بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

نظریه ی نقطه انتهایی برای نگاشت های انقباضی مجانبی

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر:

مریم توتونچی

شهریور ماه ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم مریم توتونچی

تحت عنوان:

نظریه نقطه انتهایی برای نگاشتهای انقباضی مجانبی

در تاریخ ... ۸۸/۶/۲۱..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالـــی.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر مجید فخار با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر جعفر زعفرانی با مرتبه علمی استاد امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر محبوبه رضایی با مرتبه علمی استادیار امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر علیرضا امینی هرندی با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

اشکرکم لله، اشکرکم للناس

شاکرترین شما نسبت به خداوند، سپاسگزارترین شما نسبت به مردم است.

حمد و سپاس بی قیاس خدای بی همتا را که به ما نعمت بیان ارزانی داشت و با قلم قدرت خویش بشریت را به زیور علم و دانش آراست و انسانیت را زیر لوای فرهنگ و ادب تعالی بخشید.

اکنون که این رساله را با موفقیت به پایان رسانده ام بر خود لازم می دانم از زحمات کلیه آموزگارانی که کلمه عشق را با عشق به من آموختند تشکر کنم، در همین راستا از زحمات بی دریغ و راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر فخار که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند و دلسوزانه در رشد و ارتقاء موفقیت اینجانب موثر بوده اند و در تمام مراحل به ثمر رساندن این پایان نامه همواره روشنگر راه من بوده اند نهایت تشکر می کنم و از درگاه ایزد منان توفیقی روزافزون برای ایشان خواهانم، همچنین از استاد مشاور این پایان نامه جناب آقای دکتر زعفرانی که شاگردی ایشان همواره موجب سرافرازی و افتخار من گردیده سپاسگزارم و از جناب آقای دکتر امینی و سرکار خانم دکتر رضایی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند و از کلیه اساتید و کارمندان گروه ریاضی دانشگاه اصفهان کمال تشکر را دارم.

در پایان، بی نهایت ترین سپاس ها و تشکرها را به پدر و مادر خوبم که همواره راه گشا و مشوق من در امر تحصیل بوده اند و با صبر و شکیبایی و حمایت همه جانبه در تمام مراحل زندگی مرا یاری رسانده اند تقدیم می کنم و از همسر مهربانم و برادران عزیزم به دلیل پشتیبانی های بی دریغشان سپاسگزارم.

بار الها آنچه داریم از آن توست، توانی ده تا در راه تو خالص باشیم.

تقدیم به:

دو گوهر مقدس، پدر و مادر عزیزم

که عاشقانه سوختند تا روشنگر راهم باشند و گرمابخش وجودم

و همسر مهربانم

که با پاکترین قلبها و والاترین اندیشه‌ها مشوق من بوده و عشقش توشه راه من است

و برادرانم

که پناه و پشتیبان من هستند

و تقدیم به تمام کسانی که دوستشان دارم . . .

چکیده

در این پایان نامه به بررسی تعدادی از سیستم های دینامیکی مجموعه مقدار و نقاط انتهایی آنها می پردازیم و دنباله هایی را به دست می آوریم که همگرا به این نقاط انتهایی هستند.

هدف، تعمیم قضیه ی انقباضی باناخ و پیدا کردن شرایطی روی فضای X و روی نگاشت مجموعه مقدار $T: X \to 2^X$ است به طوری که این نگاشت ها دارای نقطه ی انتهایی باشند.

به این منظور چند نوع از نگاشت های انقباضی را معرفی کرده و روشهای مفیدی برای به دست آوردن شرایطی که وجود و یکتایی نقطه ی انتهایی برای این انقباض ها و همگرایی همه ی دنباله های تعمیم یافته از تکرار این انقباض ها به این نقاط انتهایی را تضمین می کنند، ارائه می دهیم.

واژه های کلیدی : سیستم دینامیکی مجموعه مقدار، نقطه ی انتهایی، انقباض مجانبی مجموعه مقدار، نگاشت بسته، نگاشت نیم پیوسته ی بالایی، انقباض مجانبی از نوع مایر- کلر، انقباض اکید، فضای یکنواخت، دنباله های تعمیم یافته حاصل از تکرار نگاشت.

فهرست مطالب

پیشگفتار

موضوع این پایان نامه مربوط به بررسی شماری از نگاشت‌های مجموعه مقدار و نقاط انتهایی آنها و به دست آوردن دنباله‌هایی که به نقطه‌ی انتهایی این نگاشت‌ها همگرا هستند، می‌باشد.

اصل انقباضی باناخ [1] [1] و تعمیم‌های مختلف آن برای نگاشت‌های تک مقداری و نگاشت‌های مجموعه مقدار در فضاهای متریک، موضعاً محدب، یکنواخت و فضاهای توپولوژی نقش مهمی در رابطه با مسائل گوناگون در آنالیز غیر خطی ایفا می‌کند. به خصوص برای مطالعه‌ی همگرایی فرایند دینامیکی از سیستم‌های دینامیکی و دنباله‌های تعمیم یافته از تکرارهای تصادفی و همچنین مطالعه‌ی مسائلی راجع به وجود و یکتایی نقاط ثابت و نقاط انتهایی ابزار مفیدی هستند.

اصل انقباضی باناخ توسط مؤلفان بسیاری در جهات مختلف توسعه داده شده است و در سالهای اخیر توجه بیشتر به آن مورد قبول عامه قرار گرفته است.

در این پایان نامه که شامل چهار فصل است، هدف توسعه و تعمیم قضیه‌ی انقباضی باناخ و پیدا کردن شرایطی روی فضای X و روی نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to 2^X$ است به طوری که این نگاشت‌ها دارای نقطه‌ی انتهایی باشند.

به دست آوردن شرایطی که وجود و یکتایی نقطه‌ی انتهایی این نگاشت‌ها را تضمین می‌کند و دنباله‌هایی که همگرا به این نقاط انتهایی باشند از دیگر اهداف پایان نامه است.

همچنین مفاهیم گوناگونی از نگاشت‌های انقباضی مجانبی مجموعه مقدار از سیستم‌های دینامیکی مجموعه مقدار $T : X \to 2^X$ معرفی می‌شود و به بررسی مسائلی از نظریه‌ی نقطه

---

[1] Banach

ثابت برای نگاشت‌های مجموعه مقدار مجانبی که از بعضی ایده‌های باناخ [۱]، یوان [۲] [۱۸] و کرک [۳] [۷] الهام گرفته شده است، می‌پردازیم.

روش مطالعه‌ی نظریه‌ی نگاشت‌های انقباضی مجانبی اولین بار توسط بوید-ونگ [۴] [۳] برای نگاشت‌های تک مقداری بیان شده است. در فصل دوم این پایان نامه با استفاده از مقالات کلیم[۵]، پلبانیاک[۶] و لدارژیک [۷] [۱۷، ۱۶، ۱۵]، نگاشت انقباضی مجانبی مجموعه مقدار را معرفی کرده و قضیه‌ای ارائه می‌دهیم که شرایط ضمانت کننده‌ی وجود و یکتایی نقطه‌ی انتهایی و همگرایی دنباله‌های تعمیم یافته به نقطه‌ی انتهایی برای چنین نگاشت‌هایی را بیان می‌کند.

در فصل سوم تعریف نگاشت‌های انقباضی مجانبی از نوع مایر-کلر [۸] [۹] را برای نگاشت‌های تک مقداری یادآوری کرده و سپس آن را به نگاشت‌های مجموعه مقدار تعمیم می‌دهیم و شرایطی که وجود و یکتایی نقطه‌ی انتهایی برای این نگاشت‌ها را ضمانت می کند بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین به توضیح مسائلی راجع به نگاشت‌های انقباضی اکید در فضاهای یکنواخت می‌پردازیم.

در فصل چهارم این پایان نامه با الهام از ایده‌های باناخ، ترفدار و یوان، به بیان مفاهیمی از مترنماهای تعمیم یافته می پردازیم و برای سیستم‌های دینامیکی مجموعه مقدار، انقباض‌های مجانبی غیر خطی گوناگون و انقباض‌هایی با رعایت این مترنماها را معرفی می‌کنیم و روشی

---

[۲] Yuan

[۳] Kirk

[۴] Boyd-Wong

[۵] Klim

[۶] Plebaniak

[۷] Wlodarczyk

[۸] Mier-Keeler

برای اثبات وجود و یکتایی نقطه انتهایی و همگرایی دنباله‌های تعمیم یافته از تکرار این نگاشت‌ها به نقطه‌ی انتهایی، ارائه می دهیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با استفاده از منابع [۴، ۵، ۹] مفاهیم اولیه که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته است را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید X یک مجموعه باشد و $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ و شرایط زیر برقرارباشند،

(۱). برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = 0$ اگر وتنها اگر $x = y$.

(۲). برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$.

(۳). برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

در این صورت d یک متر روی X است و (X,d) را یک فضای متریک گوییم.

قضیه ۲.۱ . هر دنباله‌ی کوشی در یک فضای متریک کران دار است.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

قضیه ۳.۱ . هر دنباله‌ی کوشی در فضای $\mathbb{R}$ دارای زیر دنباله‌ای همگراست.

اثبات . به [۹]، صفحه‌ی رجوع کنید.□

تعریف ۴.۱ . فضای متریک (X,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۵.۱ . فضای متریک (X,d) را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز از آن دارای زیر پوشش متناهی باشد.

قضیه ۶.۱ . هر مجموعه‌ی فشرده در یک فضای متریک بسته و کران دار است.

اثبات . به [۹]، صفحه‌ی ۳۳ رجوع کنید.□

قضیه ۷.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $(x_n) \subseteq X$ به $x_\circ \in X$ همگرا باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\left\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\circ\}\right\}$ یک مجموعه‌ی فشرده است.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

قضیه ۸.۱ . فرض کنید $\limsup_n a_n = a$ و $a \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم

(۱) برای هر $\varepsilon > \circ$، $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوریکه برای هر $n > N$، $a_n < a + \varepsilon$.

(۲) برای هر $\varepsilon > \circ$ و هر $k \in \mathbb{N}$، $n > k$ موجود است به قسمی که $a - \varepsilon < a_n$.

به علاوه شرایط (۱) و (۲) نتیجه می دهد $\limsup_n a_n = a$.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

تعریف ۹.۱ . فرض کنید (a_n) یک دنباله باشد. $x \in \mathbb{R}$ را حد زیر دنباله‌ای (a_n) گوییم هرگاه زیر دنباله‌ی (a_{n_k}) از (a_n) موجود باشد به قسمی که $a_{n_k} \to x$.

قضیه ۱۰.۱ . $\limsup_n a_n = \sup E$ و $\liminf_n a_n = \inf E$ که در آن E مجموعه‌ی حدود زیر دنباله‌ای a_n است.

اثبات . به [۹]، صفحه‌ی ۴۹ رجوع کنید.□

قضیه ۱۱.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $(a_n) \subseteq X$. در این صورت $\lim_n a_n = a$ اگر وتنها اگر $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = a$.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

تعریف ۱۲.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. $x \in X$ را یک نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی $E \subseteq X$ گوییم هرگاه دنباله‌ی $(a_n) \subseteq E$ از جملات مجزا موجود باشد به قسمی که $a_n \to x$.

نمادگذاری ۱۳.۱ . مجموعه‌ی نقاط حدی E را با E' نمایش می دهیم.

قضیه ۱۴.۱ . هر زیر مجمو عه‌ی بسته از یک فضای متریک کامل، کامل است.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

قضیه ۱۵.۱ . فرض کنید (X_1,d) و (X_2,ρ) دو فضای متریک باشند و $E \subseteq X_1$ و $f : E \to X_2$. در این صورت تابع f در نقطه‌ی $a \in E$ پیوسته است اگر وتنها اگر برای هر دنباله‌ی (a_n) که $\lim_n d(a_n,a) = 0$ آن گاه $\lim_n \rho(f(a_n), f(a)) = 0$.

اثبات . به [۹]، صفحه‌ی ۷۴ رجوع کنید.□

قضیه ۱۶.۱ . فرض کنید (X_1, d) و (X_2, ρ) دو فضای متریک باشند و $E \subseteq X_1$ و $f : X_1 \to X_2$ پیوسته و E فشرده باشد. در این صورت $f(E)$ نیز فشرده است.

اثبات . به [۹]، صفحه‌ی ۷۷ رجوع کنید.□

قضیه ۱۷.۱ . فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$ و $f : X \to \mathbb{R}$ پیوسته و E فشرده باشد، در این صورت f سوپریمم خود را روی E اختیار می کند.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

تعریف ۱۸.۱ . دنباله‌ی توابع $\{f_n\}$ را روی X به تابع f همگرای یکنواخت گوییم، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که، به ازای هر $n \geqslant n_\varepsilon$ و هر $x \in X$ داریم:

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

تعریف ۱۹.۱ . فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع حقیقی مقدار روی X باشد، در این صورت خانواده‌ی $\mathcal{F}$ را کران دار یکنواخت گوییم، هرگاه $M > 0$ موجود باشد به قسمی که:

$$|f(x)| < M \qquad \forall f \in \mathcal{F} \quad , \quad \forall x \in X$$

قضیه ۲۰.۱ . اگر $\mathcal{F}$ زیر مجموعه $C(K)$ و K فشرده باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ کران دار یکنواخت است.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

قضیه ۲۱.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد که به تابعی چون f به‌طور یکنواخت همگراست، در این صورت f نیز پیوسته است.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

قضیه ۲۲.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد که به تابعی چون f به طور یکنواخت همگراست. در این صورت برای هر دنباله‌ی $(x_n) \subseteq X$ که $x_n \to x$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

قضیه ۲۳.۱ . (آرزلا–اسکولی):

اگر K فشرده و $\mathcal{F} \subset C(K)$ باشد، که در آن $C(K)$ نمایش مجموعه توابع پیوسته از K به $\mathbb{R}$ است، آنگاه شرایط زیر معادلند:

(۱) $\mathcal{F}$ هم پیوسته و کران دار یکنواخت است.

(۲) هر دنباله در $\mathcal{F}$ دارای یک زیر دنباله‌ی همگرای یکنواخت است.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.□

نتیجه ۲۴.۱ . شرط لازم و کافی برای فشرده بودن یک زیر مجموعه در $C(K)$ این است که آن مجموعه هم پیوسته و کران دار یکنواخت باشد.

اثبات . به [۹]، رجوع کنید.

تعریف ۲۵.۱ . فرض کنید Y یک مجموعه باشد و $d : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ و شرایط زیر برقرارباشند،

(۱). برای هر $x, y \in Y$، $d(x,y) \geqslant 0$.

(۲). اگر $x=y$، آنگاه $d(x,y)=0$.

(۳). برای هر $x,y \in Y$، $d(x,y)=d(y,x)$.

(۴). برای هر $x,y,z \in Y$، $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

در این صورت d یک مترنما روی Y است. $d-$گوی به مرکز y و شعاع ε را به شکل زیر نشان می دهیم:

$$B(y,d,\varepsilon)=\{x|d(x,y)<\varepsilon\}$$

تعریف ۲۶.۱ . خانواده‌ی $\mathcal{D}=\{d_\alpha|\alpha \in \mathcal{A}\}$ از متریک نماها روی Y، جدا کننده نامیده می شوند، هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی y,x که $x \neq y$، $d_\alpha \in \mathcal{D}$ وجود داشته باشد به قسمی که $d_\alpha(x,y) \neq 0$

تعریف ۲۷.۱ . یک ساختار یکنواخت در یک مجموعه Y عبارت است از خانواده $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه های $Y \times Y$ به طوری که:

(۱) اگر $V \in \mathcal{F}$، آنگاه $\Delta \subset V$، که در آن Δ نمایش دهنده قطر است.

(۲) اگر $V_1, V_2 \in \mathcal{F}$، آنگاه $W \in \mathcal{F}$ وجود دارد به قسمی که $W \subset V_1 \cap V_2$.

(۳) اگر $V \in \mathcal{F}$، آنگاه $W \in \mathcal{F}$ وجود دارد به قسمی که $W \circ W^{-1} \subset V$.

(۴) اگر $V \in \mathcal{F}$ و $V \subset W$، آنگاه $W \in \mathcal{F}$.

ساختار یکنواخت جدا کننده نامیده می شود، هرگاه $\bigcap\{V|V \in \mathcal{F}\}=\Delta$

خانواده‌ای که فقط در سه شرط اول صدق کند یک پایه برای ساختار یکنواخت یا یک یکنواختی نامیده می شود.

نکته ۲۸.۱ . اگر (Y,d) یک فضای متریک باشد و به ازای هر $\varepsilon > 0$، تعریف کنیم: $V(\varepsilon) = \{(x,y) \in Y \times Y | d(x,y) < \varepsilon\}$ آنگاه خانواده $\{V(\varepsilon) | \varepsilon > 0\}$ یک یکنواختی در Y است که یکنواختی معین شده توسط d نامیده می شود.

اثبات . به [۴]، رجوع کنید.

تعریف ۲۹.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f : X \to X$ ، در این صورت f را ا نقباضی گوییم، هرگاه به ازای هر $x,y \in X$، $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$.

قضیه ۳۰.۱ . (اصل انقباضی باناخ)، فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $f : X \to X$ و $k \in (0,1)$ موجود باشد به قسمی که برای هر $x,y \in X$،

$$d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

در این صورت f دارای یک نقطه‌ی ثابت یکتاست.

اثبات . به [۱۲]، صفحه‌ی ۴۱ رجوع کنید.□

قضیه ۳۱.۱ . (مقطع کانتور)، فضای متریک (M,d) کامل است اگروتنها اگر برای هر دنباله‌ی نزولی $(D_n)_1^\infty$، از زیر مجموعه های غیرتهی، بسته و کرا ن دار از اعضای M که

$$\lim_{n\to\infty} diam(D_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$$

اثبات . به [۵]، صفحه‌ی ۲۷ رجوع کنید.□

تعریف ۳۲.۱ . فرض کنید $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع از (X, d_1) به (Y, d_2) باشند، $\mathcal{F}$ را هم پیوسته در $x_0 \in X$ گوییم، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که:

$$d_1(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

تعریف ۳۳.۱ . دو دنباله‌ی $\{u^m\}$ و $\{w^m\}$ را هم همگرا گوییم، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $m_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که، به ازای هر $m \geqslant m_0$ داشته باشیم:

$$d(u^m, w^m) \leqslant \varepsilon.$$

تعریف ۳۴.۱ . نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to 2^X$ را نیم پیوسته‌ی بالایی در $x_0 \in X$ گوییم، هرگاه به ازای هر مجموعه باز G شامل $T(x_0)$، یک همسایگی $U(x_0)$ حول x_0 موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in U(x_0)$ داریم: $T(x) \subset G$

و نیم پیوسته‌ی بالایی در X گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ی $x \in X$ نیم پیوسته‌ی بالایی باشد.

تعریف ۳۵.۱ . نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to 2^X$ را نیم پیوسته‌ی پایینی در $x_0 \in X$ گوییم، هرگاه به ازای هر مجموعه باز G که $T(x_0) \cap G \neq \emptyset$، یک همسایگی $U(x_0)$ حول x_0 موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in U(x_0)$ داریم: $T(x) \cap G \neq \emptyset$

و نیم پیوسته‌ی پایینی در X گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ی $x \in X$ نیم پیوسته‌ی پایینی باشد.

تعریف ۳۶.۱ . نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to 2^X$ را در $x_0 \in X$ پیوسته گوییم، هرگاه در x_0 نیم پیوسته‌ی پایینی و نیم پیوسته‌ی بالایی باشد.

نگاشت T را در X پیوسته گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته باشد.

تعریف ۳۷.۱ . نگاشت $T : X \to 2^X$ را بسته گوییم، هرگاه برای هر $x_\circ, y_\circ \in X$ که $y_\circ \notin T(x_\circ)$ همسایگی های $U(x_\circ)$ و $V(y_\circ)$ به ترتیب حول $x_\circ$ و $y_\circ$ وجود داشته باشند به طوری که

$$T(x) \cap V(y_\circ) = \emptyset \qquad \forall x \in U(x_\circ)$$

قضیه ۳۸.۱ . اگر T نگاشت بسته باشد و $(x_n) \to x_\circ$ و $(y_n) \to y_\circ$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم، $y_n \in T(x_n)$، آنگاه $y_\circ \in T(x_\circ)$.

اثبات . به [۲]، صفحه‌ی ۱۱۱ رجوع کنید.□