بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوري

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته فیزیک گرایش نظری

اهمیت نگاشت‌های مثبت در مطالعه درهمتنیدگی حالت‌های کوانتومی

استاد راهنما

دکتر یحیی اکبری

استاد مشاور

دکتر اسفندیار فیضی

پژوهشگر

نگاررسول زاده دهری

اسفند ماه ۱۳۹۱

ایران / تبریز

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

تقدیر و تشکر

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم و برادر مهربانم که با زحمات بی شائبه مرا یاری نمودند، تقدیم می کنم.

واز استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر یحیی اکبری که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند.

نگار رسول زاده دهری

اسفند ماه ۱۳۹۱

تبریز- ایران

فهرست مطالب

فصل دوم **دوگانگی میان نگاشت ها و حالت های کوانتومی**

فصل سوم **بررسی تعدادی نگاشت مثبت معروف**

چکیده

مسئله تشخیص حالت های درهمتنیده از حالت های جداپذیر، از مسائل مهم نظریه اطلاعات کوانتومی است. یکی از راهکارهـای این مسئله، استفاده از شاهدهای درهمتنیدگی است. قضیه یکریختی جمیولکوفسکی تناظر یک به یکی میان نگاشت های مثبتی کـه کاملا مثبت نباشند و شاهدهای درهمتنیدگی برقرار می کند. از این رو، مطالعه این نگاشت ها اهمیت دارد. در این پایان نامه، ابتـدا خواص کلی این نگاشت ها مطالعه و سپس نگاشت های خاص و مهم ترانهاد، کاهش و چویی به تفصیل بررسی شده است.

کلمات کلیدی:

کیوبیت، درهمتنیدگی، جداپذیری، نگاشت مثبت، نگاشت کاملا مثبت، یکریختی جمیولکوفسکی، نمایش کراوس

مقدمه

کامپیوترهای معمولی که مورد استفاده قرار می گیرند طوری ساخته شده اند که در آن همه اطلاعات اعم از حروف و اعداد و ... با مجموعه ای از بیت ها که متشکل از صفرها و یک ها است به کامپیوتر داده می شوند. در واقع قوانین حاکم درکامپیوترهای معمولی، قوانین فیزیک کلاسیک است. در کامپیوترهای معمولی پردازش برخی مسائل پیچیده نیاز به مدت زمان طولانی دارندوبرخی مسائل در این کامپیوترها غیر قابل حل هستند. برای بهره مندی بیشتر، ازکامپیوترهای کوانتومی استفاده می کنند که تفاوت اساسی با کامپیوترهای کلاسیکی دارند.قوانین فیزیک کوانتومی را نمی توان در کامپیوترهای کلاسیکی پیاده کرد برای این منظور کامپیوتر کوانتومی را جایگزین کامپیوتر معمولی می کنند. سیستم فیزیکی وقتی تحول پیدامی کند مثل این است که کامپیوتر پردازش انجام می دهد.

حالت اولیه سیستم = ورودی کامپیوتر

تحول سیستم = پردازش توسط کامپیوتر

حالت نهایی = خروجی کامپیوتر

کامپیوتر کوانتومی دستگاهی است که یک پدیده ی فیزیکی را بر اساس قوانین فیزیک کوانتومی به صورت منحصر به فردی در می آورد تا به صورت اساسی یک حالت جدیداز پردازش اطلاعات را تشخیص دهد که در آن ابزار، کیو بیت است.

کیوبیت‌ها: بیت های کوانتومی یا کیوبیت‌ها معادل کوانتومی ترانزیستورهایی‌اند که کامپیوترهای امروزی را تشکیل داده اند.وجه مشترک تمام کیوبیت‌ها آن است که می‌توانند از وضعیتی به وضعیت دیگر سوئیچ شوند. به طوری که از این وضعیت ها بتوان برای نشان دادن دوتایی (صفرویک) اطلاعات استفاده نمود. در عمل کیوبیت ها توسط یکی از چهار نوع ذرۀ کوانتومی فوتون، الکترون، اتم و یون تحقق می‌یابند. فوتون ها با یکدیگر برهم کنش خوبی ندارند، اما می‌توانند به آسانی از نقطه ای به نقطه دیگر جابه جا شوند و این خاصیت آنها را به گزینه ای مناسب جهت انتقال اطلاعات کوانتومی تبدیل می کند؛ الکترون ها، اتم ها و یون ها بر خلاف فوتون ها، به آسانی با هم برهم کنش دارند، اما جابه جایی خوبی ندارند و به همین دلیل برای پردازش و ذخیره اطلاعات کوانتومی بسیار مناسب می باشند.

هر بیت کوانتومی یا کیوبیت عبارتست از یک سیستم دو دویی که می تواند دو حالت مجزا داشته باشد. به عبارت فنی تر، کیو بیت یک سیستم دو بعدی کوانتومی با دو پایه به شکل $|0\rangle$و $|1\rangle$است. البته نمایش پایه ها یکتا نیست، به این دلیل که بر خلاف محاسبات کلاسیک در محاسبات کوانتومی از چند سیستم کوانتومی به جای یک سیستم ارجح استفاده می کنیم.

به این ترتیب هر کیوبیت، بیش از اندازه گیری شدن می تواند اطلاعات ز یادی را در خود داشته باشد.بر اساس اصل برهم نهی، هر سیستم کوانتومی که بیش از یک حالت قابل دسترس دارد، می تواند به طور همزمان در یک ترکیب خاص از آن حالت ها هم قرار داشته باشد. در اصطلاح می گوئیم که سیستم کوانتومی علاوه بر حالت های خالص یک یا چند حالت آمیخته یا بر هم نهیده نیز دارد.

وجود چند پدیده مهم که مختص فیزیک‌کوانتومی است، آن را از دنیای کلاسیک جدا می‌سازد.این پدیده ها عبارتنداز: برهم‌نهی، تداخل، درهمتنیدگی، ناجایگزیدگی و تکثیرناپذیری.

کامپیوتر کوانتومی ماشینی است که از پدیده‌ها و قوانین مکانیک کوانتومی مانند برهم‌نهی و درهمتنیدگی برای انجام محاسباتش استفاده می‌کند.

درهمتنیدگی کوانتومی به زبان ساده جفت شدن خواص مکانیکی دو ذره است، ذراتی که پیش‌تر با یکدیگر در اندرکنش بوده و سپس از یک دیگر جدا شده‌اند که در آن نمی‌توان حالات ذرات یک سیستم

را مستقل از هم تصور کرد وبرای ذراتی همچون فوتونها، الکترونها و حتی مولکولها رخ می‌دهد. و انیشتین از درهمتنیدگی با عنوان "عمل شبح‌وار در یک فاصله" یاد می‌کند، که در آن دو ذره به عنوان یک سیستم عمل می‌کنند حتی هنگامی که توسط فواصل عظیم از هم جدا شده باشند. ذرات درهمتنیده در وضعیتی هستند که حالت منفرد آن‌ها ناشناخته است. در مکانیک کوانتومی، درهمتنیدگی یکی از رفتارهای عجیب ذرات است که در آن قوانین فیزیک کلاسیک شکسته می‌شوند و رویدادهای ناممکن به وقوع می‌پیوندند.

اگر دو یا چند کیوبیت را در بر هم کنش با هم قرار دهیم، می توانند برای مدتی در یک حالت کوانتومی مشترک قرار بگیرندبه طوریکه نتوان آن حالت را به شکل حاصلضربی از حالت های جدا ازهم اولیه نشان داد.

بنابراین در همتنیدگی کوانتومی یکی از جالبترین جنبه های غیر کلاسیک مکانیک کوانتومی است و اساس بسیاری از فرایندهای نظریه اطلاعات کوانتومی مانند ترابرد کوانتومی[1] ، محاسبات کوانتومی[2] ، رمزنگاری کوانتومی[3] ، و مخابرات کوانتومی[4] را تشکیل می دهداز این رو، تشخیص در همتنیدگی حالتهای کوانتومی اهمیت بسزایی دارد یکی از راه های تشخیص درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی، استفاده از شاهدهای درهمتنیدگی است. بنا بر قضیه یکریختی جمیولکوفسکی، هر شاهد درهمتنیدگی با یک نگاشت مثبت همبسته است از اینرو مطالعه نگاشت‌های مثبت در بررسی درهمتنیدگی حالت‌های کوانتومی از اهمیت اساسی برخوردار است برای شناخت نگاشت‌های مثبت، معیارهایی ارائه شده است که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.در فصل اول تعریف و مفاهیم مقدماتی مورد بحث قرار گرفته و در فصل دو و سه معیارهای تشخیص حالت های درهمتنیدگی و مقایسه آنها با یکدیگر بررسی شده است.

---

[1] Teleportation Quantum
[2] Quantum computation
[3] Quantum cryptography
[4] Quantum communication

فصل ۱

تعریف ها و مفهوم های مقدماتی

در این فصل تعریف‌ها و مفهوم‌هایی را که در این پایاننامه مورد نیاز است می‌آوریم.

۱–۱ فضای هیلبرت [۵]

فضای هیلبرت، یک فضای برداری کامل است که در آن ضرب داخلی تعریف می‌شود. به هر سیستم کوانتومی یک فضای هیلبرت نسبت داده می‌شود.

حداکثر تعداد بردارهای مستقل دریک فضای هیلبرت H را بُعد آن می‌نامندو با $dim\ H$ نشان می‌دهند.در هر فضای هیلبرت می‌توان به تعداد بعد آن بردار پایه معرفی کرد که هر بردار دلخواه برحسب بردارهای پایه به طور کامل تعیین می‌شود. مثلاً با دو حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به عنوان بردارهای پایه، هر حالت درفضای هیلبرت دو بعدی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad (۱,۱)$$

که درآن αو β دو عدد مختلط دلخواه هستند.

۱–۲ فضای هیلبرت حاصل از دو سیستم کوانتومی

دو سیستم کوانتومی A وB را در نظر می‌گیریم و فضای هیلبرت آن ها را به ترتیب با H_A و $\mathrm{H_B}$ نشان می‌دهیم. فضای هیلبرت سیستم مرکب به صورت حاصل‌ضرب تانسوری $\mathrm{H} = \mathrm{H_A} \otimes \mathrm{H_B}$ تعریف می‌شود که برای آن داریم:

$$\mathrm{dimH_A} = \mathrm{M} < N = dim\mathrm{H_B}$$
$$\mathrm{dimH} = \mathrm{dimH_A} \cdot \mathrm{dimH_B} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{N} \qquad (۲,۱)$$

پایه سیستم Aرا به صورت $\{|e_i\rangle\} \in H_A$ در نظر می‌گیریم و بنابراین هر حالتی در فضای H_A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

[۵] Hilbert Space

$$|\psi_A\rangle = \sum_{i=1}^{M} a_i\,|e_i\rangle \qquad (۳,۱)$$

همچنین پایه سیستم B را به صورت $\{|f_i\rangle\} \in H_B$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه هر حالتی را در فضای H_B می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_B\rangle = \sum_{j=1}^{N} b_j\,|f_j\rangle \qquad (۴,۱)$$

از این رو، یک پایه‌ی فضای مرکب $H = H_A \otimes H_B$ به صورت $\{|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle\}$ است و می‌توان هر حالتی را در فضای مرکب به صورت زیر نوشت:

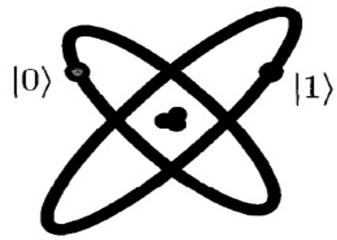
$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j}\,|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j}\,|e_i, f_i\rangle \in H_A \otimes H_B \qquad (۵,۱)$$

۱–۳ کیوبیت

بیت، مفهوم اصلی محاسبات و اطلاعات کلاسیکی است که دو مقدار ممکن ۰ یا ۱ را به خود می‌گیرد. در مقایسه با آن، در محاسبات و اطلاعات کوانتومی مفهوم بیت کوانتومی یا به اختصار کیوبیت[۶] را به کار می‌برند. کیوبیت یک سیستم کوانتومی دو حالتی است. حالت یک کیوبیت را می توان با برداری از یک فضای هیلبرت مختلط دو بُعدی نشان داد. چنانچه بردارهای یک پایه متعامد بهنجار این فضا را با $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نشان دهیم، هر حالت خالص بهنجار یک کیوبیت به صورت یک برهم‌نهی از این حالت‌های پایه نوشته می شود:

که درآن α و β اعداد مختلط دلخواهی هستند به طوری که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ است. $|\alpha|^2$ احتمال آن است که کیوبیت در حالت $|0\rangle$ باشد و $|\beta|^2$ احتمال آن است که کیوبیت در حالت $|1\rangle$ باشد. یک کیوبیت می‌تواند دو قطبش متفاوت یک فوتون، راستای اسپین یک هسته در میدان مغناطیسی یکنواخت و یا حالت‌های پایه و برانگیخته در یک مدل اتمی الکترون باشد (شکل۱–۱). هر کدام از این حالت‌ها را می‌توانیم با $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ نشان دهیم.

[۶] qubit



شکل ۱-۱: کیوبیت توصیف شده با دو تراز الکترونی یک اتم.

توصیف هندسی برای حالت خالص یک کیوبیت می‌تواند مفید باشد. چون $|\alpha|^{۲} + |\beta|^{۲} = ۱$ است، می‌توانیم $|\psi\rangle = \alpha\,|۰\rangle + \beta\,|۱\rangle$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = e^{i\delta}\left(cos\frac{\theta}{۲}|۰\rangle + e^{i\varphi}\,sin\frac{\theta}{۲}|۱\rangle\right) \qquad (۶,۱)$$

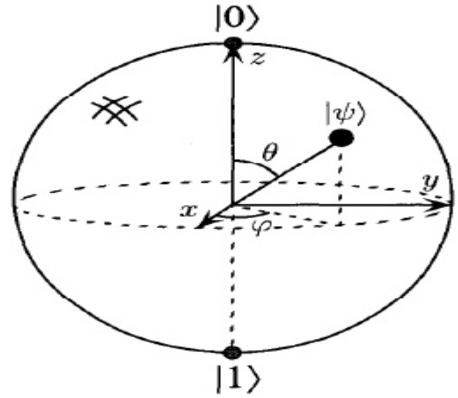
که θ، φ و δ اعداد حقیقی می‌باشند. در اینجا می‌توانیم از δ صرفنظر کنیم. پس داریم:

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{۲}|۰\rangle + e^{i\varphi}\,sin\frac{\theta}{۲}|۱\rangle \qquad (۷,۱)$$

اعداد θو φ، یک نقطه را روی کره‌ی سه بعدی واحد تعریف می‌کنند. این کره، کره‌ی بلوخ نامیده می‌شود و وسیله‌ی مفیدی برای تجسم حالت یک کیوبیت است (شکل۱-۲).

۱-۳-۱ سیستم N – کیوبیتی

حالت کوانتومی یک سیستم N- کیوبیتی می‌تواند به عنوان یک بردار در فضای مختلط ۲^N بعدی بیان شود. چنانچه بردارهای یک پایه متعامد بهنجار هر کیوبیت را با $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ نشان دهیم، بردارهای پایه متعامد بهنجار N-کیوبیتی به صورت رشته‌های دو دویی مانند $|۰۱۱۰۰\cdots۱۰۱\rangle$ خواهد بود.



شکل۲-۱:کره بلوخ بیانگر یک کیوبیت

۴-۱ حالت خالص[۷]

اگر بتوان حالت سیستم را با یک کت نشان داد، حالت سیستم، خالص است. به عبارت دیگر، حالت سیستم، خالص است اگر بتوان برداری مانند $|\psi\rangle \in H$ را چنان یافت که ρ تصویرگر $|\psi\rangle\langle\psi|$ باشد. می‌توان گفت که حالت خالص حالتی است که همواره توان دوم آن با خودش برابر است:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \rho^{۲} = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho \qquad (۸,۱)$$

۱-۴-۱ حالت خالص جداپذیر

د ر یک سیستم کوانتومی دو قسمتی، حالت خالص $|\psi\rangle$ را جداپذیر[۸] می‌گویند اگر بتوانیم آن را به صورت یک بردار حاصلضرب یعنی $|\psi\rangle = |e,f\rangle = |e\rangle\otimes|f\rangle$ بنویسیم که در آن $|e\rangle$ حالتی از سیستم اول و $|f\rangle$ حالتی از سیستم دوم است.

۲-۴-۱ حالت خالص درهمتنیده

در همتنیدگی[۹] یک نوع همبستگی کوانتومی را نشان می‌دهد که نظیری در فیزیک کلاسیک ندارد. یک حالت خالص زمانی در همتنیده است که جداپذیر نباشد، یعنی نتوان آن را به صورت یک بردار حاصلضرب $|\psi\rangle = |e,f\rangle = |e\rangle\otimes|f\rangle$ نوشت یعنی:

$$|\psi\rangle \neq |e,f\rangle = |e\rangle\otimes|f\rangle \qquad (۹,۱)$$

[۷] Pure State
[۸] separable
[۹] entanglement

۱–۵ تجزیه اشمیت[۱۰]

با توجه به اینکه در یک فضای برداری، انتخاب پایه منحصر به فرد نیست هر حالت خالص $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ ، بسته به انتخاب پایه، به صورت های گوناگونی بسط داده می شود. اشمیت نشان داده است که می توان پایه‌ی مناسبی پیدا کرد به طوری که در آن تمام ضرایب بسط، حقیقی و مثبت است، یعنی

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{M} a_i \, |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle \tag{۱۰,۱}$$

که در آن . $\sum_{i=1}^{M} a_i = 1 \;,\; a_i \geq 0$

۱–۶ مرتبه اشمیت

تعداد a_i های غیرصفر در تجزیه اشمیت را مرتبه اشمیت[۱۱] گویند. حالتی مانند $|1,0\rangle, |0,0\rangle$ که مرتبه اشمیت آن ۱ باشد، حالت خالص حاصلضربی است. در غیر این صورت، حالت خالص درهمتنیده است. ثابت می شود که تجزیه اشمیت و در نتیجه مرتبه اشمیت یک حالت، منحصر بفرد است.

مثالها:

مثال۱ :حالت $|\psi\rangle = |0,0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ یک حالت خالص حاصلضربی است.

مثال۲ :حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B)$ یک حالت خالص حاصلضربی است.

مثال۳ :حالت های بل، حالت های خالص درهمتنیده هستند.

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \;,\; |\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \tag{۱۱,۱}$$

توجه کنید که به جای ضریب (-1)در $|\psi^-\rangle, |\phi^-\rangle$ می توان از $e^{i\pi}$ استفاده کرد وآن را جزو فاز حالت های مذکور در نظر گرفت.در نتیجه ضرایب اشمیت مثبتند: $a_i > 0$.

[۱۰] Schmidt decomposition
[۱۱] Schmidt rank

مثال۴ :حالت کلی $|\psi\rangle = a_1|01\rangle + a_2|10\rangle$ رادرنظر بگیرید. اگر $a_1 = 0, a_2 = 1$ یا $a_1 = 1, a_2 = 0$ باشد، این حالت یک حالت خالص حاصلضربی است و اگر $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، این حالت یک حالت با درهمتنیدگی بیشینه است. چنین حالتی را حالت کاملاً درهمتنیده می گویند. حالت های بل نمونه ای از حالت های کاملاً درهمتنیده هستند.

۱– ۷ حالت آمیخته

حالت آمیخته حالتی است که نتوان آن را با یک بردار حالت نشان داد. حالت های آمیخته را با یک ماتریس چگالی ρ که یک عملگر مثبت با رد واحد است نشان می دهند.

۱–۸ جداپذیری حالت آمیخته

حالت آمیخته ρ جداپذیر است، اگر بتوان آن را به صورت ترکیب محدبی از حالت‌های خالص حاصلضربی نوشت:

$$\rho = \sum_{i=1}^{K} p_i \, |e_i , f_i\rangle\langle e_i , f_i| \tag{۱۲,۱}$$

که در آن $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$.

حالت‌های آمیخته را درهمتنیده می‌گویند، اگر جداپذیر نباشند.

۱–۹ ماتریس چگالی

ماتریس چگالی برای توصیف حالت یک سیستم به کار می رود و معمولا آن را با ρ نشان می دهند. ماتریس چگالی ρ یک سیستم دو قسمتی، یک عملگر هرمیتی مثبت روی فضای $H = H_A \otimes H_B$ است که بردارهای حالت را به بردارهای حالت دیگر تبدیل می‌کند. همه ویژه مقادیر ρ نامنفی هستند و رد ρ مساوی با ۱ انتخاب می شود. برای ρ فضای کرنل و برد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} k\{\rho\} &= \{|\psi\rangle \in H : \rho|\psi\rangle = 0\} , \\ R\{\rho\} &= \{|\psi\rangle \in H : \exists|\varphi\rangle : \rho|\varphi\rangle = |\psi\rangle\} \end{aligned} \tag{۱۳,۱}$$

کرنل و برد زیر فضاهای H هستند که به ترتیب توسط ویژه بردارهای با ویژه مقادیر صفر و ویژه بردارهای با ویژه مقادیر مخالف صفر پدید می‌آیند. بعد زیر فضای برد را مرتبه[۱۲] ρ می‌گویند.

در فضای $H = H_A \otimes H_B$ می توان عملگر ρ را با استفاده از عملگرهای پایه به صورت زیر بسط داد.

$$\rho = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \, {}_A\langle k| \otimes {}_B\langle l| = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |i, j\rangle\langle k,l| \qquad (۱٤,۱)$$

۱–۱۰ عملگرهای موضعی

عملگرهایی که فقط روی زیر سیستم A یا زیر سیستم B اثر می کنند عملگرهای موضعی نامیده می‌شوند. عملگری که روی کل فضای $H = H_A \otimes H_B$ اثر کند، عملگر غیر موضعی[۱۳] گفته می‌شود. ترانهادجزئی وهمچنین رد جزئی عملگرهای موضعی هستند که درزیر به آن ها می پردازیم.

۱–۱۰–۱ ترانهاد جزئی

ترانهاد جزئی، عملی است که روی یک سیستم مرکب، ترانهاد گیری نسبت به یکی از زیر سیستم‌های آن انجام می‌دهد. به عنوان مثال، با توجه به رابطه (۱–۱۴)، ترانهاد جزئی ρ نسبت به سیستم A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho^{T_A} = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |k\rangle_A \otimes |j\rangle_B \, {}_A\langle i| \otimes {}_B\langle l| \quad , \quad (\rho^{T_A})_{kl}^{ij} = \rho_{il}^{kj}$$

مثبت بودن ترانهاد جزئی عملگر ρ، تحت هر تبدیل یکانی موضعی ناوردا است.

۱–۱۰–۲ رد جزئی[۱۴]

رد جزئی یک حالت از سیستم مرکب همان عمل ردگیری نسبت به یکی از زیر سیستم ها است. ردجزئی یک حالت از سیستم مرکب دو قسمتی نسبت به هر کدام از دو زیرسیستم A یا B ماتریس چگالی مربوط به زیرسیستم دیگر را می‌دهد. به عنوان مثال، ماتریس چگالی مربوط به بردار حاصلضرب خالص $|\psi\rangle = |e, f\rangle$ را در نظر بگیرید:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = (|e\rangle_A \otimes |f\rangle_B)({}_A\langle e| \otimes {}_B\langle f|) = |e\rangle_A \, {}_A\langle e| \otimes |f\rangle_B \, {}_B\langle f|$$

---
۱۲ rank
۱۳ Global
۱٤ Partial Trace

رد جزئی ρ نسبت به زیرسیستم A به صورت زیر است:

$$tr_A(\rho) = {}_A\langle e|e\rangle_A |f\rangle_{B\,B}\langle f| = |f\rangle_{B\,B}\langle f| \equiv \rho_B$$

و رد جزئی آن نسبت به زیرسیستم B به صورت زیر است:

$$tr_B(\rho) = |e\rangle_{A\,A}\langle e| \equiv \rho_A$$

رد جزئی یک حالت خالص دلخواه را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

فرض کنید $|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A |\mu\rangle_B$ تجزیه اشمیت یک حالت خالص دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} a_{i\mu}^* |i\rangle_A |\mu\rangle_{B\;A}\langle i|_B\langle\mu|$$

با فرض اینکه $\{|\nu_B\rangle\}$ پایه های سیستم Bباشد، داریم:

$$\begin{aligned}
\rho_A &= tr_B(\rho) = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_\nu {}_B\langle\nu|\psi\rangle\langle\psi|\nu\rangle_B \\
&= \sum_\nu \sum_{i,\mu} a_{i\mu} a_{i\mu}^*\; {}_B\langle\nu|\mu\rangle_{B\,B}\langle\mu|\nu\rangle_B |i\rangle_{A\,A}\langle i| \\
&= \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2\; {}_B\langle\mu|\underbrace{(\sum_\nu |\nu\rangle_{B\,B}\langle\nu|)}_{\equiv 1_B}|\mu\rangle_B |i\rangle_{A\,A}\langle i| \\
&= \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2\; \underbrace{{}_B\langle\mu|\mu\rangle_B}_{=1} |i\rangle_{A\,A}\langle i| = \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2 |i\rangle_{A\,A}\langle i| \\
&\Rightarrow \rho_A = \sum_i p_i |i\rangle_{A\,A}\langle i|
\end{aligned}$$

که درآن $p_i = \sum_\mu |a_{i\mu}|^2$ است.

مثال: رد جزئی حالت $\rho \equiv |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$ که در آن $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ است، نسبت به دو زیرسیستم A,Bبه صورت $\rho_B = \frac{1}{2}I_2$ و $\rho_A = \frac{1}{2}I_2$ است.

نکته: حالتی که تمام رد های جزئی آن متناسب با ماتریس واحد باشد، کاملاً در همتنیده نامیده می‌شود.

در اینجا لمی را اثبات می کنیم که در فصل بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.