بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض

عنوان

گراف غیر جابه‌جایی p-گروه‌ها

استاد راهنما

دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور

دکتر عباس جعفرزاده

نگارنده

معصومه گنجعلی

۱۳۹۱

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: گراف غیر جابه‌جایی p-گروه‌ها

نام نویسنده: معصومه گنجعلی

استاد راهنما: دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور: دکتر عباس جعفرزاده

دانشکده: دانشکده علوم ریاضی گروه: گروه ریاضی محض رشته تحصیلی: ریاضی محض

تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۳/۸ تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۴/۱۹

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۸۰

چکیده پایان‌نامه : فرض کنیم G گروهی غیر آبلی و $Z(G)$ مرکز آن باشد. گراف غیر جابه‌جایی گروه G را با Γ_G نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $G \setminus Z(G)$ را مجموعه‌ی رئوس گراف Γ_G در نظر می‌گیریم و دو راس x و y را زمانی به یکدیگر وصل می‌کنیم که $xy \neq yx$. در این پایان نامه نشان می‌دهیم اگر $\Gamma_P \cong \Gamma_H$، آن‌گاه $|P| = |H|$ که در آن P یک p-گروه متناهی و غیر آبلی و H گروهی دلخواه است.

هم چنین گراف $\tilde{g}$-غیر جابه جایی برای گروه G مفهوم جدیدی است که آن‌را با نماد $\tilde{\Gamma}_G^g$ نشان داده و به صورت زیر معرفی می‌کنیم: مجموعه رئوس آن‌را $G \setminus Z(G)$ در نظر می‌گیریم و دو راس x و y را به یکدیگر وصل می‌کنیم هرگاه $[x, y] \neq g, g^{-1}$. ما در مورد همبندی این گراف بحث می‌کنیم و در انتها قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه. اگر برای گروه متناهی و غیر آبلی G و گروه H، $\tilde{\Gamma}_G^g \cong \tilde{\Gamma}_H^h$ ، آن‌گاه $|G| = |H|$.

واژگان کلیدی: گراف غیر جابه‌جایی، p-گروه، یکریختی گرافی، گروه‌ها بامرکزساز های غیر آبلی، گراف $\tilde{g}$-غیر جابه‌جایی

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : گراف غیر جابه‌جایی p-گروه‌ها

اینجانب معصومه گنجعلی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر احمد عرفانیان متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی مشهد'' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

تقدیم به

امام حسن مجتبی (ع)

هوالحبیب

حمد و ستایش خدایی را که اول است و پیش از او اولی نبود و آخر است بی آن که بعد از او آخری باشد. خدایی که دیده های بینندگان از دیدنش قاصر و اندیشه های وصف کنندگان از وصفش عاجز و ناتوان است. آفریدگان را به دست قدرت خود پدید آورد و آنان را بر اساس خواست خود آفرید و آنان را به راهی که می خواست هدایت کرد و در راه محبت و عشق خود برانگیخت. در حالی که از حدودی که برای آنها معین نموده قدمی پیش و پس نتوانند نهاد و برای هر یک از آنان روزی معلوم و تقسیم شده ای قرار داد. به هر که بیشتر داد احدی نمی تواند اندکی از آن بکاهد و به هر که کمتر داد هیچ کس نمی تواند بر آن بیفزاید. سپس برای او در زندگی عمری موقت معین فرمود و پایانی محدود قرار داد که با گذر روزهای عمر خود به سوی آن گام بر می دارد و با سپری شدن سال هایش به آن نزدیک تر می شود. همین که به پایان مدت خود رسید و پیمانه عمرش لبریز شد جانش را می گیرد و او را به طرف ثواب فروان یا عذاب وحشتناک خود رهسپار می سازد تا به عدالت خود بدکاران را به واسطه عمل بد خود مجازات کند و نیکوکاران را به سبب کردار نیک خویش پاداش دهد.
منزه و پاک است نام های او و پیوسته و همیشگی است نعمت های او. سپاس خدایی را که خود را به ما شناساند و راه سپاسگزاری و شکر گزاری اش را به ما الهام کرد و درهای علم ربوبیّت خود را به روی ما گشود و ما را به اخلاص در توحید و یگانگی اش راهبری کرد و ما را از الحاد و شک در کار خودش دور ساخت.
حمد و سپاسی که آن چنان ما را به خدا نزدیک کند که جا را برای فرشتگان مقرب او تنگ کنیم و در آن اقامت گاه جاوید که جایگاه کرامت و عزت اوست و تحول و دگرگونی نپذیرد، در جمع پیامبران مرسل او در آییم. حمد و سپاسی که باعث رسیدن به فرمان برداری و بخشش او و سبب خوشنودی اش و راهی به سوی بهشت او گردد و مددی باشد بر ادای حق او و تکالیف او.

صحیفه سجّادیه

پروردگارم...

به وسیله آخرین رسول و برترین زن و فرزندانش، که پیشوایان و جانشینان اویند، و تمامی فرشتگانی که به وسیله ی اینان به تو روی می کنند، و در شفاعت نزد تو، آنان را که خاصان درگاه تو اند، وسیله قرار می دهند، به تو روی آورده ام، پس بر ایشان درود فرست و مرا از دلهره ملاقاتت در امان دار، و مرا از خاصان و دوستان قرار ده

اللّهم صلّ علی فاطمه و ابیها و بعلها و بنیها و سرّ المستودع فیها

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که بهترین و مهربان ترین است.
در آغاز وظیفه ی خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای عزیزم، جناب آقای دکتر احمد عرفانیان صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی های ارزنده ی ایشان در راستای پیش برد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.
از جناب آقای دکتر عباس جعفرزاده که زحمت مطالعه و مشاوره ی این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
هم چنین لازم می دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش و جناب آقای دکتر فریدون رهبرنیا که داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند، با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.
همین طور از سرکار خانم بهناز طلوع حقیقی که این پایان نامه بدون ایده های ناب و زحمات بی دریغ ایشان کامل نمی شد بسیار سپاس گزارم.
و اینک بوسه می زنم بر دستان خداوند مهر و مهربانی و قدردانی می کنم از صبوری و لطف بی دریغ پدر و مادر عزیزم و تشکر می کنم از برادر و خواهران خوبم، به پاس عاطفه ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

معصومه گنجعلی
۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

فرض کنیم G گروهی باشد به طوری که همه‌ی زیر مجموعه‌هایی از آن که شامل عناصر دو به دو جابه‌جا نشدنی هستند، متناهی باشند. آیا آن‌ها به طور کران دار متناهی اند؟ این سوالی است که اولین بار به ذهن پ. اردوش [۱] رسید (مرجع [۱۵] راببینید) و در واقع نقطه‌ی آغازی بر معرفی گراف غیر جابه‌جایی یک گروه بود. او به گروه دلخواه G گرافی را به این صورت نسبت داد که مجموعه راس های آن، گروه G است و دو راس x و y به یکدیگر وصل می‌شوند اگر و تنها اگر $xy \neq yx$ و این گراف را با نماد Γ_G نمایش داد. سپس او سوال بالا را به این صورت بیان کرد: فرض کنیم G گروهی باشد که Γ_G هیچ زیرگراف کامل نامتناهی ندارد، در اینصورت آیا عدد خوشه‌ای Γ_G متناهی است؟ نیومن [۲] در [۱۵] سوال بالا را مورد بررسی قرار داده است.

هدف از نسبت دادن یک گراف به یگ گروه، بررسی خواصی از گروه‌ها با استفاده از گراف‌ها و یا برعکس است. برای گروه غیر آبلی G گراف غیر جابه جایی آن را با نماد Γ_G نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم: مجموعه ی رئوس گراف را $G \setminus Z(G)$ در نظر می گیریم و دو راس x و y را زمانی و تنها زمانی به یکدیگر وصل می‌کنیم که $xy \neq yx$. یکی از مفصل ترین مقاله‌ها در زمینه ی گراف غیر جابه‌جایی یک گروه غیر آبلی، مقاله‌ی [۲] است. عبداللهی در این مقاله ابتدا خواص مقدماتی این گراف را بررسی

[1] Paul Erdös

[2] B.H. Neumann

کرده است. برای مثال ثابت کرده است که قطر این گراف برابر با ۲، و کمر گراف مساوی ۳ است. هم چنین نشان داده است برای گروه متناهی G، گراف همیلتنی است. از جمله خواص دیگری که برای این گراف بررسی کرده، مسطح بودن این گراف است. او این نتیجه‌ی شگفت انگیز را ثابت کرده است که گراف غیر جابه‌جایی یک گروه مسطح است اگر وتنها اگر آن گروه $S_۳$، $D_۸$ یا $Q_۸$ باشد. در ادامه او به سراغ AC-گروه‌ها رفته است، گروه‌هایی که مرکزسازهای عناصر غیر مرکزی آن‌ها آبلی هستند. همه‌ی این نتایج زیبا هستند، اما آنچه این مقاله را بسیار مورد توجه قرار داده، مطرح کردن حدس زیر در آن است:

فرض کنیم G گروهی متناهی و غیر آبلی و $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ باشد برای گروه H، در این‌صورت $|G| = |H|$.

در همان مقاله درستی این حدس در شرایط مختلفی، از جمله زمانی که یکی از گروه‌های نام برده شده در حدس گروه متقارن، گروه متناوب، گروه دو وجهی یا یک AC-گروه غیر حل‌پذیر باشد اثبات شده است. اما سوال دیگری که مطرح می‌شود این است که کدام خاصیت گروه‌ها تحت یکریختی گرافی حفظ می‌شود. در مقاله‌ی [۲]، ثابت شده است که اگر G گروهی متناهی پوچ‌توان و غیر آبلی و H گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ و $|G| = |H|$، آنگاه H نیز پوچ‌توان است. می دانیم در نظریه‌ی گروه‌ها یافتن گروه‌های یکریخت و قرار دادن آن‌ها در یک خانواده از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اکنون که گراف‌ها ابزاری شده اند برای مرتبط کردن گروه‌ها با یکدیگر، بدیهی است که این سوال به ذهن برسد که کدام گروه‌ها با گراف یکریخت، خود یکریختند. باز هم به سراغ [۲] می رویم، عبداللهی حدس زده است که اگر G گروهی ساده متناهی و غیر آبلی باشد و $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آنگاه $G \cong H$. در مقاله ی [۷] این حدس برای دسته ای از گروه‌های ساده به اثبات رسیده است. اخیرا در [۳]، این حدس برای A_n ها که $n \geq ۵$ اثبات شده است و در همان مقاله ذکر شده که با اثبات این حدس برای A_n ها و بنا بر نتایجی که قبلا در درستی این حدس به دست آمده، برای همه‌ی گروه‌های ساده، متناهی و غیر آبلی این حدس درست است (مرجع [۳] را ببینید).

در بخش اول از اولین فصل، تعاریف و قضیه‌هایی در نظریه‌ی گروه‌ها را بیان کرده ایم. در بخش دوم همین فصل، به بیان مفاهیم ابتدایی از نظریه ی گراف‌ها می‌پردازیم. اما آنچه ما در فصل دوم به دنبال اثبات آن هستیم این است که اگر P، یک p-گروه متناهی و غیر آبلی باشد و $\Gamma_P \cong \Gamma_G$ برای گروه G، آنگاه $|G| = |P|$. خواص p-گروه‌ها، مفاهیم مربوط به عاد کردن اعداد و بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد و هم‌چنین اطلاعاتی که از یکریختی دو گراف حاصل می شوند، ابزار اصلی ما در به اثبات رساندن این قضیه هستند. در فصل سوم ما گراف غیر جابه جایی را کنار می گذاریم و گرافی جدید را معرفی می‌کنیم. در [۱۹] به گروه G گرافی به این صورت نسبت داده شده است: مجموعه رئوس آن G تعریف شده و دو راس x و y به یکدیگر وصل می‌شوند هرگاه داشته باشیم $[x,y] \neq g$ و $[x,y] \neq g^{-1}$ که در آن $g \in G$ است. این گراف با Γ_G^g نمایش داده شده است. هم‌چنین در آن خواصی از Γ_G^g مورد مطالعه قرار گرفته است، برای نمونه می‌توان به همبندی این گراف اشاره کرد. ما زیر گرافی القایی از این گراف را به گروه غیر آبلی G نسبت می‌دهیم. در واقع رئوس زیر گراف را $G \setminus Z(G)$ در نظر می‌گیریم، آن‌را گراف $\tilde{g}$-غیر جابه‌جایی می‌نامیم و با $\tilde{\Gamma}_G^g$ نشان می‌دهیم. با این کار دو سوال برای این گراف مطرح می‌شود، اول اینکه آیا گراف حاصل همبند باقی می‌ماند؟ دوم اینکه آیا دو گروه متناهی و غیر آبلی با گراف‌های $\tilde{g}$-غیر جابه‌جایی یکریخت، دارای مرتبه های برابر هستند؟ پاسخ سوال اول در حالت کلی منفی است. بنابراین در بخش اول فصل آخر به دنبال شرایطی برای برقراری همبندی این گراف می‌گردیم. نکته جالب توجه این است که پاسخ سوال دوم در حالت کلی مثبت است، در بخش دوم فصل سه آن‌را بررسی کرده ایم. در انتهای کار، نشان می‌دهیم اگر $\tilde{\Gamma}_G^g \cong \tilde{\Gamma}_H^h$ برای گروه‌های متناهی و غیر آبلی G و H، آنگاه تحت شرایطی خاص بعضی از خواص جبری G به H منتقل می‌شود.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مفاهیم مقدماتی گروه‌ها

این بخش شامل قضیه‌هایی از نظریه‌ی گروه‌هاست که در رسیدن به هدف اصلی این پایان نامه نقش اساسی داشته اند. قضیه‌هایی که در اینجا بیان می‌شوند اکثرا قضیه‌های معروف و مهمی در نظریه‌ی گروه‌ها هستند. بنابراین هر خواننده ای که با نظریه‌ی گروه‌ها آشنایی داشته باشد، اثبات آن‌ها را دیده است، یا دست کم به منابعی که شامل اثبات این قضیه‌ها است، آگاهی دارد. در نتیجه ما فقط به بیان صورت این قضیه‌ها، اکتفا کرده و منابعی را برای اثبات آن‌ها به خواننده معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. *گروه G را یک p- گروه می‌نامیم، هرگاه هر عضو آن از مرتبه ی توانی از عدد p باشد، که در آن p عددی اول است. بدیهی است که گروه متناهی G ، یک p-گروه است اگر و تنها اگر مرتبه‌اش توانی از عدد اول p باشد.*

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. یک سری زیر نرمال [۱] برای گروه G، زیرگروه‌هایی از G به صورت زیر است

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_m = G$$

به طوری که برای هر $0 \leq i \leq m-1$، زیرگروه G_i در G_{i+1} نرمال باشد. عدد m را طول سری می‌نامیم.
اگر در سری بالا برای هر $0 \leq i \leq m-1$، داشته باشیم $G_i \trianglelefteq G$ آن‌گاه این سری را یک سری نرمال برای گروه G می نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. الف. گروه G را گروهی حل‌پذیر می‌نامیم هرگاه یک سری زیر نرمال برای آن به صورت $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_m = G$ موجود باشد، به طوری که برای هر $0 \leq i \leq m-1$، گروه G_{i+1}/G_i گروهی آبلی باشد. همچنین سری بالا را یک سری آبلی می‌نامیم.

ب. اگر G گروهی حل‌پذیر باشد، آن‌گاه طول کوتاه‌ترین سری آبلی G را طول حل‌پذیری یا رده‌ی حل‌پذیری G می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. الف. یک سری مرکزی برای گروه G یک سری نرمال مانند سری زیر است

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_m = G$$

به طوری که برای هر i، $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$.

ب. گروه G را که دارای یک سری مرکزی باشد، گروه پوچ‌توان می‌نامیم.

ج. برای گروه پوچ‌توان G، طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده‌ی پوچ توانی [۲] G می نامیم.

[1] *subnormal series*

[2] *nilpotency class*

تعریف ۵.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. در این‌صورت i–امین مرکز G را با $Z_i(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت استقرایی به شکل زیر تعریف می‌کنیم، $Z_0(G) = 1$ و $Z_1(G) = Z(G)$. فرض کنیم i–امین مرکز G تعریف شده باشد و زیرگروهی نرمال در G باشد. $Z(G/Z_i(G))$ به عنوان زیر گروهی از $G/Z_i(G)$ به صورت $H/Z_i(G)$ است که $H \leq G$. $Z_{i+1}(G)$ را H تعریف می‌کنیم. سری مرکزی بالایی برای گروه G سری نرمالی است که زیرگروه‌های ظاهر شده در آن $Z_i(G)$ ها باشند، یعنی*

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq \dots$$

قضیه ۱.۱.۱. *شرط لازم و کافی برای این که گروه دلخواه G پوچ‌توان باشد این است که سری مرکزی بالایی G به خود G ختم شود. به علاوه وقتی که G پوچ‌توان است، طول سری مرکزی بالایی آن، همان رده‌ی پوچ‌توانی G است.*

برهان. مرجع [۱۷] را ببینید. □

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. زیرگروهی از G که آن‌را با نماد $\gamma_i(G)$ نمایش می‌دهیم به صورت استقرایی به شکل زیر تعریف می‌شود: $\gamma_1(G)$ را G تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\gamma_k(G)$ تعریف شده باشد، در این‌صورت $\gamma_{k+1}(G)$ را برابر با $[\gamma_k(G), G]$ تعریف می‌کنیم. اکنون سری مرکزی پایینی برای گروه G یک سری به شکل زیر است*

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_i(G) \geq \dots$$

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. در این‌صورت شرط لازم و کافی برای اینکه گروه G پوچ‌توان باشد، این است که سری مرکزی پایینی G به زیرگروه بدیهی ختم شود. به علاوه اگر G پوچ‌توان باشد، آن‌گاه طول سری مرکزی پایینی همان رده‌ی پوچ توانی G است.*

لم ۳.۱.۱. *اگر G، یک p–گروه متناهی باشد، آن‌گاه $Z(G) \neq 1$.*

برهان. مرجع [۸] را ببینید. □

نتیجه‌ی زیر کاربردی از لم بالا است، که برای مشاهده‌ی اثباتی از آن می توانید به مرجع [۸] مراجعه کنید.

نتیجه ۴.۱.۱. *هر p-گروه متناهی، گروهی پوچ‌توان است.*

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنید G گروهی پوچ‌توان و N زیرگروهی نرمال و نابدیهی از G باشد. در این‌صورت $N \cap Z(G) \neq ۱$.*

برهان. به مرجع [۱۷] مراجعه کنید. □

لم ۶.۱.۱. *فرض کنید N زیرگروه نرمالی از گروه G باشد به طوری‌که $N \subseteq Z(G)$. به علاوه G/N پوچ‌توان باشد. در این‌صورت G نیز پوچ‌توان است.*

برهان. فرض کنیم G/N گروهی پوچ‌توان از رده‌ی پوچ‌توانی n باشد، در این‌صورت داریم

$$\gamma_{n+۱}(G)N/N = \gamma_{n+۱}(G/N) = N/N$$

در نتیجه $\gamma_{n+۱}(G) \subseteq N$. اکنون $N \subseteq Z(G)$ نتیجه می دهد

$$\gamma_{n+۱}(G) = [\gamma_n(G), G] \leq [N, G] = ۱$$

در نتیجه بنابر قضیه‌ی ۲.۱.۱ ، G پوچ‌توان است. □

قضیه ۷.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی پوچ‌توان و H زیرگروهی از آن باشد به طوری‌که $H \neq G$. در این صورت $H < N_G(H)$.*

برهان. اثبات آن را در [۱۷] پیدا کنید. □

لم ۸.۱.۱. *هرگروه از مرتبه‌ی $p^۲$ آبلی است، که p عددی اول است.*

برهان. به [۸] مراجعه کنید. $\square$

مجموعه‌ی خودریختی‌های گروه G را با نماد $Aut(G)$ نشان می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود که اگر $\varphi \in Aut(G)$ و $N \trianglelefteq G$، آن‌گاه $\varphi(N) \trianglelefteq G$.

تعریف ۷.۱.۱. *زیرگروه H از گروه دلخواه G را مشخصه می‌نامیم هرگاه H توسط هر خودریختی از G پایدار بماند. یعنی برای هر $\varphi \in Aut(G)$ داشته باشیم $\varphi(H) = H$، و آن‌را بانماد $H \overset{c}{\trianglelefteq} G$ نشان می‌دهیم.*

لم ۹.۱.۱. *الف. هر زیرگروه مشخصه، یک زیرگروه نرمال است.*

ب. اگر $N \trianglelefteq G$ و $H \overset{c}{\trianglelefteq} N$، آن‌گاه $H \trianglelefteq G$.

برهان. مرجع [۱۷] را ببینید. $\square$

لم و قضیه‌ی بعد، از نتایج قابل استفاده ای هستند که می‌توانید برهان آن‌ها را در مرجع [۸] ببینید.

لم ۱۰.۱.۱. *اگر H و K زیرگروه‌هایی ازگروه G باشند، آن‌گاه شرط لازم وکافی برای اینکه HK زیر گروه G باشد این است که $HK = KH$.*

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی دلخواه و H و K زیرگروه‌های متناهی از G باشند. در این صورت HK متناهی است و $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.*

یکی از مهم ترین قضیه‌ها در نظریه ی گروه‌ها، قضیه‌ی لاگرانژ [۱] است و آن عبارت است از فرض کنیم G گروهی متناهی و H زیر گروهی از آن باشد. در این‌صورت $|H|$، $|G|$ را می شمارد. سوالی که با دیدن این قضیه به ذهن می‌رسد این است که آیا عکس این قضیه نیز درست است؟ پاسخ این سوال در حالت کلی منفی است و مثال نقض معروفی که برای عکس این قضیه ارائه شده، گروه

[1] *Lagrange*

متناوب از مرتبه ی ۱۲، یعنی A_4 است. اکنون دو قضیه را بیان می‌کنیم که به سوال بالا پاسخ مثبت می‌دهند.

قضیه ۱۲.۱.۱. *اگر G گروه متناهی و آبلی و d عددی باشد که مرتبه ی گروه را می‌شمارد، آن‌گاه G زیر گروهی از مرتبه ی d دارد.*

برهان. برای دیدن برهان، به [۸] رجوع کنید. □

قضیه‌ی زیر به قضیه‌ی کوشی [1] معروف است، که اثبات زیبایی از آن را در مرجع [۸] می‌توان یافت.

قضیه ۱۳.۱.۱. *اگر عدد اول p مرتبه‌ی گروه متناهی G را بشمارد، آن‌گاه G دارای عضوی از مرتبه‌ی p است.*

تعریف ۸.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی دلخواه و $X_1,\ldots,X_n$ زیرگروه‌هایی از آن باشند. در این‌صورت زیرگروه جابه‌جا گر G از وزن n را با $[X_1,\ldots,X_n]$ نشان داده و به صورت استقرایی به شکل زیر تعریف می‌کنیم، اگر $n=1$ آن‌گاه $[X_1]=\langle X_1\rangle$. برای $n=2$ تعریف می‌کنیم $[X_1,X_2]=\langle [x_1,x_2] \mid x_1\in X_1, x_2\in X_2\rangle$. فرض کنیم $[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ تعریف شده باشد، در این‌صورت تعریف می‌کنیم*

$$[X_1,\ldots,X_n]=[[X_1,\ldots,X_{n-1}],X_n].$$

در حالت خاص $[G,G]$ را با نماد G' نمایش داده و زیرگروه مشتق G می‌نامیم.

برای قضیه و لم زیر در مرجع [۱۷] اثباتی ارائه شده است.

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم x، y و z عناصری در گروه G باشند. در این‌صورت*

الف. $[x,y]^{-1}=[y,x]$

---

[1] *Cauchy*

ب. $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$

ج. $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$

د. $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1$

ه. $[y,x,z^y][z,y,x^z][x,z,y^x]=1$

لم ۱.۱.۱۵. *فرض کنیم H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند. در این‌صورت*

الف. $[H,K]\subseteq H^G\cap K^G$

ب. *اگر $H\trianglelefteq G$، آن‌گاه $[H,K]\subseteq H$ و اگر $K\trianglelefteq G$، آن‌گاه $[H,K]\subseteq K$.*

ج. *اگر H و K زیرگروه‌های نرمالی از G باشند، آن‌گاه $[H,K]\trianglelefteq G$.*

لم ۱.۱.۱۶. *شرط لازم و کافی برای اینکه گروه G آبلی باشد، این است که $G'=1$، که G' زیرگروه مشتق G است.*

برهان. اثبات را در [۸] می توانید ببینید. □

تعریف ۱.۱.۹. *فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. i-امین مشتق G را به روش استقرایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم $G^0=G$ و $G^{(1)}=G'$. فرض کنیم $G^{(k)}$ تعریف شده باشد، در این‌صورت تعریف می‌کنیم $G^{(k+1)}=(G^{(k)})'$.*

لم ۱.۱.۱۷. *فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. در این‌صورت برای هر عدد طبیعی i، زیرگروه $G^{(i)}$ در G نرمال است.*

برهان. چون $G'\trianglelefteq G$، پس بنا بر قسمت سوم لم ۱.۱.۱۵ و تعریف $G^{(i)}$ برهان کامل است. □

قضیه ۱۸.۱.۱. *شرط لازم و کافی برای اینکه گروه G حل‌پذیر باشد این است که $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $G^{(n)} = 1$.*

برهان. در مرجع [۱۷] اثبات این قضیه‌ی زیبا را خواهید یافت. $\square$

گزاره ۱۹.۱.۱. *هر گروه غیر بدیهی، حل‌پذیر و ساده، آبلی است.*

برهان. اجازه دهید تا اثبات این گزاره را که از قضیه‌ی قبل نتیجه می شود بیان کنیم. چون G ساده و $G' \trianglelefteq G$، پس $G' = 1$ یا $G' = G$. اگر $G' = G$، آن‌گاه بنا بر قضیه‌ی۱۸.۱.۱ گروه G حل‌پذیر نخواهد بود که با فرض در تناقض است. بنابراین $G' = 1$ و بنابر لم ۱۶.۱.۱ آبلی است. $\square$

قضیه ۲۰.۱.۱. *فرض کنیم p، q و r اعداد اول باشند. در این‌صورت هر گروه متناهی از مرتبه‌ی $p^m, p^m q, p^2 q^2$ یا pqr حل‌پذیر هستند.*

برهان. مرجع [۱۷] را ببینید. $\square$

تعریف ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. در این‌صورت هر زیرگروه بیشین G را یک p-زیرگروه سیلو از G می نامیم.*

اکنون سه قضیه‌ی معروف سیلو [1] را در قضیه‌ی زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۱.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی متناهی و $|G| = p^n m$ به طوری که $(p, m) = 1$. در این‌صورت*

الف. گروه G برای هر $1 \leq i \leq n$، زیرگروهی از مرتبه‌ی p^i دارد.

ب. هر دو p-زیرگروه سیلوی G در G مزدوج هستند.

ج. اگر $n_p(G)$ تعداد p-زیرگروه‌های سیلوی G باشد، آن‌گاه $n_p(G) \equiv 1$ به پیمانه ی p و $n_p(G) = [G : N_P(G)]$ که در آن P یک p-زیرگروه سیلوی G است.

[1] *Sylow*