به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

عنوان :

اشتقاق های بی کران روی $C^\star$−جبرها

استاد راهنما :

دکتر اسدالله نیکنام

استاد مشاور :

دکترمجید میرزاوزیری

نگارنده :

محسن کیان

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

ساحت مقدس آقا علی بن موسی الرضا

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

و هر آنکه در راه علم تلاش می‌کند

قدردانی

سپاس و ستایش مخصوص خداوندی است که ستایش‌گران از مدحش عاجزند و حسابگران نعمتهایش را شماره نتوانند کرد. او که گمان‌های زیرک به مقامش نرسند و همت‌های بلند قادر به درکش نیستند.

بدین وسیله مراتب قدردانی و تشکر خود را نسبت به استاد راهنمای بزرگوارم دکتر اسدالله نیکنام ابراز می‌دارم و برای ایشان توفیق روزافزون آرزومندم که بدون راهنمایی‌های ایشان در مراحل تحقیق رساله، به انجام رساندن این پژوهش میسّر نبود. همچنین سپاس و قدردانی خود را به استاتید محترم دکتر حجازیان و دکترجانفدا که قبول زحمت نموده و پایان نامه‌ام را مورد مطالعه و داوری قرار داده‌اند و دکتر میرزاوزیری که همیشه از راهنمایی‌های ارزندهٔ ایشان در امر تدوین این رساله استفاده کردم، تقدیم می‌نمایم. همچنین از استاد بزرگوار دکتر ابراهیمی ویشکی که در طول دوره کارشناسی ارشد همیشه از راهنمایی‌های ایشان استفاده کردم، کمال تشکر را دارم.

از کارمندان دانشکده، واحد انتشارات، اداره آموزش و بخش کتابخانه، دوستان خوبم آقایان علی دادخواه،امید ضابطی،امین روشنی و محمد شیرازیان و همه کسانی که به نوعی بر گردن بنده حقی دارند سپاسگزارم.

به ویژه از سرکار خانم مرضیه فروغ به خاطر راهنمایی‌ها و کمک‌های ایشان در امر تحقیق این رساله کمال تشکر را دارم.

در نهایت ازپدر و مادرم عزیزم بسیار متشکرم که آنچه در توان داشتند برای کسب تحصیل من دریغ نکرده‌اند،

و این مجموعه را به همهٔ این بزرگواران تقدیم می‌کنم.

محسن کیان — شهریور ماه ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

پیشگفتار

اشتقاق‌ها برای اولین بار تقریباً در مراحل ابتدایی مطالعهٔ $C^\star$−جبرها ظاهر شدند و به تدریج تحقیقات روی آنها به یکی از شاخه‌های اصلی $C^\star$−جبرها تبدیل شد. تئوری آنها به دو قسمت عمدهٔ اشتقاق‌های کراندار و بی‌کران تقسیم می‌شود. در حدود ۳۰ سال قبل کاپلانسکی [۱] در یک تحقیق عالی روی اشتقاق‌ها توانست دو نتیجه نامربوط را به هم نسبت داده و باعث ایجاد تحقیقی روی اشتقاق‌های پیوسته شود. اولی مربوط به مکانیک کوانتومی و منسوب به ویلنت [۲] و دیگری مربوط به مشتق‌ها و منسوب به سیلوف [۳] بود. در مراحل ابتدایی ریاضی‌دانان بیشتر تحقیقات خود را به مطالعهٔ اشتقاق‌های کراندار اختصاص دادند. مطالعهٔ اشتقاق‌های کراندار منجر به یک تئوری زیبای ریاضی شد که ابزارهای اساسی برای مطالعهٔ اشتقاق‌های بی‌کران را فراهم کرده است. همچنین این احتمال وجود داشت که نظریهٔ سیستم‌های مشبک کوانتومی در مکانیک آماری را بتوان به وسیلهٔ مفهوم اشتقاق‌های بی‌کران در $C^\star$−جبرها گسترش داد. در حقیقت بسیاری از قضایا در نظریهٔ سیستم‌های کوانتومی قبلاً برای اشتقاق‌های نرمال روی جبرهای UHF فرموله شده است.

در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی و فیزیک مکانیک می‌توان یک سیستم فیزیکی را بر حسب یک $C^\star$−جبر A توصیف کرد. برآورد زمانی سیستم بر حسب یک گروه یک پارامتری از

---

[۱] Kaplansky

[۲] Wielandt

[۳] Silov

$\star-$خودریختی‌های $\tau(t)$ روی $\mathcal{A}$ داده می‌شود. برای بسیاری از سیستم‌ها مانند سیستم‌های مشبک کوانتومی از اسپین‌ها[۴][۱۹] می‌توان فرض کرد گروه یک پارامتری $\tau(t)$ به طور قوی پیوسته است. یعنی برای هر $a \in \mathcal{A}$ تابع $t \to \tau_t(a)$ در t با نرم پیوسته است. آنگاه عملگر بستهٔ δ که به طور چگال تعریف شده است با ضابطهٔ زیر وجود دارد

$$\delta(a) = \lim_{t \to \circ} \frac{\tau_t(a) - a}{t}.$$

دامنهٔ δ یعنی $D(\delta)$ مجموعهٔ همهٔ $a \in \mathcal{A}$ است که برای آن حد فوق به مفهوم همگرایی در نرم موجود باشد. عملگر δ یک $\star-$اشتقاق از $\mathcal{A}$ می‌باشد، یعنی δ خطی است و داریم

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \quad \delta(a^\star) = -\delta(a)^\star, \qquad \forall a, b \in D(\delta).$$

اشتقاق δ مولد بی‌نهایت کوچک $\tau(t)$ نامیده می‌شود. اگر $\mathcal{A}$ دارای عنصر همانی ۱ باشد، همیشه فرض می‌کنیم $۱ \in D(\delta)$ و چون $۱ = ۱^۲$ نتیجه می‌شود $\delta(۱) = \circ$. می‌دانیم که اگر یک اشتقاق δ روی کل $\mathcal{A}$ تعریف شده باشد، یعنی $D(\delta) = \mathcal{A}$ آنگاه δ کراندار است[۲۰]. برای دیدن خواص دیگر اشتقاق‌های کراندار به [۲۰] فصل ۴ مراجعه کنید. ما دراینجا به اشتقاق‌های بی‌کران خواهیم پرداخت.

در فصل ۱، به معرفی مفاهیم و اصطلاحات مورد نیاز خواهیم پرداخت.

در فصل ۲ به مطالعهٔ اشتقاق‌های بی‌کران روی $C^\star-$جبرها پرداخته شده و اشتقاق‌هایی را که گروه‌های یک پارامتری از خودریختی‌ها تولید می‌کنند، مشخص شده‌اند. همچنین یک حساب تابعی برای دامنهٔ اشتقاق‌های بسته تعریف شده است.

در فصل ۳، به بررسی اشتقاق‌ها روی $C^\star-$جبرهای خاص مانند$C^\star-$جبرهائی که در یک $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ قرار داشته و شامل $C^\star-$جبر همهٔ عملگرهای فشردهٔ روی $\mathcal{H}$ می‌باشند و جبرهای UHF پرداخته شده است.

[۴] quantumlattice systems of spins

در فصل ۴، به ساختن مولدهای بی‌نهایت کوچک روی $C^\star$−جبرهای خاص مانند گروه $C^\star$−جبرهای موضعاً فشرده و ضرب تانسوری $C^\star$−جبرها پرداخته شده است. همچنین برخی از خواص گروه‌های یک پارامتری روی این $C^\star$−جبرها بررسی شده است.

مرجع اصلی این رساله سه مقاله زیر می‌باشد

1- Bratteli,O. and Robinson,D.W. : *Unbounded derivations of C*-algebras.* Commun. Math. Phys. **42**(1975), 253-268.

2- Niknam,A. : *Infinitesimal generators of C*-algebras.* Potential Analysis, **6**(1997), 1-9.

3- Lance,E.C. and Niknam,A. : *Unbounded derivations of group C*-algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. vol. 61, No. 2, (1976), 310-314.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مفاهیمی از آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. اگر $f : X \to \mathbb{C}$ تابعی کراندار باشد، آنگاه تعریف می کنیم

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}.$$

$\|.\|_\infty$ یک نرم در فضای توابع کراندار روی X یعنی $B(X)$ است و $(B(X), \|.\|_\infty)$ یک فضای باناخ است. همچنین

$$\begin{aligned} C_b(X) &= \{f \in B(X) \ : \ \text{پیوسته است } f\} \\ C_\circ(X) &= \{f \in C_b(X) \ : \ \text{در بی‌نهایت صفر می‌شود } f\} \\ C_{\circ\circ}(X) &= \{f \in C_b(X) \ : \ \text{دارای محمل فشرده است } f\} \end{aligned}$$

که در آن $C_b(X)$ و $C_\circ(X)$ زیرفضاهای بسته از $B(X)$ هستند، در نتیجه خود فضاهایی باناخ خواهند بود. اما $C_{\circ\circ}(X)$ زیرفضای بسته‌ای از $B(X)$ نیست و در واقع بستار $C_{\circ\circ}(X)$ برابر $C_\circ(X)$ است.

منظور از محمل[1] f بستار مجموعهٔ $\{x \in X \ : \ f(x) \neq \circ\}$ است که آن را با $supp(f)$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که برای هر $f, g \in C_b(X)$،

$$supp(f+g) \subseteq supp(f) \bigcup supp(g).$$

---

[1] support

$$supp(fg) \subseteq supp(f) \bigcap supp(g).$$

$$supp(\alpha f) \subseteq supp(f), \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ (که $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است) را همراه با نگاشت:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$
$$(x, y) \mapsto xy$$

یک جبر گوییم، هرگاه برای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

$$x(yz) = (xy)z$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را جبر نرمدار گوییم، هرگاه $\mathcal{A}$ یک فضای برداری نرمدار باشد به‌طوری که برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

هرگاه جبر نرمدار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ کامل باشد، آن را جبر باناخ [۲] می‌نامیم.

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. در اینصورت $\mathcal{A}$ یک $\star-$جبر باناخ نامیده می‌شود هرگاه نگاشت

$$\star : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

وجود داشته باشد به طوری که‌برای هر $x, y, \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(x + y)^\star = x^\star + y^\star$$

[۲] Banach algebra

$(xy)^\star = y^\star x^\star$

$(\alpha x)^\star = \bar{\alpha} x^\star$

$.(x^\star)^\star = x$

$\star-$جبر باناخ $\mathcal{A}$، یک $C^\star-$جبر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in \mathcal{A}$،

$$\|x^\star x\| = \|x\|^{۲}.$$

عنصر a در $C^\star-$جبر $\mathcal{A}$،

خودالحاق نامیده می‌شود هرگاه $a = a^\star$.

تصویر نامیده می‌شود اگر $a = a^\star = a^{۲}$.

نرمال نامیده می‌شود اگر $aa^\star = a^\star a$.

یکانی نامیده می‌شود هرگاه $aa^\star = ۱ = a^\star a$.

برای هر عنصر a در یک جبر باناخ یکدار $\mathcal{A}$، مجموعهٔ

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda ۱ - a \ \text{معکوس‌پذیر نیست}\}$$

را طیف[۳] a و مکمل $\sigma(a)$ در $\mathbb{C}$ را مجموعهٔ حلال[۴] a می‌نامند. می‌توان نشان داد که برای هر $a \in \mathcal{A}$، مجموعهٔ $\sigma(a)$ ناتهی و فشرده می‌باشد[۱۸]. همچنین $\rho(a) = sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\}$ شعاع طیفی a نامیده می‌شود.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $C^\star-$جبر باشد آنگاه داریم

۱) اگر $a \in \mathcal{A}$ عنصری یکانی باشد آنگاه $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = ۱\}$.

۲) اگر $a \in \mathcal{A}$ خودالحاق باشد آنگاه $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ و $\rho(a) = \|a\|$.

---

[۳] spectrum

[۴] resolvent

برهان. ر.ک. [۹]. □

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید w یک تابعک خطی کراندار روی $C^\star$−جبر $\mathcal{A}$ باشد. w مثبت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$، $w(a^\star a) \geq 0$. هر تابعک خطی مثبت با نرم ۱ روی $C^\star$−جبر $\mathcal{A}$ را یک حالت[5]می‌نامیم. حالت w روی $\mathcal{A}$ یک حالت اثر[6]نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $w(ab) = w(ba)$.

تعریف ۴.۱.۱ زوج $(\pi, \mathcal{H})$ را یک $\star$−نمایش از $\star$−جبر باناخ $\mathcal{A}$ گوئیم هرگاه $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک $\star$−همریختی کراندار باشد. اگر π یک به یک باشد، آنگاه نمایش $(\pi, \mathcal{H})$ یک نمایش صادق[7]نامیده می‌شود.

نمایش $(\pi, \mathcal{H})$ دوری نامیده می‌شود هرگاه برداری مانند $\eta \in \mathcal{H}$ وجود داشته باشد به طوری که $\overline{\pi(\mathcal{A})\eta} = \mathcal{H}$.

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنید w یک حالت روی $C^\star$−جبر $\mathcal{A}$ باشد. در اینصورت یک نمایش دوری $(\mathcal{H}_w, \pi_w, \Omega_w)$ از $C^\star$−جبر $\mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که

$$w(a) = < \Omega_w, \pi_w(a)\Omega_w >$$

برای هر $a \in \mathcal{A}$.

برهان. ر.ک.[۳]. □

[5] state

[6] trace state

[7] faithful representation

فرض کنید X, Y, Z فضاهای خطی نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، نگاشت $\Phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را دوخطی نامیم هرگاه

(۱) برای هر $x \in X$ نگاشت $y \mapsto \Phi(x, y)$ خطی باشد،

(۲) برای هر $y \in Y$ نگاشت $x \mapsto \Phi(x, y)$ خطی باشد.

در حالتی که $Z = \mathbb{F}$ باشد، چنین نگاشتی را تابعک دوخطی یا فرم دوخطی می‌نامیم. نگاشت دو خطی Φ را کراندار گوییم هر گاه $M > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in Y$ و $x \in X$ داشته باشیم

$$\|\Phi(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

نرم این نگاشت برابر است با

$$\|\Phi\| = sup\{\|\Phi(x, y)\|; \quad \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$$

مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های دوخطی کراندار از $X \times Y$ به Z را با $\mathcal{BL}(X, Y; Z)$ نمایش می‌دهیم، که یک فضای نرمدار می‌باشد. اگر Z باناخ باشد، $\mathcal{BL}(X, Y; Z)$ نیز باناخ است.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید X, Y فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ نگاشت $x \otimes y : X^\star \times Y^\star \longrightarrow \mathbb{F}$ را با ضابطه

$$(x \otimes y)(f, g) = f(x)g(y), \quad f \in X^\star, g \in Y^\star$$

تعریف می‌کنیم.

در اینصورت نگاشت $x \otimes y$ تابعک خطی روی $X^\star \times Y^\star$ است و داریم

$$|(x \otimes y)(f, g)| = |f(x)g(y)| \leq \|f\|.\|x\|.\|g\|.\|y\|.$$

بنابراین $(x \otimes y) \in BL(X^*, Y^*; \mathbb{F})$.

ضرب تانسوری جبری X و Y، فضای خطی تولید شده توسط $\{x \otimes y; x \in X, y \in Y\}$ در $BL(X^\star, Y^\star; \mathbb{F})$ تعریف می‌شود و بصورت $X \otimes Y$ نمایش داده می‌شود. بنابراین $X \otimes Y$ زیرفضایی از $BL(X^\star, Y^\star; \mathbb{F})$ است.

لم ۷.۱.۱ برای هر $u \in X \otimes Y$، مجموعه‌های مستقل خطی $\{x_i\} \subseteq X$ و $\{y_i\} \subseteq Y$ وجود دارند به طوری که $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

برهان. ر.ک.[۱۰]. $\square$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید X, Y فضاهای باناخ باشند. عملگر خطی $T : X \to Y$ فشرده نامیده می‌شود هرگاه مجموعهٔ $\overline{T(B)}$ در Y فشرده باشد که B گوی بسته واحد در X می‌باشد. مجموعهٔ همهٔ عملگرهای فشرده از X به Y با $\mathcal{K}(X, Y)$ نمایش داده می‌شود. عملگر $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ با رتبهٔ متناهی نامیده می‌شود هرگاه بعد تصویر T متناهی باشد. مجموعهٔ عملگرهای با رتبهٔ متناهی در $\mathcal{B}(X, Y)$ با $\mathcal{F}(X, Y)$ نشان داده می‌شود

$\mathcal{K}(X, Y)$ زیرفضای بسته‌ای از $\mathcal{B}(X, Y)$، مجموعهٔ عملگرهای خطی کراندار می‌باشد[۱۳]. همچنین $\mathcal{K}(X)$ یک ایده‌آل بسته دوطرفه از $\mathcal{B}(X)$ می‌باشد. همچنین مجموعهٔ عملگرهای با رتبهٔ متناهی در $\mathcal{B}(X, Y)$ تشکیل زیرفضایی از $\mathcal{K}(X, Y)$ می‌دهد[۱۳].

قضیه ۹.۱.۱ اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ در $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ چگال است.

برهان. ر.ک.[۱۳]. $\square$

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ عملگر $x \otimes y$ روی $\mathcal{H}$ را با

$$(x \otimes y)(z) =< z, y > x$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$. عملگر $x \otimes x$ یک تصویر با رتبهٔ یک در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ است اگر و فقط اگر $\|x\| = ۱$. از طرف دیگر هر تصویر با رتبهٔ یک در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$، به ازای بردار یکه‌ای در $\mathcal{H}$ مانند x به صورت $x \otimes x$ می‌باشد[۱۳].

قضیه ۱۰.۱.۱ اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد آنگاه $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ به صورت خطی توسط تصویرهای با رتبه یک تولید می شود.

برهان. ر.ک.[۱۳]. □

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید X, Y فضاهای باناخ باشند. عملگر $T : X \to Y$ بسته نامیده می‌شود اگر برای هر دنباله $x_n \in D(T)$ که $x_n \to x$ و $Tx_n \to y$، داشته باشیم $x \in D(T)$ و $Tx = y$. بنابراین T بسته است اگر و فقط اگر گراف T یعنی مجموعهٔ $Gr(T) = \{(x, Tx),\ \ x \in D(T)\}$ در $X \times Y$ بسته باشد.

به ویژه یک عملگر کراندار بسته است اگر و فقط اگر $D(T)$ بسته باشد.

عملگر T بستارپذیر[۸]نامیده می‌شود اگر $x_n \in D(T)$، $x_n \to ۰$ و $Tx_n \to y$ نتیجه دهد $y = ۰$. اگر T بستارپذیر باشد، آنگاه عملگر بسته‌ای مثل $\tilde{T}$ وجود دارد که بستار T نامیده می‌شود. $\tilde{T}$ کوچکترین توسیع بسته T است. به عبارت دیگر $x \in D(\tilde{T})$ اگر و فقط اگر دنباله‌ای مثل $\{x_n\}$ در $D(T)$ وجود داشته باشد به طوری که $x_n \to x$ و $\tilde{T}(x) = \lim_n T(x_n)$.

[۸] closable

فرض کنیم T عملگری روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با دامنهٔ $D(T)$ باشد. $T^\star$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $D(T^\star)$ مجموعهٔ همهٔ $y \in \mathcal{H}$ باشد که تابعک خطی $x \to < Tx, y >$ روی $D(T)$ پیوسته است. اگر $y \in D(T^\star)$ آنگاه قضیه هان–باناخ[۹] تابعک خطی فوق را به یک تابعک خطی پیوسته روی $\mathcal{H}$ گسترش می‌دهد. بنابراین عنصری مانند $z_y \in \mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که $< Tx, y > = < x, z_y >, \ x \in D(T)$. اکنون عملگر $T^\star$، الحاق T را روی $D(T^\star)$ به صورت $T^\star(y) = z_y$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ عملگر T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ متقارن[۱۰] نامیده می‌شود اگر T به طور چگال تعریف شده باشد (یعنی $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$) و برای هر $u, v \in D(T)$

$$< Tu, v > = < u, Tv > .$$

به عبارت دیگر $T \subseteq T^\star$. به علاوه اگر $T = T^\star$ آنگاه T خودالحاق نامیده می‌شود. عملگر متقارن T اساساً خودالحاق[۱۱] نامیده می‌شود هرگاه بستار T خودالحاق باشد.

نکته ۱۳.۱.۱ اگر T یک عملگر به طور چگال تعریف شده روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آنگاه $T^\star$ یک عملگر بسته است. عملگر V را روی فضای هیلبرت $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ به صورت $V(a, b) = (-b, a)$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم $Gr(T^\star) = [V(Gr(T))]^\perp$ و در نتیجه $Gr(T^\star)$ بسته است. داریم

$$(y, z) \in Gr(T^\star)$$

$$\Longleftrightarrow (Tx, y) = (x, z), \quad \forall x \in D(T)$$

$$\Longleftrightarrow < (-Tx, x), (y, z) > = \circ, \quad \forall x \in D(T)$$

[۹] Hahn-Banach

[۱۰] symmetric

[۱۱] essentially self-adjoint

$$\iff (y,z) \in [V(Gr(T))]^{\perp}.$$

بنابراین هر عملگر متقارن بستارپذیر است.

نکته ۱۴.۱.۱ فرض کنیم عملگرخودالحاق S، یک توسیع از عملگر متقارن T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. چون S بسته است، $\bar{T} \subseteq S$. اگر T اساساً خودالحاق باشد، $\bar{T} = S$. به عبارت دیگر یک عملگر اساساً خودالحاق، یک توسیع خودالحاق یکتا دارد که همان بستارش می‌باشد. برعکس یک عملگر متقارن که فقط یک توسیع خودالحاق دارد، اساساً خودالحاق می‌باشد[۲].

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید μ یک اندازه روی فضای اندازهٔ Q، X یک فضای نرمدار و f یک تابع از Q به X باشد به طوری که برای هر $\lambda \in X^\star$ تابع λf نسبت به μ انتگرال پذیر باشد. در اینصورت اگر عنصری مانند $y \in X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\lambda \in X^\star$، $\lambda y = \int_Q (\lambda f) d\mu$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_Q f d\mu = y.$$

۲.۱ اشتقاق‌ها و گروه‌های یک پارامتری

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. یک خانوادهٔ یک پارامتری $T(t)$، $0 \leq t < \infty$ $(-\infty < t < \infty)$ از عملگرهای خطی کراندار روی X یک نیم‌گروه (گروه) از عملگرهای خطی کراندار روی X است اگر

۱) $T(0) = I$ (I عملگر همانی روی X است).

۲) $T(t+s) = T(t)T(s)$ برای هر $t, s \geq 0$ $(-\infty < t, s < \infty)$.

نیم گروه (گروه) عملگرهای خطی کراندار $T(t)$ را به طور یکنواخت پیوسته نامیم هرگاه

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$
$$(\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0).$$

گروه $T(t)$ را به طور قوی پیوسته[۱۲] گوییم هرگاه برای هر $x \in X$،

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x.$$

هر نیم گروه(گروه) به طور قوی پیوسته از عملگرهای خطی کراندار روی X، یک C_0—نیم گروه (C_0-گروه) نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ گروه α_t از عملگرهای خطی کراندار روی فضای باناخ X، یک گروه $\sigma(X, F)$—پیوسته نامیده می‌شود هرگاه

۱) برای هر x در X، $t \to \alpha_t(x)$، $\sigma(X, F)$—پیوسته باشد،

[۱۲] strongly continuous

۲) برای هر t، $a \to \alpha_t(a)$، $\sigma(X,F) - \sigma(X,F)$—پیوسته باشد.

به ویژه اگر $F = X^\star$، آنگاه α_t یک گروه به طور ضعیف پیوسته نامیده می‌شود.

می‌توان نشان داد گروه α_t به طور قوی پیوسته است اگر و فقط اگر به طور ضعیف پیوسته باشد[۳].

نکته ۳.۲.۱ اگر $T(t)$ یک $C_\circ$—گروه از عملگرهای خطی کراندار روی X باشد، آنگاه ثابت‌های $M \geq 1, w \geq \circ$ وجود دارند به طوری که $\|T(t)\| \leq Me^{tw}$[۱۶]. اگر $w = \circ$ آنگاه $T(t)$ به طور یکنواخت کراندار نامیده می‌شود. همچنین اگر $w = \circ$ و $M = 1$ آنگاه $T(t)$ یک $C_\circ$—گروه از انقباض‌ها نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید $T(t)$ یک گروه از عملگرهای خطی کراندار روی X باشد. عملگر خطی A تعریف شده توسط

$$Ax = \lim_{t \to \circ} \frac{T(t)x - x}{t}$$

مولد بی‌نهایت کوچک[۱۳] گروه $T(t)$ نامیده می‌شود. دامنهٔ A عبات است از همهٔ x هایی در X که حد فوق موجود باشد.

قضیه ۵.۲.۱ عملگر خطی A مولد بی‌نهایت کوچک یک نیم گروه به طور یکنواخت پیوسته است اگر و فقط اگر A یک عملگر کراندار باشد.

برهان. ر.ک.[۱۶]. □

---

[۱۳] infinitesimal generator