۱.۱۸) نسبت به t مشتق بگیریم ،داریم

$$f(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(u)du}, t > 0 \tag{۱.۱۹}$$

تابع نرخ خطر ، که در مبحث قابلیت اعتماد در طول عمر به تابع نرخ شکست نیز معروف است در بیشتر تحلیل های بقاء نقش محوری ایفا می کند .
توجه داشته باشید که نرخ خطر معکوس متغیر تصادفی X را به صورت زیر و با $r(t)$ نمایش می دهیم

$$r(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{F(t)} & F(t) > 0 \\ \infty & F(t) = 0 \end{cases} \tag{۱.۲۰}$$

یک مفهوم مهم در نظریه قابلیت اعتماد که در بحث های مختلف مطرح می شود مفهوم سالخوردگی است. به طور شهودی سالخوردگی به معنی تغییر نرخ خطر از کار افتادگی در طول زمان است . از این نظر ، معیار مناسب برای اندازه گیری سالخوردگی مفهوم نرخ خطر است . چنانچه نرخ خطر صعودی ، متغیر طول عمر دچار سالخوردگی می شود . و اگر تابع نرخ خطر نزولی باشد ، متغیر طول عمر دچار سالخوردگی منفی خواهد بود . بدین معنی که سیستم با گذشت زمان جوان تر می شود . اگر نرخ خطر بر حسب زمان ثابت باشد ، در اصطلاح می گوییم سیستم دچار سالخوردگی نمی شود . با توجه به مباحث بالا برخی مفاهیم سالخوردگی را به صورت زیر معرفی می کنیم .

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید Fتابع توزیع متغیر تصادفی طول عمر T است . F را متعلق به کلاس توزیع هایی با نرخ خطر صعودی[۱۸] (IFR) گویند هرگاه تابع نرخ خطر آن ، $h(t)$، تابعی غیر نزولی از t باشد.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید Fتابع توزیع متغیر تصادفی طول عمر T است . F را متعلق به کلاس توزیع هایی با نرخ خطر نززولی [۱۹] (DFR) گویند هرگاه تابع نرخ خطر آن ، $h(t)$، تابعی غیرصعودی از t باشد.

قضیه ۱.۴.۱. توزیع F متعلق به کلاس توزیع هایی با نرخ خطر صعودی (با نرخ خطر نزولی) است اگر وتنها اگر تابع قابلیت اعتماد شرطی آن ، $R(x|t)$ ، بر حسب t نزولی (صعودی) باشد .

اثبات : اگر از تابع $R(x|t) = \frac{R(x+t)}{R(t)}$ برحسب t مشتق بگیریم (در صورت وجود مشتق) برای مقدار ثابت x بدست می آوریم

$$\frac{dR(x|t)}{dt} = \frac{-f(x+t)R(t) + f(t)R(x+t)}{(R(t))^2}$$

مخرج کسر همواره نا منفی است. بنابراین $R(x|t)$ نزولی (صعودی) است اگر وتنها اگر $dR(x|t)/dt \leq 0(\geq 0)$ باشد . این معادل با این است که

$$\frac{f(t)}{F(t)} \leq (\geq) \frac{f(x+t)}{R(x+t)}, x, t > 0$$

و این یعنی $h(t) \leq (\geq) h(x+t)$ و بنابراین اثبات کامل می شود .

تابع توزیع و بقاء طول عمر سیستم

فرض کنید ϕتابع ساختار یک سیستم با n جزء است و فرضیات زیر را در نظر بگیرید

الف) فرض کنید جزء iام $(i = 1, \ldots, n)$ دارای طول عمر T_i است که دارای تابع توزیع $F_i(t)$ ، تابع چگالی $f_i(t)$ و تابع قابلیت اعتماد $R_i(t)$ است .

---

[۱۸] Increasing Failure Rate

[۱۹] Decreasing Failure Rate

ب) T_i ها متغیر های تصادفی مستقل اند.

ج) در زمان $t = 0$همه اجزاء فعال هستند ، اجزایی که از کار می افتند تعمیر یا تعویض نمی شوند و در همان حال باقی می مانند. برای تعریف طول عمر سیستم فرض کنید متغیر تصادفی دو مقداری $X_i(t)(i = 1, \dots, n)$را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & T_i > t \\ 0 & T_i \leq t \end{cases} \tag{۲۱.۱}$$

و بردار وضعیت سیستم را با $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ نمایش می دهیم .

تعریف ۶.۴.۱. طول عمر سیستم مقداری از t است که در آن سیستم برای نخستین بار وارد وضعیت از کار افتادگی می شود اگر این مقدار را با T نمایش دهیم آنگاه

$$T = inf\{t : \phi(\mathbf{X}(t)) = 0\} \tag{۲۲.۱}$$

اگر $R(t) = P(T > t)$ قابلیت اعتماد سیستم باشد ، آنگاه برای بدست آوردن $R(t)$ به صورت زیر عمل می کنیم . فرض کنید $h(\mathbf{p})$ ، تابع قابلیت اعتماد سیستم در حال ایستا باشد یعنی

$$h(\mathbf{p}) = E(\phi(\mathbf{X})) = E(\phi(X_1, \dots, X_n)$$

آنگاه بسته به ساختار سیستم ، تابعی مانند ψ وجود دارد که

$$h(\mathbf{p}) = \psi(p_1, \dots, p_n)$$

اکنون برای بدست آوردن $R(t)$ کافی است در در تابع $\psi(p_1, \dots, p_n)$ به جای p_i مقدار $R_i(t)$ را قرار دهیم در این صورت قابلیت اعتماد سیستم در زمان t برابر خواهد شد با

$$R(t) = \psi(R_1(t), \dots, R_n(t)) \tag{۲۳.۱}$$

مثال ۱.۴.۱. فرض کنید تابع ساختار ϕ سری با n جزء که در آن اجزاء به طور مستقل کار می کنند . اگر $T_1, \dots, T_n$ طول عمر اجزای سیستم باشند آنگاه طول عمر سیستم برابر است با $T = min\{T_1, \dots, T_n\}$ در این حالت قابلیت اعتماد سیستم به طور مستقیم به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) = P(min\{(T_1, \dots, T_n) > t\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} p_i \end{aligned}$$