دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی - گروه ریاضی محض

رساله برای دریافت درجه دکتری تخصصی در رشته ریاضی محض، گرایش هندسه

گروه های تقارنی لی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

اساتید راهنما:

دکتر مهرداد شهشهانی و دکتر محمدعلی جعفریزاده

اساتید مشاور:

دکتر کاظم قنبری و دکتر تئومن اُذر

فرشاد رضوان

۱۰ مرداد ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: رضوان نام: فرشاد

عنوان: گروه های لی تقارنی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

استادان راهنما : مهرداد شهشهانی و محمدعلی جعفریزاده

استادان مشاور : کاظم قنبری و تئومن اُذر

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۱۱۵

کلید واژه‌ها: گروه لی، گروه تقارن، اینواریانت دیفرانسیلی، کنج متحرک، حل عددی- هندسی

چکیده

در این رساله هدف ارائه کاربرد گروه های لی در حل تحلیلی برخی از معادلات دیفرانسیل غیر خطی و همچنین معرفی نظریه کنج متحرک کارتان و فرمول بندی جدید و کاربرد آن در حل عددی- هندسی معادلات دیفرانسیل بکمک چندفضای اُلور می باشد. ابتدا مفاهیم اولیه و گروه های لی و گروه تقارن برای معادلات دیفرانسیل معرفی می شوند. سپس فضای جت بعنوان ساختار طبیعی مطالعه هندسی معادلات دیفرانسیل و مفهوم پرولانگیشن معرفی می گردد. در ادامه به معرفی اینواریانت های دیفرانسیلی و کنج متحرک و کاربرد آن در محاسبه اینواریانت های دیفرانسیلی پرداخته شده و با معرفی چندفضا بعنوان فضای ارتباطی بین فضای جت و فضای حاصلضرب به محاسبه تقریب های عددی ناوردا برای اینواریانت های دیفرانسیلی اختصاص یافته است. روشهای استاندارد حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی شامل: جداسازی متغیرها، معادله مشخصه، تبدیلات انتگرالی و حل عددی است. در حالیکه کاربرد گروه لی این تحلیل ها را اضافه می کند: محاسبه فاکتور انتگرال (مخصوص معادلات دیفرانسیل معمولی)، کاهش معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و پیدا کردن جوابهای پایای گروه، محاسبه قوانین پایستاری معادله، خطی سازی معادلات غیر خطی و حل عددی ناوردا و غیره. در انتها بعنوان کاربردی از گروه های لی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، جوابهای تحلیلی پایای گروه تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی ولاسف- ماکسول محاسبه شده است.

تقدیم به:

جامعه ریاضی ایران

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهرداد شهشهانی و جناب آقای دکتر محمدعلی جعفریزاده، که مسئولیت استاد راهنمایی مرا قبول فرمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون حمایت های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر کاظم قنبری و دکتر تئومن اُذر که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقایان دکتر ابراهیم پوررضا، دکتر سیدرضا مقدسی، دکتر محمدرضا رزوان که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از تمام دوستان دوران تحصیلم و مخصوصاً از آقای *مرتضی فغفوری* دوست و مشوق دوران تحصیلم و *علی مهدی پور شیرایه* کمک و استاد من در نوشتن رساله و به پایان بردن آن کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از کلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی مخصوصاً از آقای دکتر علی‌اکبر مهرورز، دکتر حسین امامعلی‌پور ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر رضا نقی‌پور معاونت پژوهشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر جعفرصادق عیوضلو مدیرگروه ریاضی محض، همچنین از آقای دکتر کریم ایواز ریاست سابق، دکتر حسن مهتدیفر مدیرگروه سابق و همچنین کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

از دو نفر که مشوق اصلی من در گرایش به رشته ریاضی بودند آقای دکتر مگردیچ تومانیان و مرحوم دکتر محمدعلی شهابی و از آقای دکتر **پیتر اُلور** استاد مدرسه ریاضی دانشگاه مینه سوتا که مرا با دنیای شگفت انگیز کاربردهای گروه لی آشنا کردند، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام بویژه همسر عزیزم مهسا که در تمامی مراحل همواره یار و فداکار من بوده‌اند، سپاسگزاری می کنم.

فرشاد رضوان

مرداد ۱۳۸۹

فهرست مطالب

مقدمه . . . ۳

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۵
۱.۱ یادآوری . . . ۵
۱.۱.۱ استقلال تابعی . . . ۶
۲.۱.۱ زیر خمینه ها . . . ۸
۳.۱.۱ میدان های برداری . . . ۹
۲.۱ گروه های لی . . . ۱۶
۱.۲.۱ گروه تبدیلات . . . ۱۷
۲.۲.۱ گروه لی موضعی و گروه لی پوششی . . . ۱۹
۳.۲.۱ گروه تقارن . . . ۲۱
۴.۲.۱ مجموعه های پایا و توابع ناوردا . . . ۲۲
۵.۲.۱ معیار بینهایت کوچک برای تعیین گروه تقارن . . . ۲۴
۶.۲.۱ تعیین گروه تقارنی معادلات دیفرانسیل . . . ۲۵

۲ تقارن معادلات دیفرانسیل ۳۱
۱.۲ تبدیلات و توابع . . . ۳۱
۱.۱.۲ توابع ناوردا بعنوان برشی از فضای کل . . . ۳۳
۲.۱.۲ شرط رویه ناوردا . . . ۳۴
۲.۲ جت ها . . . ۳۴
۱.۲.۲ حل معادله اساسی تیر های هم طیف – کاربردی از فضای جت . . . ۳۶
۳.۲ امتداد دهی . . . ۳۸
۱.۳.۲ پرولانگیشن (امتداد دهی) توابع . . . ۳۸
۲.۳.۲ پرولانگیشن عمل گروه و مشتق کلی . . . ۳۸
۳.۳.۲ پرولانگیشن میدان های برداری . . . ۴۰
۴.۳.۲ ضرایب پرولانگیشن بصورت توابع بازگشتی . . . ۴۲
۵.۳.۲ مشخصه تقارنها - فرمول دیگری برای پرولانگیشن . . . ۴۴
۴.۲ ساختار برخورد . . . ۴۴

۵.۲ آنالیز تقارن لی برای معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزیی ۴۶
۱.۵.۲ معادلات تعیین کننده ۴۸
۲.۵.۲ کاهش مرتبه برای معادلات دیفرانسیل معمولی ۵۰
۳.۵.۲ فضای جت توسعه یافته ۵۲
۴.۵.۲ جوابهای پایای گروه برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی ۵۲
۶.۲ تعریف تقارن یک معادله انتگرودیفرانسیل ۵۴
۷.۲ تقارنهای بالاتر ۵۸

۳ اینواریانت های دیفرانسیلی ۶۳
۱.۳ روش محاسبه اینواریانت های دیفرانسیلی ۶۶
۲.۳ روش دوم محاسبه اینواریانت دیفرانسیلی ۶۸
۳.۳ کنج متحرک ۷۰
۱.۳.۳ قضیه فروبنیوس ۷۱
۲.۳.۳ کنج متحرک هم تغییر ۷۳
۳.۳.۳ معرفی برش برای یافتن کنج متحرک ۷۴
۴.۳.۳ ناورداسازی، روش سوم محاسبه اینواریانت های دیفرانسیلی ۷۵
۵.۳.۳ گروه هایی که بصورت آزاد عمل نمی کنند ۷۶

۴ مولتی اینواریانت ها ۷۹
۱.۴ مولتی-اسپیس خم ها ۷۹
۲.۴ حساب تفاضل های محدود – معرفی تفاضلات تقسیم شده ۸۱
۳.۴ مفهوم هندسی تقریب عددی چند نقطه ای ۸۴
۴.۴ مولتی اینواریانت ها – تقریب عددی برای اینواریانت های دیفرانسیلی ۸۵
۱.۴.۴ چارچوب هندسی یکپارچه و بی نظیر ۸۵
۲.۴.۴ مولتی-کنج و نرمال سازی آن ۸۶
۵.۴ چند مثال ۸۸

۵ جوابهای پایای گروه برای معادلات انتگرودیفرانسیلی ولاسف-ماکسول ۹۳
۱.۵ معرفی ۹۳
۱.۱.۵ معادلات حاکم در فرمول بندی لاگرانژی ۹۴
۲.۱.۵ مولد بینهایت کوچک ۹۴
۳.۱.۵ حل معادلات تعیین کننده انتگرالی و محاسبه جبر لی گروه تقارنی ۹۹
۴.۱.۵ دستگاه اپتیمال برای مولدهای تقارن و معادلات کاهش یافته ۱۰۱
۵.۱.۵ جواب های پایای گروه ۱۰۷
۲.۵ پیشنهاد هایی برای ادامه کار ۱۰۸
مراجع ۱۱۱
نمایه(اندیس) ۱۱۷
واژه نامه ۱۱۹

مقدمه

بوجود آمدن نظریه گروه های لی تقریبا همزمان با تعریف مدرن إلی کارتان [۱۶] از خمینه به کمک نقشه های موضعی مختصات است و هردو این نظریه ها با هم پیش رفته اند. کارتان به کمک گروه های لی هندسه دیفرانسیل را بصورت کاملا مجرد تعریف کرد.

کاربردهای نظریه گروههای پیوسته لی شامل زمینه های متنوعی همچون توپولوژی جبری، هندسه دیفرانسیل، نظریه ناورداها، نظریه دوشاخگی، توابع خاص، آنالیز عددی، نظریه کنترل، مکانیک کلاسیک، مکانیک کوانتوم، نسبیت، مکانیک پیوستار و غیره می شود. ولی جالب است که خود سوفیس لی این نظریه را برای حل برخی معادلات دیفرانسیل بوجود آورد، [۳۴]. در واقع آنچه که لی را تحت تاثیر قرار داده بود تماشای موفقیت کاربرد نظریه گروه های گالوا در جوابهای معادلات چند جمله ایها بود.

در سال ۱۹۱۸ خانم نوتر در دو قضیه مهم وجود گروههای تقارن را به وجود قوانین پایستاری یک سیستم ارتباط داد، [۳۶]. طبق این قضایا مثلا، پایستگی انرژی یک دستگاه دینامیکی از متقارن بودن آن نسبت به گروه لی انتقال در امتداد محور زمان ، ناشی می شود.

پس از این قضیه، کارهای لی و در واقع کاربرد گروههای لی در معادلات دیفرانسیل حدود پنجاه سال به بوته فراموشی سپرده شد. تا اینکه بیرخوف در دانشگاه هاروارد، در کتاب خود به موضوع کاربرد گروههای لی برای معادلات دیفرانسیل مکانیک سیالات پرداخت، [۴]. متعاقب آن در اواخر دهه ۱۹۵۰ با رهبری اوسیانیکوف [۴۲] این روش بر روی طیف وسیعی از مسائل مهم فیزیکی در اتحاد جماهیر شوروی بکار بسته شد. از طریق کارهای بلومن و کول [۵] و [۶] و انتشار کتاب آمس [۳] در سال ۱۹۷۲ علاقه جهان به این موضوع جلب گردید. از این زمان بود که این موضوع بصورت انفجاری هدف تحقیقات وسیع قرار گرفت. کاربرد گروههای لی برای دستگاههای فیزیکی و همچنین توسعه خود نظریه مورد بررسی قرار گرفته است. اولین موضوع محاسبه گروه تقارن برای یک معادله دیفرانسیل است. یافتن تقارنهای هرچه بیشتر برای طیف وسیعی از معادلات فیزیکی تا معادلات مالی-تجاری در جریان تحقیق روز است. استفاده از گروه تقارن بدست آمده در حل تحلیلی، یا حل عددی و یا بررسی خواص معادله موضوع اصلی دیگر است. از طرف دیگر می توان با در نظر گرفتن یک گروه ثابت، کلاس معادلاتی که این گروه را بعنوان گروه تقارنی می پذیرند، طبقه بندی کرد. محاسبه ناورداهای دیفرانسیلی گروه ها در این مبحث می گنجد. کاربردی از ناورداهای دیفرانسیلی در بینایی کامپیوتر و تشخیص اشیاء می باشد، [۱۴، ۱۳].

البته هنوز سوالات بسیاری بدون پاسخ مانده اند و محدوده قابلیت به کار گرفته شدن این نظریه برای معادلات دیفرانسیل

هنوز بطور کامل تعیین نشده است. کانون اصلی تحقیق در این رشته بطور مسلم در دانشگاه مینه سوتا و در حلقه دانشجویان اُلور قرار دارد. ابراگیمف، از شاگردان اوسیانیکوف هم در این زمینه، مخصوصا در ارتباط گروه تقارن با قوانین پایستاری سیستم های دینامیکی فعال است، [۲۶].

در این پایان نامه که اولین تحقیق پیرامون این موضوع در دانشگاه تبریز محسوب می شود، سعی کلی عبارت از آشنایی با نظریه گروههای تقارنی و سعی در تکمیل زنجیر زیرساختهای لازم برای فهم قضایای این نظریه برای انواع کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل است. در این پایان نامه هدف ارائه کاربرد گروه های لی در حل تحلیلی برخی از معادلات دیفرانسیل غیر خطی و همچنین معرفی نظریه کنج متحرک کارتان و فرمول بندی جدید و کاربرد آن در حل عددی- هندسی[۱] معادلات دیفرانسیل بکمک چندفضای[۲] اُلور می باشد. کار تحقیقی که از یافته های این پایان نامه توانستیم منتشر کنیم [۵۰، ۴۹] در واقع تحلیل تقارنی و بدست آوردن جوابهای تحلیلی پایای گروه برای دستگاه معادلات ولاسف- ماکسول بود که انجام شد و گزارش آن در فصل آخر آمده است. این یک دستگاه معادلات انتگرودیفرانسیلی با مشتقات جزیی است و در این کار تحقیقی از روش مستقیم گسترش یافته در [۲، ۱] برای محاسبه بردارهای مولد بسیار جزیی تقارن های معادله، استفاده شده است.

در فصل اول مفاهیم اولیه و گروه های لی و گروه تقارن برای معادلات دیفرانسیل معرفی می شوند. در فصل دوم فضای جت بعنوان ساختار طبیعی مطالعه هندسی معادلات دیفرانسیل و مفهوم پرولانگیشن معرفی می گردد. پس بدست آوردن فرمول پرولانگیشن، کاربرد تحلیل گروه لی برای معادلات دیفرانسیل معمولی در کاهش مرتبه آنها و برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی در بدست آوردن جوابهای پایای گروه آنها بیان می شود. فصل سوم به معرفی اینواریانت های دیفرانسیلی و چگونگی محاسبه آنها و همچنین به معرفی کنج متحرک و کاربرد آن نیز در محاسبه اینواریانت های دیفرانسیلی می پردازد. فصل چهار به معرفی چندفضا بعنوان فضای ارتباطی بین فضای جت و فضای حاصلضرب برای محاسبه تقریب های عددی ناوردا برای اینواریانت های دیفرانسیلی اختصاص یافته است. در فصل آخر بعنوان کاربردی از مطالعه گروه های لی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، جوابهای تحلیلی پایای گروه تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی ولاسف- ماکسول محاسبه شده است. در پایان هر فصل یادداشتهایی برای برجسته کردن روند کلی فصل ارائه شده است.

---

[۱] Geometric Integration

[۲] Multi-Space

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ یادآوری

خمینه یک شیئ هندسی است که حول هر نقطه اش شبیه یک زیر مجموعه باز از فضای اقلیدسی دیده می شود، ولی توپولوژی سرتاسری آن می تواند کاملا متفاوت باشد. هرچند که تقریبا همه مثالها و کاربرد های مهم با خمینه های تحلیلی سر و کار دارند، ولی بسیاری از ساختارها برای خمینه های هموار، به معنی بینهایت بار مشتق پذیر، نیز برقرار هستند.

تعریف ۱.۱. *خمینه m بعدی M یک فضای توپولوژی است که توسط گردایه ای از زیر مجموعه های باز $W_\alpha \subset M$ پوشیده شده است. این زیر مجموعه های باز چارت های مختصات نامیده می شوند و از آنها نگاشت های یک به یک $\chi_\alpha : W_\alpha \to V_\alpha$ بروی زیر مجموعه های باز و همبند $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ وجود دارد. از این نگاشت های یک به یک برای تعریف مختصات موضعی بر روی M استفاده می شود. خمینه* هموار *(به ترتیب تحلیلی) است اگر ترکیب نگاشت هایی که همپوشانی دارند $\chi_{\beta\alpha} = \chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha[W_\alpha \cap W_\beta] \to \chi_\beta[W_\alpha \cap W_\beta]$ ،* هموار *(به ترتیب تحلیلی) باشند.*

توپولوژی یک خمینه از $\mathbb{R}^m$ بر آن القا می شود. بنا بر این زیر مجموعه $V \subset M$ باز است اگر و تنها اگر اشتراک آن با هر چارت مختصات $V \cap W_\alpha$ بروی زیر مجموعه باز از $\chi_\alpha[V \cap W_\alpha] \subset \mathbb{R}^m$ نگاشته شود. این تعریف باعث می شود هر χ_α یک نگاشت پیوسته معکوس پذیر باشد. خمینه های مورد استفاده ما همیشه جدایی پذیر، به معنی داشتن یک زیر مجموعه چگال و شمارا، و هاسدورف به معنی اینکه هر دو نقطه متمایز $x \neq y$ در M می تواند توسط دو زیر مجموعه باز $x \in V$ و $y \in W$ چنان از هم جدا شوند که اشتراک آنها $V \cap W = \varnothing$ تهی باشد، خواهد بود. یک خمینه همبند است اگر نتوان آن را به عنوان اجتماع جدا از هم دو زیر مجموعه باز نا تهی نوشت. همبند ساده خمینه ای است که در بتوان هر خم بسته را با تغییر شکل پیوسته به یک نقطه تبدیل کرد. معمولا گردایه چارت های مختصاتی می تواند آنقدر توسعه یابد که شامل همه چارت های سازگار ممکن شود. گردایه ماکسیمال حاصل را یک اطلس برای خمینه M می نامند.

عملا مرسوم است که ارجاع روشن به نگاشت مختصاتی χ_α در معرفی یک نقطه از خمینه حذف گردد و هر نقطه از M با تصویرش بر $\mathbb{R}^m$ یکسان گرفته شود. بنا بر این نقاط داخل چارت مختصاتی W_α با نمایش مختصات موضعی آنها $x = (x^1, \dots, x^m) \in V_\alpha$ یکسان گرفته می شود. تغییر مختصات در نواحی همپوشانی نگاشت ها به کمک دیفئومرفیسم موضعی $y = \eta(x)$ فراهم می شود.

اشیایی که بر خمینه ها تعریف می شوند بایستی به صورت ذاتی، یعنی مستقل از انتخاب مختصات محلی، معرفی شوند. بنا بر این خمینه ها جایگاه مناسبی برای توسعه روش های عاری از مختصات برای مطالعه هندسی ذاتی فراهم می کند.

مثال ۲.۱. *مثال ساده توسط کره واحد $S^{m-1} = \{|x| = 1\} \subset \mathbb{R}^m$ فراهم می شود که یک خمینه تحلیلی $m-1$ بعدی است. این خمینه می تواند توسط دو چارت مختصاتی که با حذف کردن، به ترتیب، قطب شمال و قطب جنوب حاصل می شود پوشانده شوند. مختصات محلی در این حالت توسط تابع تصویر استریوگرافیک[۱] بر $\mathbb{R}^{m-1}$ فراهم می شود.*

۱.۱.۱ استقلال تابعی

نگاشت $F : M \to N$ بین دو خمینه هموار، خود هموار خوانده می شود اگر در نمایش مختصات موضعی، هموار باشد. به عبارت دیگر برای مختصات موضعی داده شده $x = (x^1, \dots, x^m)$ بر M، و $y = (y^1, \dots, y^n)$ بر N، نگاشت مذکور به شکل $y = F(x)$ و یا دقیق تر به شکل $y^i = F^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, n$ نوشته شود که در آن $F = (F^1, \dots, F^n)$ یک نگاشت C^∞ از یک زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^m$ بتوی $\mathbb{R}^n$ است. نگاشت تحلیلی نیز به طور مشابه بین خمینه های تحلیلی تعریف می شود.

تعریف ۳.۱. *رتبه یک نگاشت $F : M \to N$ در یک نقطه $x \in M$ با رتبه ماتریس $n \times m$ ژاکوبین $(\partial F^i / \partial x^j)$ در هر نمایش مختصات موضعی برای F در نقطه x تعریف می شود. نگاشت F منظم خوانده می شود اگر رتبه آن ثابت باشد.*

قضیه ۴.۱. *قضیه تابع ضمنی. فرض می کنیم $F : M \to N$ یک نگاشت منظم با رتبه r باشد. در این صورت مختصات موضعی $x = (x^1, \dots, x^m)$ بر M و $y = (y^1, \dots, y^n)$ بر N چنان وجود دارد که F شکل کانونی*

$$y = F(x) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \tag{۱.۱}$$

را به خود بگیرد، [۱۱، صفحه ۴۷].

بنا بر این همه نگاشت های دارای رتبه ثابت بطور محلی هم ارز هستند و با معرفی مختصات موضعی مناسب می توانند خطی شوند. نقاطی که در آنها رتبه نگاشت کاهش می یابد تکینگی ها هستند. بحث ما در این پایان نامه فقط حوزه نگاشت های منظم خواهد بود.

---

[۱] Stereographic projection

یادآوری می کنیم که دیفرانسیل یک تابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ توسط عبارت

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \qquad (۲.۱)$$

بیان می شود.

تعریف ۵.۱. *فرض می کنیم $\mathcal{F}$ خانواده ای از توابع مقدار - حقیقی هموار $f : M \to \mathbb{R}$ باشد. رتبه $\mathcal{F}$ در یک نقطه $x \in M$ عبارت از بعد فضای پیموده شده توسط دیفرانسیل های آنها است. این خانواده منظم خوانده می شود اگر رتبه آن بر M ثابت باشد.*

تعریف ۶.۱. *یک مجموعه $\{f_1, \ldots, f_k\}$ از توابع مقدار - حقیقی هموار بر یک خمینه M که دارای دامنه تعریف مشترکی هستند وابسته تابعی خوانده می شوند اگر برای هر $x_0 \in M$، همسایگی U و یک تابع هموار $H(z_1, \ldots, z_k)$ که بر هیچ زیر مجموعه $\mathbb{R}^k$ متحد صفر نیست، چنان موجود باشد که برای تمام $x \in U$ داشته باشیم: $H(f_1(x), \ldots, f_k(x)) = 0$. این مجموعه توابع، مستقل تابعی هستند اگر بر هیچ زیر مجموعه باز از M وابسته تابعی نباشند.*

مثلا دو تابع $f_1(x, y) = x/y$ و $f_2(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ در نیمه بالایی صفحه $\{y > 0\}$ وابسته تابعی هستند چرا که تابع دوم را می توان بر حسب تابع اول نوشت: $f_2 = f_1/(1 + f_1^2)$. برای خانواده منظم از توابع رتبه آنها مشخص می کند که چند عضو مستقل تابعی در این خانواده موجود است.

لم ۷.۱. *فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^m$ یک مجموعه باز محدب باشد. دیفرانسیل تابع $f : U \to \mathbb{R}$ بصورت $df = \sum_{i=1}^{r} h_i(x) dx^i$، شامل ترکیب خطی از دیفرانسیل r مختص اول است اگر و تنها اگر $f = f(x^1, \ldots, x^r)$ فقط تابعی از r مختص اول باشد. بویژه $df = 0$ اگر و تنها اگر f ثابت باشد.*

قضیه ۸.۱. *اگر خانواده ای از توابع $\mathcal{F}$ منظم از رتبه r باشند، در این صورت در حداقل یک همسایگی از هر نقطه، r تابع مستقل تابعی $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}$ با این خاصیت وجود دارد که هر تابع دیگر $f \in \mathcal{F}$ را می توان به صورت تابعی از آنها نوشت: $f = H(f_1, \ldots, f_r)$.*

برهان. برای $x_0 \in M$ داده شده $f_1, \ldots, f_r$ را چنان انتخاب می کنیم که دیفراسیل آنها $df_1, \ldots, df_r$ در نقطه x_0 مستقل خطی باشد. بر طبق قضیه ۴.۱ می توان به صورت محلی مختصاتی به صورت (y, z) حول x_0 چنان انتخاب کرد که $f_i(y, z) = y^i,\ i = 1, \ldots, r$. اگر $f(y, z)$ هر تابع دیگری در $\mathcal{F}$ باشد در این صورت از اینکه این تابع هم دارای رتبه r است، دیفرانسیل آن بایستی بصورت ترکیب خطی از دیفرانسیل های df_i باشد . بنا بر این در مختصات جدید $df = \sum_{i=1}^{r} h_i(y, z) dy^i$. حال به کمک لم ۷.۱ با کوچک کردن همسایگی نقطه x_0 اگر لازم باشد تا در صفحه مختصاتی به شکل محدب در آید، نتیجه می گیریم که $f(y^1, \ldots, y^r)$ فقط تابعی از y است. برگشت به مختصات اصلی x برهان را تمام می کند. □

در نتیجه اگر $f_1, \ldots, f_r$ مجموعه ای از توابع باشد که ماتریس $m \times r$ ژاکوبین $(\partial f_i/\partial x^k)$ آنها دارای رتبه ماکزیمال r در x_0 باشد، در این صورت از پیوستگی نتیجه می شود در همسایگی x_0 نیز دارای رتبه r هستند و بنابراین حول نقطه x_0 مستقل تابعی می باشند. همچنین قضیه ۸.۱ نتیجه می دهد که حول هر نقطه در یک خمینه m بعدی، حداکثر m تابع مستقل تابعی وجود دارد.

۲.۱.۱ زیر خمینه ها

آنچنان که از معنی زیرخمینه ی یک خمینه M بودن بر می آید، زیرخمینه در واقع زیر مجموعه ای است که در نوع خود یک خمینه می باشد. برای دقیق تر بودن بایستی زیر مجموعه را توسط نگاشت مناسبی پارامتری کنیم.

تعریف ۹.۱. *زیر خمینه غوطه ور. یک زیر خمینه غوطه ور $n-$بعدی هموار (تحلیلی) از خمینه M عبارت از زیر مجموعه $N \subset M$ است که توسط یک نگاشت یک به یک هموار (تحلیلی) $F : \widetilde{N} \to N \subset M$ که دامنه اش $\widetilde{N}$، فضای پارامتر، خود یک خمینه n بعدی هموار (تحلیلی) است، پارامتری می شود و $\widetilde{N}$ چنان است که F در همه جا منظم و از رتبه ماکزیمال n می باشد.*

یک زیرخمینه منظم است اگر علاوه بر منظم بودن نگاشت پارامتری کننده، برای هر نقطه $x \in N$ یک همسایگی به دلخواه کوچک $x \in U \subset M$ چنان موجود باشد که $F^{-1}[U \cap N]$ یک زیر مجموعه باز و همبند از $\widetilde{N}$ باشد. قضیه تابع ضمنی ۴.۱، شکل کانونی زیرخمینه های منظم را فورا نتیجه می دهد.

قضیه ۱۰.۱. *یک زیر خمینه n بعدی $N \subset M$ از خمینه $m-$بعدی M منظم است اگر و تنها اگر برای هر نقطه $x_0 \in N$ مختصات محلی $x = (x^1, \ldots, x^m)$ بر همسایگی U از x_0 چنان موجود باشد که:* $U \cap N = \{x | x^1 = \cdots = x^{m-n} = 0\}$.

یک خم بر خمینه M توسط یک نگاشت هموار $\varphi : I \to M$ که در آن $I \subset \mathbb{R}$ یک زیربازه باز است، تعریف می شود. خم $C = \varphi(I)$ یک خمینه یک بعدی را تعریف می کند. اگر این خم خود را قطع کند بایستی شرط منظم بودن حفظ گردد. اگر φ یک به یک باشد در این صورت C یک زیر خمینه یک بعدی معمولی است و منظم خواهد بود اگر و فقط اگر

$$\lim_{i\to\infty} t_i = t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{i\to\infty} \varphi(t_i) = \varphi(t).$$

روش دیگر برای بیان زیرخمینه ها تعریف آنها بصورت ضمنی به عنوان مجموعه تراز مشترک گردایه ای از توابع می باشد. یک واریته $\mathcal{S}$ بعنوان صفر همزمان خانواده ای از توابع مقدار - حقیقی $\mathcal{F}$ تعریف می شود: $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{x | f(x) = 0 \text{ for all } f \in \mathcal{F}\}$.

واریته را (دستگاه معادلات را) منظم خواهیم گفت اگر اولا تهی نباشد و ثانیا رتبه $\mathcal{F}$ در هر همسایگی از $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ ثابت باشد. شرط دوم وقتی که $\mathcal{F}$ خود یک خانواده منظم باشد حاصل می شود. به ویژه وقتی که واریته توسط صفر یک نگاشت $F : M \to \mathbb{R}^r$ که دارای رتبه ماکزیمال در هر نقطه $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$، تعریف شود، منظم بودن حاصل می شود. قضیه تابع ضمنی ۸.۱ به همراه قضیه ۱۰.۱ نشان می دهد که واریته منظم یک زیر خمینه منظم است.

قضیه ۱۱.۱. *فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده ای از توابع بر خمینه $m-$بعدی M باشد. اگر واریته مرتبط $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \subset M$ منظم باشد، در این صورت این واریته یک زیرخمینه منظم از بعد $m - r$ تعریف می کند.*

مثلا تابع $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ دارای رتبه یک در همه جا به غیر از مبدا است و بنابراین واریته آن، کره واحد، یک زیر خمینه منظم دو بعدی از $\mathbb{R}^3$ است.

۳.۱.۱ میدان های برداری

بردار مماس بر خمینه M در یک نقطه مانند $x \in M$ از نظر هندسی توسط بردار مماس به یک خم (هموار) مار بر x تعریف می شود. در مختصات محلی بردار مماس $\mathbf{v}|_x$ به یک خم پارامتری شده $x = \varphi(t)$، توسط مشتق تعیین می شود $\mathbf{v}|_x = \varphi'(t)$. گردایه ای از تمام بردار های مماس، فضای مماس بر M در نقطه x تشکیل می دهد. هر فضای مماس $TM|_x$ یک فضای برداری از بعد مشابه بعد M است. با به هم دوختن همه این فضا های مماس، کلاف مماسی $TM = \cup_{x \in M} TM|_x$ یک خمینه تشکیل می شود، که خود یک خمینه $2m-$بعدی است و بر خمینه M یک کلاف برداری تشکیل می دهد.

یک میدان برداری $\mathbf{v}$ یک بردار مماس $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ بر نقاط مختلف خمینه است که به صورت هموار تغییر می کند. به عبارت دیگر میدان برداری یک برش از کلاف مماسی TM است. در مختصات محلی فرمول یک میدان برداری را به شکل

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۳.۱}$$

می نویسیم که در آن ضرایب ξ^i توابع هموار (تحلیلی) هستند. بویژه بردار های مماس به محور های مختصات با علامت $\partial/\partial x^i = \partial_{x^i}$ نشان داده می شوند و پایه ای را برای فضای مماسی $TM|_x$ تشکیل می دهند. اگر $y = \eta(x)$ یک تغییر مختصات باشد در این صورت میدان برداری (۳.۱) در پایه y توسط فرمول

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{۴.۱}$$

نمایش می یابد که در آن ضرایب در نقطه $x = \eta^{-1}(y)$ محاسبه شده اند.

خم پارامتری شده $\varphi : \mathbb{R} \to M$ یک خم انتگرال برای میدان برداری $\mathbf{v}$ نامیده می شود اگر بردار مماس بر این خم در هر نقطه با میدان برداری $\mathbf{v}$ در آن نقطه یکسان باشد. در این صورت تابع پارامتر خم $x = \varphi(t)$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x), \qquad i = 1, \ldots, m \,. \tag{۵.۱}$$

بایستی صدق کند. از قضایای استاندارد وجود و یکتایی جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نتیجه می شود که از هر نقطه $x \in M$ یک خم انتگرال ماکزیمال منحصر به فرد عبور می کند. برای نمایش این خم انتگرال ماکزیمال از نماد $\varphi(t) = \exp(t\mathbf{v})x$ استفاده می شود تا مشخص شود که در $t = 0$ از نقطه $x = \exp(0\mathbf{v})x$ می گذرد. خم $\exp(t\mathbf{v})x$ ممکن است برای تمام t ها تعریف شده و یا نشده باشد.

با الهام از مکانیک سیالات نگاشت های $\exp(t\mathbf{v})$ با عنوان شار تولید شده میدان برداری $\mathbf{v}$ و برعکس $\mathbf{v}$ بعنوان میدان برداری مولد بینهایت کوچک شار، شناخته می شود .قواعد استاندارد تابع نمایی برای یک شار بصورت زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} &\exp(t\mathbf{v})\exp(s\mathbf{v})x = \exp[(t+s)\mathbf{v}]x\,, && \exp(0\mathbf{v})x = x\,, \\ &\exp(t\mathbf{v})^{-1}x = \exp(-t\mathbf{v})x\,, && \frac{d}{dt}\exp(t\mathbf{v})x = \mathbf{v}\Big|_{\exp(t\mathbf{v})x}\,, \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

معادلات اول و سوم هنگامی بر قرار هستند که عمل تعریف شده باشد. برعکس اگر یک شار داده شده دو معادله اول از (۶.۱) را صدق کند در این صورت می توانیم میدان برداری مولد آن را توسط مشتق گیری به دست آوریم:

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{dt}\exp(t\mathbf{v})x\Big|_{t=0}\,, \quad x \in M \,. \tag{۷.۱}$$

به بیان دیگر،

$$\exp(t\mathbf{v})x = x + t\mathbf{v}|_x + \mathcal{O}(t^2) \,. \tag{۸.۱}$$

مثال ۱۲.۱. *در فضای $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ مثالی از میدان برداری عمومی $\mathbf{v} = \xi(x,u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\dfrac{\partial}{\partial u}$ را بصورت میدان برداری $\mathbf{v} = x\partial_x$ در نظر می گیریم. برای محاسبه شار $\exp(t\mathbf{v})$ این میدان برداری، دستگاه معادلات (۵.۱) با در نظر گرفتن $x = \varphi_1(t)$ و $u = \varphi_2(t)$ بصورت زیر در می آید:*

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۹.۱}$$

بنابراین $x = \varphi_1(t) = x_0 e^t$ و $\exp(t\mathbf{v})x_0 = (x_0 e^t, 0)$ به دست می آید. توجه کنید که با در نظر گرفتن عمل گروه ضربی برای گروه یک پارامتری، معمولا شار این میدان که بزرگنمایی در جهت x نامیده می شود را $\exp(\lambda\mathbf{v})x_0 = \lambda x_0$ می نویسند.

قضیه ۱۳.۱. *قضیه فلوباکس. فرض کنیم $\mathbf{v}$ یک میدان برداری بر M باشد. اگر x_0 نقطه تکینگی $\mathbf{v}$ نباشد یعنی $\mathbf{v}|_{x_0} \neq 0$، در این صورت مختصات محلی جعبه مانند $y = (y^1, \dots, y^m)$ حول نقطه x_0 چنان وجود دارد که در آن $\mathbf{v} = \partial/\partial y^1$ شار انتقالی بصورت $\exp(t\mathbf{v})y = (y^1 + t, y^2, \dots, y^m)$ تولید نماید.*

برهان. برای مشاهده برهانی از این قضیه، به سلسله گزاره های منتهی به گزاره ۱.۵۳ در صفحه ۴۰ از [۵۳] مراجعه شود. □

تذکر ۱۴.۱. *در کتاب بلومن [۷، قضیه ۳-۲.۲.۵] مختصات مورد اشاره در قضیه ۱۳.۱ با نام مختصات کانونی آمده و محاسبه آن منوط به پیدا کردن یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با مشتقات جزیی نا همگن زیر شده است:*

$$\mathbf{v}(\eta(x)) = \xi_1(x)\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \xi_2(x)\frac{\partial\eta}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n(x)\frac{\partial\eta}{\partial x_n} = 1 \qquad (۱۰.۱)$$

یک جواب که برای η بدین روش بدست می آید، $(n-1)$ جواب دیگر برای η از معادله همگن نظیر (۱۰.۱) به کمک معادله مشخصه بدست می آید:

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n(x)} \qquad (۱۱.۱)$$

که در کنار هم تغییر پایه $y = \eta(x)$ مطلوب را تشکیل می دهند. برای بحث بیشتر به [۷] و فصل اینواریانت های دیفرانسیلی مراجعه شود.

مثال ۱۵.۱. *در فضای $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ دو میدان برداری $\mathbf{v} = (0, x) = x\partial_u$ و $\mathbf{w} = (x, 0) = x\partial_x$ را نظر می گیریم. مختصات جعبه مانند برای $\mathbf{v}$ از معادله مشخصه*

$$\frac{dx}{0} = \frac{du}{x}$$

با جواب $\eta^1(x,u) = x = cte$ و $\mathbf{v}(\eta^2) = \xi_1(x)\dfrac{\partial\eta^2}{\partial x} + \xi_2(x)\dfrac{\partial\eta^2}{\partial u} = x\dfrac{\partial\eta^2}{\partial u} = 1$ با یک جواب خصوصی $\eta^2(x,u) = u/x$ بدست می آید. مولفه های $\mathbf{w}$ در این پایه طبق (۴.۱)، بصورت زیر است:

$$\mathbf{w}(\eta) = x\partial_x(\eta^1, \eta^2) = x\partial_x(x, u/x) = (x, -u/x) \ .$$

با اعمال یک میدان برداری $\mathbf{v}$ به یک تابع $f : M \to \mathbb{R}$ تغییرات بینهایت کوچک f تحت شار القا شده تعیین می شود:

$$\mathbf{v}(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}f(\exp(t\mathbf{v})x)|_{t=0}$$

بدین ترتیب میدانهای برداری به عنوان مشتق بر توابع هموار اثر می کنند؛ بدین معنی که خطی هستند و از قاعده لایبنیتز پیروی می کنند:

$$\mathbf{v}(f+g)=\mathbf{v}(f)+\mathbf{v}(g)\,,\qquad \mathbf{v}(f\,g)=f\mathbf{v}(g)+g\mathbf{v}(f)\,. \tag{۱۲.۱}$$

به ویژه میدان های برداری توابع ثابت را صفر می کنند، $\mathbf{v}(c)=0$. به کمک سری لی اثر شار بر روی یک تابع را می توان محاسبه کرد

$$f(\exp(t\mathbf{v})x)=f(x)+t\mathbf{v}(f(x))+\frac{1}{2}t^2\mathbf{v}(\mathbf{v}(f(x)))+\cdots \tag{۱۳.۱}$$

دیفرانسیل

برای دو خمینه هموار M و N فرض می کنیم $F:M\to N$ یک نگاشت هموار مابین آنها باشد. در اینصورت هر خم پارامتری شده $C=\{\varphi(\epsilon)|\epsilon\in I\}$ بر M توسط نگاشت F به یک خم $\widetilde{C}=F(C)=\{\widetilde{\varphi}(\epsilon)=F(\varphi(\epsilon))|\epsilon\in I\}$ بر N نگاشته می شود. بنابراین F یک نگاشت از بردار مماس $d\varphi/d\epsilon$ بر C در نقطه $x=\varphi(\epsilon)$ به بردار متناظر $d\widetilde{\varphi}/d\epsilon$ بر $\widetilde{C}$ در نقطه تصویر $F(x)=F(\varphi(\epsilon))=\widetilde{\varphi}(\epsilon)$ القا می کند. این نگاشت القا شده، دیفرانسیل F نامیده شده است:

$$dF(\dot{\varphi(\epsilon)})=\frac{d}{d\epsilon}\{F(\varphi(\epsilon))\} \tag{۱۴.۱}$$

از اینکه هر بردار مماسی $\mathbf{v}|_x\in TM|_x$، در واقع بر خمی مار بر x مماس است، بنابراین دیفرانسیل، فضای مماس بر M در نقطه x را به فضای مماس بر N در نقطه $F(x)$ می نگارد:

$$dF:TM|_x\to TN|_{F(x)}\,.$$

فرمول دیفرانسیل در مختصات محلی توسط قاعده زنجیری بدست می آید. اگر $\mathbf{v}|_x=\sum_{i=1}^m\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ یک بردار مماس در $x\in M$ باشد در اینصورت:

$$dF(\mathbf{v}|_x)=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m\xi^i\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^j}=\sum_{j=1}^n\mathbf{v}(F^j(x))\frac{\partial}{\partial y^j}\,. \tag{۱۵.۱}$$

توجه کنید که $dF|_x$ یک نگاشت خطی از $TM|_x$ به $TN|_{F(x)}$ می باشد که نمایش آن به شکل ماتریس در مختصات موضعی برابر ماتریس ژاکوبین F در نقطه x است.