دانشگاه سمنان
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

موضوع:
بکارگیری روش مستقیم جهت حل معادلات ترکیبی فردهلم-ولترا با توابع بلاک پالس دوبعدی

نگارش:
مهدیه غرقابی

استاد راهنما:
دکتر باقر کرامتی

استاد مشاور:
دکترمحمد رضا صافی

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

تشکر و قدردانی

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده‌اند، تشکر نمایم.

بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر باقر کرامتی که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان‌نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته‌ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمدرضا صافی که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر دمیرچی و جناب آقای دکتر نوری که در مقام داور زحمت مطالعه پایان‌نامه را بر عهده داشتند قدرنمایی می‌نمایم.

از زحمات خانواده عزیزم که سربلندی امروزم را مدیون زحمات دیروز آن‌ها می‌دانم، سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه توابع بلاک پالس معرفی می شوند، وسپس با استفاده از این توابع و ماتریس عملیاتی آن به حل معادلات انتگرال خطی ولترای نوع اول و معادلات انتگرال غیرخطی ترکیبی فردهلم-ولترا پرداخته خواهد شد. توابع بلاک پالس و ماتریس عملگر آن، معادله انتگرال نوع اول را به سیستم معادلات خطی خوش وضع متناظر با یک ماتریس پایین مثلثی تبدیل می نماید که می تواند بطور مستقیم حل شود. همچنین در این روش معادلات انتگرال غیر خطی ترکیبی فردهلم-ولترا به یک سیستم معادلات خطی با بسطی از توابع بلاک پالس با ضرایب مجهول تبدیل می شود.

واژه های کلیدی:

معادله انتگرال غیر خطی ترکیبی فردهلم-ولترا، توابع بلاک پالس دو بعدی، ماتریس عملگر

مقدمه

بطور کلی توابع چند جمله ای های متعامد به سه دسته تقسیم می شوند:

دسته اول شامل توابع پایه ای قطعه ای پیوسته می باشند (مانند توابع والش، بلاک پالس و غیره)، دسته دوم از چند جمله ای های پیوسته تشکیل می شوند (مانند چند جمله ای های چبیشف، هرمیت و غیره)، و دسته سوم توابع سینوسی و کسینوسی در سری فوریه است. توابع سینوسی و کسینوسی، یک رده از توابع پایه ای پیوسته را تشکیل می دهند. توابع والش و موجک ها در واقع یک ترکیب خطی از توابع بلاک پالس هستند.

مشخصه اصلی روشهای مبتنی بر توابع متعامد اعم از پیوسته و یا قطعه ای پیوسته ای، تقریب عملگرهای دیفرانسیلی و انتگرالی با استفاده از مفهوم ماتریس های عملیاتی[۱] انتگرال است، بدین گونه که ابتدا پاسخ سیستم بعنوان یک تابع مجهول بر حسب توابع متعامد با ضرایب نامعلوم بسط داده شده و سپس با استفاده از ماتریس عملیاتی، معادلات بیانگر رفتار سیستم به شکل یک دستگاه معادلات جبری خطی یا غیر خطی ظاهر می گردد که با یافتن پاسخ دستگاه جبری مذکور، پاسخ سیستم تعیین می شود.

توابع بلاک پالس یک مجموعه از توابع متعامد با مقادیر ثابت قطعه ای هستند و معمولا بعنوان ابزاری مفید در آنالیز و مسائل دیگری از کنترل و سیستم های دینامیکی استفاده می شوند. این مجموعه از توابع ابتدا در مهندسی الکترونیک توسط هارموث [۲] در سال ۱۹۶۹ بیان شد، بعد از آن چندین محقق در سالهای ۱۹۷۶ و ۱۹۷۷ توابع بلاک پالس و توابع والش و ماتریس عملیاتی انتگرالگیری آنها جهت غلبه بر پیچیدگی عبارات در حل مسائل کنترل مورد بررسی قرار دادند.

---

[۱] Operational matrix

[۲] Harmuth

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع حقیقی $d : X \times X \to R$ که در خواص زیر صدق کند، **متر** یا **فاصله** نامیده می شود.

۱. به ازای هر y, x از X،

$$d(x,y) \geq ۰, d(x,y) = ۰ \Longleftrightarrow x = y$$

۲. به ازای هر y, x از X،

$$d(x,y) = d(y,x)$$

۳. به ازای هر z, y, x از X، نامساوی مثلثی به شکل زیر می باشد:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

تعریف ۲.۱. مجموعه X با متر d را، یک **فضای متریک** گویندو با (X,d) نشان می دهند.

تعریف ۳.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) را **همگرا**[۱] نامند، هرگاه نقطه ای مانند x با خاصیت زیر وجود

[۱]Converge

داشته باشد.

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد، بطوریکه

$$\forall n \geqslant N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

تعریف ۴.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X, d) را یک **دنباله کشی**[۲] نامند، هرگاه

به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند M وجود داشته باشد، بطوریکه برای $n, m \geqslant M$، آنگاه

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

تعریف ۵.۱. فضای متریک (X, d) را **کامل** گویند، هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

تعریف ۶.۱. فرض کنید F میدان R یا C باشد. مجموعه X را یک **فضای خطی** روی F می نامیم هرگاه عمل دوتایی + و یا . از $X \times X$ به X موجود باشد به قسمی که به ازای هر x, y, z از X و α, β از F داشته باشیم:

۱. $x + y = y + x$

۲. $(x + y) + z = x + (y + z)$

۳. عضوی مانند ۰ از X موجود باشد به قسمی که $x + 0 = x$، این عضو را **صفر فضای خطی** می نامیم.

۴. برای هر عضو $x \in X$، عضو منحصر بفرد $-x \in X$ وجود داشته باشد بطوریکه $x + (-x) = (-x) + x = 0 = x + (-)$.

۵. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

۶. $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$

۷. $1.x = x, 0.x = 0$

عمل + را عمل جمع و عمل . را عمل ضرب می نامیم.

تعریف ۷.۱. اگر $F = R$، X را **فضای خطی حقیقی** و اگر $F = C$، X را **فضای خطی مختلط** می نامیم.

تعریف ۸.۱. فرض کنید X یک فضای خطی بر میدان F باشد، تابع $p : X \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$ را یک **شبه نرم**

---

[۲] Cauchy Sequence

گویند هرگاه

۱. به ازای هر x از X،

$$p(\text{۰}) = \text{۰}, p(x) \geq \text{۰}$$

۲. به ازای هر x از Xو هر α از F،

$$p(\alpha x) = |\alpha|.p(x)$$

۳. به ازای هر y, x از X،

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

تعریف ۹.۱. فرض کنید p یک شبه نرم روی فضای خطی X باشد به قسمی که $p(x) = \text{۰}$،$x = \text{۰}$ را نتیجه می دهد، در این صورت p را یک **نرم** می خوانیم و آنرا با $\|.\|$ نشان می دهیم. اگر$\|.\|$ یک نرم بر Xباشد، آنگاه

۱. به ازای هر x از X،

$$\|x\| \geq \text{۰}, \|x\| = \text{۰} \Leftrightarrow x = \text{۰}$$

۲. به ازای هر x از X و هر α از میدان F،

$$\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$$

۳. به ازای هر y, x از X، نامساوی مثلثی به شکل زیر خواهد بود:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

در این صورت X را یک **فضای خطی نرم دار** گویند.

تعریف ۱۰.۱. هرگاه X نسبت به متر$d(x,y) = \|x-y\|$ کامل باشد، فضای نرم دار X را **کامل** می نامیم.

تعریف ۱۱.۱. هر فضای نرم دار کامل را یک **فضای باناخ** [۳] گویند.

[۳] Banach Space

تعریف ۱۲.۱. فضای $\boldsymbol{C}[a,b]$، مجموعه تمام **توابع پیوسته** روی $[a,b]$ می باشد.

تعریف ۱۳.۱. مجموعه $\boldsymbol{C}^m(I)$ با $m \in N$، به عنوان مجموعه ای از توابع پیوسته $U : I \to R$ تعریف شده است که در I، m بار مشتق پذیر پیوسته می باشد.

تعریف ۱۴.۱. عملگر K از فضای خطی X در فضای خطی Y را یک **عملگر خطی** [۴] نامند هرگاه برای اعضای x_1 و x_2 از X و اسکالرهای α و β از R (یاC) داشته باشیم:

$$K(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha K(x_1) + \beta K(x_2)$$

تعریف ۱۵.۱. عملگر خطی $K : X \to Y$ **عملگر معکوس پذیر** نامیده می شود، هرگاه یک عملگر خطی $U : Y \to X$ موجود باشد بطوریکه UK تابعی همانی روی X و KU تابعی همانی روی Y باشد. اگر K معکوس پذیر باشد، تابع Uیکتا و با K^{-1} نشان داده می شود. بعلاوه K معکوس پذیر است اگر و تنها اگر

۱. K یک به یک باشد؛ یعنی از $K\alpha = K\beta$ نتیجه شود $\alpha = \beta$، که در آن اسکالرهای β و α از R (یا C) می باشند.

۲. K پوشا باشد؛ یعنی برد K (تمام) Y باشد.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشند. عملگر خطی $K : X \to Y$ را **کراندار** گویند هرگاه $M > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|K\| = \sup\{\|Kx\|; x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq M$$

تعریف ۱۷.۱. عملگر خطی ϕ با دامنه فضای خطی X و با برد میدان اسکالر Fرا یک **تابعک خطی** [۵]گویند هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in F : \phi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\phi(x_1) + \beta\phi(x_2)$$

[۴] Linear Operator

[۵] Linear Functional

تعریف ۱۸.۱. فرض کنید XوY دو فضای نرمدار باشند، $K : X \to Y$ را **عملگر خطی فشرده** [۶] (یا عملگر خطی بطور کامل پیوسته) می نامیم اگر K خطی باشدو برای هر زیر مجموعه کراندار M از X،تصویر $K(M)$

$$\{K(M)|\|M\|_X \leq ۱\}$$

در Y دارای بستار فشرده باشد.

تعریف ۱۹.۱. فرض می کنیم X فضای خطی نرم دار و $U \neq \emptyset$ زیر فضای X باشد،عملگر خطی $P : X \to U$ با خاصیت

$$\forall u \in U, Pu = u$$

را **عملگر تصویر** [۷] از X به روی U می نامند.

تعریف ۲۰.۱. فرض می کنیم V یک فضای برداری روی C باشد، منظور از یک **ضرب داخلی** روی V نگاشتی مانند $(.,.) : V \times V \to C$ می باشد که به ازای هر $x, y, z \in V$ و $\alpha \in C$ داشته باشیم:

۱. هرگاه $x \neq ۰$, $(x, x) > ۰$

۲. $(x, x) = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$

۳. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$

۴. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

۵. $(x, y) = \overline{(y, x)}$

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید $f, g \in C[a, b]$، در این صورت **ضرب داخلی دو تابع** (f, g) به شکل زیر تعریف می گردد:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$$

[۶] Compact Linear Operator

[۷] Projection Operator

که $\overline{g}$ مزدوج تابع g می باشد.

تعریف ۲۲.۱. فضای ℓ^p بصورت زیر تعریف می گردد که انتگرال موجود در آن به مفهوم انتگرال لبگ است

$$\ell^p = \left\{ f : \int_a^b |f(x)|^p < \infty \right\}$$

بعلاوه، نرم p از f به شکل زیر تعریف می شود:

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{۱}{p}}$$

حالات خاص:

$$p = ۱ \qquad \|f\|_۱ = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$p = ۲ \qquad \|f\|_۲ = (\int_a^b |f(x)|^۲ dx)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$p = \infty \qquad \|f\|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$$

تعریف ۲۳.۱. اگر H یک فضای ضرب داخلی باشد بطوریکه با نرم تعریف شده بصورت

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{۱}{۲}}$$

کامل باشد، آنگاه H یک **فضای هیلبرت** [۸] نامیده می شود.

[۸] Hilbert space

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

در بسیاری ازشاخه های علوم مهندسی مسائلی مطرح می شوند که به معادلات انتگرال منجر می گردند، از جمله می توان به مسائل برق ، الکترومغناطیس ، مخابرات و... اشاره نمود. در معادلات انتگرال تابع زیر علامت انتگرال مجهول می باشد. نام معادلات انتگرال اولین بار توسط بویس-ریموند[۹] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شده است. در عمل اولین بار لاپلاس[۱۰] در سال ۱۷۸۲ تبدیل زیر را برای تابع معلوم $f(t)$ بکار برده است.

$$L(f(t)) = F(s) = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

که در آن اگر تابع $F(s)$ معلوم باشد آنگاه از تبدیل معکوس لاپلاس برای یافتن تابع $f(t)$ استفاده می گردد، به عبارت دیگر $f(t) = L^{-۱}(F(s))$ می باشد. معادله فوق با معلوم بودن $F(s)$ و مجهول بودن $f(t)$ یک معادله انتگرال است. بنابراین چنین به نظر می رسد که معادلات انتگرال اولین بار توسط لاپلاس استفاده شده است.

در جریان پیشرفت ریاضیات، در سال ۱۸۱۱ تبدیلات فوریه[۱۱] در حل مسائل ارتعاشات و حرارت که جزء معادلات با مشتقات جزئی مطرح شده است، تقریبا مشابه تبدیل لاپلاس صورت معادله انتگرال بیان می گردد. در سال ۱۸۲۳ آبل[۱۲]در مسأله خود که به مسأله فیزیکی آبل معروف است، کاربرد معادلات انتگرال را مطرح نمود.

همچنین در سال ۱۸۲۶ پواسون[۱۳]معادله زیر را برای محاسبه تابع $f(t)$ بدست آورده است.

$$f(t) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

که در آن a بقدر کافی بزرگ می باشد.

همچنین در پیشرفت معادلات انتگرال برخی از افراد مشهور به صورت زیر نقش داشته اند.

[۹] Bois-Raymond

[۱۰] Laplace

[۱۱] Fourier

[۱۲] Abel

[۱۳] Poisson

در سال ۱۸۳۲ لیوویل[۱۴] در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال و بعد از وی در سال ۱۸۷۰ نیومن[۱۵] با تبدیل مسأله ی دیریکله به یک معادله ی انتگرالی از دیگر کسانی بودند که نقش مؤثری در تکامل نظریه معادلات انتگرال داشتند.

در سال ۱۸۹۶ پوآنکاره[۱۶] معادله ی انتگرالی را در رابطه با یک معادله ی دیفرانسیل جزیی مطرح کرد. در همان سال دانشمندی از ایتالیا به نام ولترا[۱۷] برای اولین بار نظریه ی عمومی معادلات انتگرال را مطرح نمود. صورت کلی معادله ولترا چنین است:

$$h(t)y(t) = g(t) + \lambda \int_a^t k(s,t)y(s)ds$$

در حدود سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳، ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم[۱۸] دسته ای از معادلات انتگرال خطی بصورت:

$$h(t)y(t) = g(t) + \lambda \int_a^b k(s,t)y(s)ds$$

که حالت خاصی از معادله ولترا می باشد را مطرح کرده و کار وی را کامل نمود. (در دو معادله فوق توابع $g(t)$، $h(t)$، $k(s,t)$و پارامتر λ معلوم اندو تابع $y(s)$ مجهول می باشد.) در ادامه هیلبرت[۱۹] نیز تحقیقاتی در مورد معادله ی انتگرال انجام داده و مسائل معادلات دیفرانسیل را به صورت معادله ی انتگرال ارائه نمود. او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت. یکی از کارهای مهم وی فرموله کردن مسائل مقدار مرزی بصورت یک معادله انتگرالی است.

اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال بکار می رود، اولین بار توسط "هیلبرت" پیشنهاد شد. البته قبل از کارهای هیلبرت، معادلات آبل و لیوویل بصورت های زیر مطرح بود.

آبل در مسأله خود که به مسأله مکانیکی آبل معروف است، کاربرد معادلات انتگرال را در چنین مسائلی مطرح نمود:

---

[۱۴] Liouville

[۱۵] Neuman

[۱۶] Poancare

[۱۷] Volterra

[۱۸] Fredholm

[۱۹] Hilbert

معادله آبل: $g(x)=\int_a^x k(x,y)f(y)dy$

معادله لیوویل: $f(x)=w(x)+\int_a^x k(x,y)f(y)dy$

ارتباط معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال و یا مثالهای دیگر در ریاضی فیزیک، یک تکنیک مهم را جهت حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزیی به وجود آورد که یکی از دستاوردهای مهم مطالعه معادلات انتگرال است.

بعضی مسائل را به صورت معادله انتگرال می توان فرمولبندی کرد، از جمله مسأله جمعیت.

مسأله پیش بینی جمعیت بشر، یکی از روشن ترین مثالهای موجود برای معادلات انتگرال است. از آنجا که جمعیت $n(t)$ در زمان t، وابسته به تعداد جمعیت اولیه، $n(0)=n_0$ باقی مانده تا زمان tو بچه های متولد شده در طی زمان $0<\tau<t$، که تا زمان t زنده مانده اند می باشد. پس اگر جمعیت حاضر در زمان $t=0$، n_0 باشدو $k(t)$ تابع بقاء، نسبت افرادی که تا زمان t زنده مانده اند باشد، (که معمولاً این تابع از جدول های بیمه و بقاء در سازمان های مربوطه استخراج می گردد.) جمعیت باقی مانده، $n_s(t)$ در زمان t عبارتست از:

$$n_s(t)=n_0k(t) \tag{۱.۱}$$

که

$$n_s(0)=n_0k(0)=n_0$$

تحت شرایط نرمال، یک مجموعه پیوسته برای جمعیت، در طی متولدین جدید،وجود دارد. اگر بچه ها در یک آهنگ متوسط $r(t)$ متولد شوند، آنگاه در یک بازه زمانی خاص $\Delta_i\tau$ مربوط به زمان τ_i، می دانیم که $r(\tau_i)\Delta_i\tau$ بچه اضافه شده اند،اگر آنها زنده بمانند در زمان t دارای سن $t-\tau_i$ خواهند بود. اما فقط یک نسبت $k(t-\tau_i)$ از این بچه ها تا سن $t-\tau_i$ زنده خواهند ماند. بنابراین، افزایش نهایی جمعیت در زمان t، از بچه های متولد شده در زمان $\Delta_i\tau$ تا زمان t_i، عبارتست از:

$$k(t-\tau_i)r(\tau_i)\Delta_i\tau$$

اکنون اگر این فرآیند برای همه m زیر بازه زمانی $(۰, t)$ تکرار شود، مجموع جزیی زیر را بدست خواهیم آورد:

$$b_m(t) = \sum_{i=۱}^{m} k(t-\tau_i)r(\tau_i)\Delta_i\tau$$

اگر از تعداد افراد اضافه شده در طول تولدهای جدید، حد گرفته شود وقتی که $m \to \infty$، به انتگرال زیر تبدیل می شود

$$b_m(t) = \int_۰^t k(t-\tau)r(\tau)d\tau \tag{۲.۱}$$

اگر رابطه(۲.۱) به $n_s(t)$ در(۱.۱) (باقی مانده های جمعیت اولیه) اضافه شود، جمعیت کل را در زمان t بصورت زیر بدست می آوریم:

$$n(t) = n_s(t) + b(t) = n_۰k(t) + \int_۰^t k(t-\tau)r(\tau)d\tau \tag{۳.۱}$$

اکنون منطقی است فرض کنیم که آهنگ میزان موالید $r(t) = \frac{dn}{dt}$، متناسب با $n(t)$، تعداد جمعیت حاضر در زمان t است، یعنی:

$$r(t) = \lambda n(t) \tag{۴.۱}$$

از (۳.۱) و (۴.۱) داریم:

$$n(t) = n_۰k(t) + \lambda \int_۰^t k(t-\tau)n(\tau)d\tau$$

که یک معادله انتگرالی ولترا نوع دوم در $n(t)$ با یک هسته تفاضلی $\lambda k(t-\tau)$ است. برای مطالعه بیشتر تاریخچه معادلات انتگرال می توانید به [۱۸، ۱۰، ۴] مراجعه کنید.

۳.۱ هسته های خاص

تعریف ۲۴.۱. هسته $k(x,t)$ را که در شرط $k(x,t)=k(t,x)$ صدق نماید **متقارن** می گویند.

مثال ۱.۳.۱.

$$k(x,t)=(tx)^{2}$$

$$k(x,t)=tan(tx)+cot(t^{2}x^{2})$$

مثال ۲.۳.۱. هسته های زیر نمونه ای از هسته های نامتقارن می باشند.

$$k(x,t)=\frac{Lnxt}{t}$$

$$k(x,t)=sin(xt)cot(t^{2})$$

بعضی معادلات انتگرال که دارای هسته متقارن نمی باشند می توانند به روشی که در زیر به آن اشاره می نماییم به معادله انتگرال با هسته متقارن تبدیل گردند.

معادله انتگرال زیر را در نظر می گیریم:

$$\phi(x)=g(x)+\int_a^b h(x,t)\mu(t)\phi(t)dt,$$

که در آن $h(x,t)=h(t,x)$، همانطور که مشاهده می گردد، معادله دارای هسته متقارن نمی باشد. حال با ضرب طرفین معادله در $\sqrt{\mu(t)}$ خواهیم داشت:

$$u(x)=f(x)+\int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

که در آن

$$u(x)=\sqrt{\mu(x)}\phi(x),$$

$$f(x) = \sqrt{\mu(x)}g(x),$$

$$k(x,t) = \sqrt{\mu(x)}h(x,t)\sqrt{\mu(t)},$$

چون h متقارن است، بنابراین $k(x,t) = k(t,x)$.

تعریف ۲۵.۱. بعضی از معادلات انتگرال دارای هسته هایی به شکل $k(x,t) = k(x-t)$ می باشند. در این حالت انتگرال هایی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)f(t)dt,$$

موسوم به **انتگرال تلفیقی** پدید می آیند.

مثال ۳.۳.۱.

$$k(x,t) = (x-t)^{۵}$$

$$k(x,t) = cos(x-t)$$

تعریف ۲۶.۱. هسته $k(x,t)$ را **جدایی پذیر** نامند هرگاه

$$k(x,t) = \Sigma_{i=۱}^{n} g_i(x)h_i(t),$$

مثال ۴.۳.۱.

$$k(x,t) = xt^{۲} + x^{۲}t$$

$$k(x,t) = e^{i\alpha(x-t)}$$

۴.۱ تعریف و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۲۷.۱. یک **معادله انتگرال،** معادله ایست که در آن تابع مجهول $u(x)$ تحت علامت انتگرال باشد. نمونه ای از یک معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است، بصورت زیر می باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt \qquad (۵.۱)$$

که در آن $f(x)$ تابع معلوم، $k(x,t)$ که تابعی از دو متغیر x و t می باشد را هسته معادله و $\lambda \neq 0$ عددی حقیقی یا مختلط می باشد.

تعریف ۲۸.۱. **معادلات انتگرال خطی** به معادلاتی اطلاق می شود که تابع مجهول تحت علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می شود. شکل کلی این نوع از معادلات بصورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt$$

مثال ۱.۴.۱. معادلات انتگرال زیر مثالی از معادله خطی می باشند:

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 xtu(t)dt$$

$$u(x) = e^x + \lambda \int_a^x cos(xt)u(t)dt$$

تعریف ۲۹.۱. **معادلات انتگرال غیر خطی** به معادلاتی اطلاق می شوند که تابع مجهول تحت علامت انتگرال بصورت غیرخطی ظاهر می شوند. شکل کلی این نوع از معادلات به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t,u(t))dt$$