وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان :
نقاط ثابت چندتابعی‌ها

استاد راهنما :
دکتر شهرام رضاپور

استاد مشاور :
دکتر علیرضا غفاری حدیقه

پژوهشگر :
رباب حملبرانی حقی

اردیبهشت / ۱۳۸۷

تبریز / ایران

بسم اللّٰه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

با استعانت از خداوند متعال که همواره پشتیبان همگان است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر شهرام رضاپور که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.

دکتر علیرضا غفاری حدیقه که در طول این پروژه از راهنماییهای ایشان بهره بردم.

دکتر واعظ پور و دکتر جهانشاهی که داوری این پروژه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

خانواده عزیزم و به خصوص خواهر گرامی‌ام که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند.

برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

رباب حملبرانی حقی

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. یک تابع به فرم $T : X \to 2^Y$ را چندتابعی می‌نامند. $x \in X$ را نقطهٔ ثابت T می‌نامیم هرگاه $x \in Tx$. در این رساله، ردهٔ چندتابعی‌های KKM و S-KKM را در فضاهای برداری توپولوژیک و چندتابعی‌های انقباضی را در فضاهای متریک معرفی و نقاط ثابت آنها را بررسی می‌کنیم. سپس نتایجی را دربارهٔ تقریباً نقاط ثابت و نقاط ثابت تقریبی چندتابعی‌ها ارائه می‌دهیم که تعمیمی از مفهوم نقطه ثابت می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: چندتابعی، KKM نگاشت، تقریباً نقطهٔ ثابت، ε- نقطهٔ ثابت.

پیشگفتار

در سال ۱۹۶۱، قضیهٔ نقطه ثابت Kakutani-Fan-Glisberg توسط Fan بیان شد سپس در سال ۱۹۷۲، Himmelberg به تعمیم نتایج Fan پرداخت و قضیهٔ مشهور خود را اینگونه بیان کرد که هر چندتابعی Kakutani فشرده $T : X \multimap X$ که X زیرمجموعه محدب از فضای محدب موضعی E است نقطه ثابت دارد. این نتیجه نیز بوسیلهٔ Lassonde در سال ۱۹۹۵ در [11] با تعمیم چندتابعی‌های Kakutani به ردهٔ $\mathcal{K}_c$ تعمیم یافت. مقالات [2]، [5] و [8] تعمیم نتایج Lassonde می‌باشد که در فصل دوم به طور مفصّل ذکر شده است. در سعی برای بدست آوردن قضایای نقطه ثابت، در بعضی حالت‌ها، وجود نقطه ثابت تحت شرایط مفروض نتیجه نمی‌شود اما در خلال اثبات متوجه می‌شویم که تابع تقریباً نقطه ثابت دارد. تقریباً نقاط ثابت برخلاف نقاط ثابت به صورت عددی نیز قابل محاسبه هستند و در برخی از حالت‌ها وجود نقطه ثابت غیربدیهی و نامعین است در حالیکه تقریباً نقاط ثابت به آسانی یافت می‌شوند. فصل چهارم به بررسی این موضوع پرداخته است.

قضایای نقطه ثابت تقریبی در سال ۲۰۰۳ با ارائهٔ [16] بیان شد. در مقالهٔ مذکور، در قضیه Kakutani-Fan-Glisberg، در فضاهای با بعد متناهی، شرط فشردگی با شرط کران‌داری جایگزین شده و در قضیه Banach (قضیه ۱.۱.۳) فرض کامل بودن فضا برداشته شده است و قضایای نقاط ثابت تقریبی بدست آمده‌اند. فصل آخر تعمیم نتایج [16] در فضاهای باناخ می‌باشد که در بخش اول روی نواحی کران‌دار و در بخش دوم روی نواحی بی‌کران بحث می‌کند. بخش آخر این فصل نیز مروری بر نقاط ثابت تقریبی در فضاهای متریک می‌باشد. همچنین با استفاده از [11] توانسته‌ایم چند قضیه از [4] را توسعه دهیم و مقاله‌ای در این زمینه([7]) برای چاپ ارسال شده است.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، برخی تعاریف مقدماتی مربوط به چندتابعی‌ها و سایر مفاهیم مرتبط با آن را که در فصل‌های بعدی به کار می‌روند، مطرح می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ برای مجموعهٔ ناتهی Y، 2^Y نمایشگر تمام زیرمجموعه‌های Y و $\langle Y\rangle$ نمایشگر تمام زیرمجموعه‌های متناهی Y است. چندتابعی $T : X \to 2^Y$ یک تابع از مجموعهٔ X بتوی 2^Y است. نماد $T : X \multimap Y$ را برای نمایش چندتابعی T با مقادیر ناتهی به کار می‌بریم. برای $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، تصویر A تحت T را بصورت $T(A) = \bigcup\limits_{x\in A} T(x)$ و تصویر معکوس B تحت T را به صورت $T^{-1}(B) = \{x \in X : T(x) \bigcap B \neq \emptyset\}$ تعریف می‌کنند.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. چندتابعی $T : X \to 2^Y$ را

۱) نیم پیوستهٔ بالایی نامند هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ B از Y، $T^{-1}(B)$ در X بسته باشد.

۲) نیم پیوستهٔ پایینی نامند هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ باز A از Y، $T^{-1}(A)$ در X باز باشد.

۳) فشرده نامند هرگاه $T(X)$ زیر مجموعهٔ یک مجموعه فشرده در Y باشد.

۴) بسته نامند هرگاه نمودار T که به صورت $\mathrm{Gr}(T)=\{(x,y): y\in T(x), x\in X\}$ تعریف می‌شود، زیرمجموعه‌ای بسته از $X\times Y$ باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیکی باشند. چندتابعی نیم پیوستهٔ بالایی $T: X \multimap Y$ را Kakutani نامیم هرگاه T تک مقداری باشد (در این حالت Y فضای توپولوژیک است) یا برای هر $x\in X$، $T(x)\subseteq Y$ فشرده و محدّب باشد (در این حالت Y را به عنوان زیرمجموعهٔ یک فضای برداری توپولوژیک در نظر می‌گیریم).

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{K}$ ردهٔ چندتابعی‌های Kakutani و $\mathcal{K}_c$ ردهٔ ترکیب‌های متناهی از اعضای $\mathcal{K}$ باشد، یعنی $T\in\mathcal{K}_c(X,Y)$ هرگاه

۱) $T: X\multimap Y$؛

۲) $T=T_nT_{n-1}\dots T_1T_0$، که در آن برای $i=0,1,\dots,n$، $T_i\in\mathcal{K}$.

تعریف ۵.۱.۱ برای $n\geq 0$، Δ_n را سادک n- بعدی استاندارد $\mathbb{R}^{n+1}$ (به طور خلاصه، n- سادک) در نظر می‌گیریم، یعنی $\Delta_n=\{(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}: a_i\geq 0, \sum_{i=0}^{n} a_i=1\}$ و $\{e_0,e_1,\dots,e_n\}$ را رئوس Δ_n می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید X زیرمجموعهٔ محدّب از یک فضای برداری و Y فضای توپولوژیک باشد. اگر $T : X \to 2^Y$ و F دو چندتابعی باشند به قسمی که برای هر $A \in \langle X \rangle$، $T(\mathrm{co}(A)) \subseteq F(A)$، آنگاه F را KKM- نگاشت تعمیم‌یافته نسبت به T می‌نامیم. اگر چندتابعی $T : X \to 2^Y$ دارای این ویژگی باشد که برای هر KKM- نگاشت تعمیم‌یافته F نسبت به T، خانوادهٔ $\{\overline{F(x)} : x \in X\}$ ویژگی اشتراک متناهی داشته باشد، گوییم T ویژگی KKM دارد و تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{KKM}(X,Y) = \{T : X \to 2^Y : \text{دارد KKM ویژگی } T\}.$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه و $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. گوییم $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ویژگی اشتراک متناهی دارد هرگاه برای هر عدد طبیعی m و هر $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I$، $K_{\alpha_1} \bigcap \ldots \bigcap K_{\alpha_m} \neq \emptyset$.

۲.۱ همگرایی در تور

تعریف ۱.۲.۱

(a) فرض کنید A یک مجموعه و $\preceq$ یک رابطهٔ دوتایی روی A باشد، $(\mathcal{A}, \preceq)$ را یک مجموعهٔ جهتدار نامیم در صورتی که

۱) $\alpha \preceq \alpha$ برای هر $\alpha \in \mathcal{A}$؛

۲) اگر $\alpha \preceq \beta$ و $\beta \preceq \gamma$، آنگاه $\alpha \preceq \gamma$؛

۳) برای هر $\alpha \in \mathcal{A}$ و $\beta \in \mathcal{A}$، $\gamma \in \mathcal{A}$ چنان موجود است که $\alpha \preceq \gamma$ و $\beta \preceq \gamma$.

(b) فرض کنید $(\mathcal{A}, \preceq)$ یک مجموعه جهتدار و X یک مجموعه باشد. هر تابع مانند $f : \mathcal{A} \to X$ را یک تور در X می‌نامند. اگر $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ و $(\mathcal{A}_1, \preceq)$ یک مجموعه جهتدار باشد، آنگاه

$f_1 = f|_{\mathcal{A}_1} : \mathcal{A}_1 \to X$ را زیرتور f می‌نامند.

همانند گردایه‌ها تور f را با $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ و زیرتورها را با $\{x_{\alpha_j}\}_{j\in\mathcal{A}}$ نمایش می‌دهند.

(c) فرض کنید (X,τ) فضای توپولوژیک و $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ یک تور در X باشد، گوییم تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ همگرا به $x \in X$ است هرگاه برای هر مجموعه باز U که $x \in U$، $b \in \mathcal{A}$ چنان موجود باشد که برای هر $a \in \mathcal{A}$ که $b \preceq a$، $x_\alpha \in U$. در این حالت، می‌نویسیم $x_\alpha \to x$.

مثال ۱.۲.۱ فرض کنید X فضای توپولوژیکی باشد در این صورت، گردایهٔ همهٔ همسایگی‌های نقطه x، با رابطهٔ $U \preceq V$ اگر و تنها اگر $V \subseteq U$، یک مجموعه جهتدار است. همچنین اگر A و B دو مجموعه جهتدار باشند، $A \times B$ با رابطهٔ $(\alpha,\beta) \preceq (\alpha',\beta')$ اگر و تنها اگر $\alpha \preceq \alpha'$ و $\beta \preceq \beta'$، یک مجموعه جهتدار است.

گزاره ۱.۲.۱ اگر X فضای توپولوژیکی، $E \subseteq X$ و $x \in X$ باشد، در این صورت $x \in \overline{E}$ اگر و تنها اگر یک تور در E موجود باشد که به x همگرا باشد.

۳.۱ فضای پیرافشرده و افراز واحد

تعریف ۱.۳.۱ اگر $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$، و $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ دو پوشش برای یک مجموعه باشند، گوییم $\mathcal{W}$ یک تظریف $\mathcal{V}$ است اگر برای هر $\alpha \in A$، $i \in I$ چنان موجود باشد که $W_\alpha \subseteq V_i$. گردایهٔ زیرمجموعه‌های $\{V_i\}_{i\in J}$ از یک فضای توپولوژیکی را موضعاً متناهی گوییم هرگاه هر نقطه یک همسایگی داشته باشد به قسمی که حداکثر متناهی V_i را قطع کند.

تعریف ۲.۳.۱ فضای σ- فشرده و منظم را که لیندلف باشد «پیرافشرده» می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱ یک «افراز واحد» روی مجموعهٔ X، خانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ از توابع می‌باشد که $f_i : X \to [\circ, ۱]$ و برای هر $x \in X$، به جز تعداد متناهی از توابع، بقیه صفر هستند و $\sum\limits_{i\in I} f_i(x) = ۱$.

تعریف ۴.۳.۱ اگر $\mathcal{U}$ پوششی برای مجموعهٔ X باشد، یک افراز واحد را «مطیع پوشش» $\mathcal{U}$ گوییم هرگاه هر تابع در خارج تعدادی از اعضای $\mathcal{U}$ به صفر برسد. برای یک فضای توپولوژیک، یک افراز واحد را «پیوسته» نامیم هرگاه هر تابع پیوسته باشد و موضعاً متناهی نامیم هرگاه هر نقطه یک همسایگی داشته باشد به قسمی که به جز تعداد متناهی، تمام توابع صفر شوند.

تذکر می‌دهیم که اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ افراز موضعاً متناهی مطیع واحد برای پوشش باز $\mathcal{U}$ باشد، آنگاه افراز موضعاً متناهی مطیع واحد برای $\mathcal{U}$ وجود دارد که با اعضای $\mathcal{U}$ اندیس‌گذاری شده است.

۴.۱ قضایا و نتایج مورد نیاز در رساله

قضیه ۱.۴.۱ [۱] فضای هاسدورف X پیرافشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز X، افراز واحد موضعاً متناهی پیوستهٔ مطیع واحد داشته باشد.

قضیه ۲.۴.۱ [۱] هر فضای پیرافشرده، نرمال است.

لم ۱.۴.۱ [۸] (لم KKM) فرض کنید $F_\circ, \ldots, F_n$ زیرمجموعه‌های بستهٔ n- سادک Δ_n باشند. اگر برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی I از $\{\circ, ۱, \ldots, n\}$، $\operatorname{co}\{e_i : i \in I\} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} F_i$، آنگاه $\bigcap\limits_{i=\circ}^{n} F_i \neq \emptyset$.

قضیه ۳.۴.۱ [۱] (Kakutani-Fan-Glisberg) فرض کنید K زیرمجموعهٔ ناتهی، محدّب و فشردهٔ یک فضای هاسدورف محدّب موضعی باشد. فرض کنید $\varphi : K \multimap K$ محدّب - مقدار و نمودار بسته داشته باشد. در این صورت، مجموعه نقاط ثابت φ ناتهی و فشرده است.

گزاره ۱.۴.۱ [۱] فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و فقط اگر برای هر خانواده $\{F_i\}_{i\in I}$ از مجموعه‌های بسته که ویژگی اشتراک متناهی داشته باشد، داشته باشیم $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

قضیه ۴.۴.۱ [۱] فرض کنید X فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده موضعی، K زیرمجموعهٔ فشرده X و $\{U_j\}_{j=۱}^{n}$ پوشش بازی برای K باشد. در این صورت، افراز واحدی برای K با تکیه‌گاه $\{U_j\}_{j=۱}^{n}$ موجود است.

قضیه ۵.۴.۱ [۱] هر مجموعهٔ فشرده در فضای برداری توپولوژیک کران‌دار است.

قضیه ٦.۴.۱ [۱۵] فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک جدایی‌پذیر باشد. اگر $K \subseteq X^*$ به طور ضعیف - ستاره فشرده باشد، آنگاه K با توپولوژی ضعیف - ستاره متریک‌پذیر است.

فصل ۲

قضایای نقطهٔ ثابت برای رده‌های مختلف چندتابعی‌ها

در این فصل، ردهٔ KKm و مجموعه‌های تقریباً محدّب را تعریف می‌کنیم، قضایای نقطه ثابت را برای ردهٔ KKm روی این مجموعه‌ها ثابت می‌کنیم و سپس ردهٔ KKM را به ردهٔ S-KKM توسعه می‌دهیم و قضایای مشابه را بیان می‌کنیم. در نهایت، فضاهای محدّب مجرد را معرفی می‌کنیم و بحث نقطه ثابت را ادامه می‌دهیم.

۱.۲ ردهٔ KKm

در این بخش، مفهوم KKm- نگاشت‌ها و چند پارامتر مرتبط با آن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید X و Y زیرمجموعه‌های فضای برداری E باشند. چندتابعی $F : X \multimap Y$ را KKm- نگاشت می‌نامند هرگاه دارای این ویژگی باشد که برای هر $A \in \langle X \rangle$، $\mathrm{co}(A) \subseteq F(A)$.

توجه کنید که اگر F یک KKm- نگاشت باشد، آنگاه برای هر $x \in X$، $x \in F(x)$.

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنید X و Y دو زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای برداری E باشند. اگر $F : X \multimap Y$ این شرط را داشته باشد که برای هر $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle X \rangle$، $\{y_1, \ldots, y_n\} \in \langle Y \rangle$ چنان موجود باشد که برای هر $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$، $\mathrm{co}\{y_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i \in I} F(x_i)$، آنگاه F را KKm- نگاشت تعمیم‌یافته می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنید E فضای برداری و X مجموعهٔ ناتهی باشد. تابع $\varphi : X \to \mathbb{R}$ را شبه - محدّب (شبه - مقعّر) نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $z \in \mathrm{co}\{x, y\} \bigcap X$، $\varphi(z) \le \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ ($\varphi(z) \ge \min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$).

تذکر ۱.۱.۲ توجّه کنید که هر KKm- نگاشت یک KKm- نگاشت تعمیم‌یافته است (کافی است برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، قرار دهیم $x_i = y_i$). در مثال بعدی نشان می‌دهیم عکس این مطلب برقرار نیست.

مثال ۱.۱.۲ فرض کنید $\varphi : X \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی باشد. چندتابعی $F : X \multimap X$ را به صورت $F(x) = \{y \in X : \varphi(x) \ge \varphi(y)\}$، برای هر $x \in X$، تعریف کنید. در این صورت

۱) F همواره یک KKm- نگاشت تعمیم‌یافته است.

۲) اگر F یک KKm- نگاشت باشد، آنگاه φ شبه - محدّب است. بنابراین اگر φ شبه - محدّب نباشد، F یک KKm- نگاشت نیست.

۱) در واقع، برای هر $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \langle X \rangle$، $y \in X$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\varphi(y) = \min\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\}$. حال برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، قرار دهید $y_i = y$. در این صورت، برای هر $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$، $\{y\} = \mathrm{co}(\{y_i : i \in I\}) \subseteq \bigcup_{i \in I} F(x_i)$. بنابراین F یک KKm- نگاشت

تعمیم‌یافته است.

۲) فرض کنید F یک KKm- نگاشت باشد، $x,y \in X$ و $z \in co\{x,y\}$. در این صورت $z \in \mathrm{co}\{x,y\} \subseteq F(x) \bigcup F(y)$. پس $z \in F(x)$ یا $z \in F(y)$ و لذا $\varphi(z) \leq \varphi(x)$ یا $\varphi(z) \leq \varphi(y)$. به این ترتیب $\varphi(z) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ و در نتیجه φ شبه - محدّب است. حال اگر φ شبه - محدّب نباشد، در این صورت F یک KKm- نگاشت نیست در حالی که KKm- نگاشت تعمیم‌یافته است.

تعریف ۴.۱.۲ فرض کنید X و Y دو زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای برداری E و $T, F : X \multimap Y$ دو چندتابعی باشند. گوییم F یک KKm- نگاشت تعمیم‌یافته نسبت به T است اگر برای هر $A = \{x_۱, \ldots, x_n\} \in \langle X \rangle$، $B = \{y_۱, \ldots, y_n\} \in \langle X \rangle$ چنان موجود باشد که

۱) $\mathrm{co}(B) \subseteq X$؛

۲) برای هر $I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$، $T(\mathrm{co}\{y_i : i \in I\}) \subseteq \bigcup_{i \in I} F(x_i)$.

تعریف ۵.۱.۲ فرض کنید X و Y دو زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای برداری توپولوژیک E باشد. اگر چندتابعی $T : X \multimap Y$ دارای این شرط باشد که برای هر KKm- نگاشت تعمیم‌یافته F نسبت به T، مجموعهٔ $\{\overline{F(x)} : x \in X\}$ ویژگی اشتراک متناهی داشته باشد، گوییم T ویژگی KKm دارد. حال ردهٔ KKm را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{KKm}(X, Y) = \{T : X \multimap Y \ : \ T \text{ ویژگی KKm دارد}\}.$$

اگر $T : X \multimap Y$، برای هر $A \subseteq Y$ فرض کنید $T^u(A) = \{x \in X : T(x) \subseteq A\}$ و $T^l(A) = \{x \in X : T(x) \bigcap A \neq \emptyset\}$. لم بعدی یک لم کلیدی در اثبات بسیاری از قضایا می‌باشد.

لم ۱.۱.۲ فرض کنید X, Y, Z و X_i, Y_i $(i = ۱, ۲)$ فضاهای توپولوژیک باشند و $T : X \multimap Y$.

۱) اگر Y منظم و T نیم پیوستهٔ بالایی با مقادیر بسته باشد، آنگاه T بسته است.

۲) اگر T نیم پیوستهٔ بالایی و با مقادیر فشرده و نیز $S : X \multimap Y$ بسته باشد، آنگاه $T \bigcap S : X \multimap Y$ که به صورت $(T \bigcap S)(x) = T(x) \bigcap S(x)$، برای هر $x \in X$، تعریف می‌شود، نیم پیوستهٔ بالایی است. به ویژه اگر S فشرده و بسته باشد، آنگاه S نیم پیوستهٔ بالایی است.

۳) اگر T نیم پیوستهٔ بالایی با مقادیر فشرده باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعهٔ فشرده A، $T(A)$ فشرده است.

۴) اگر $T : X \multimap Y$ و $S : Y \multimap Z$ نیم پیوستهٔ بالایی باشند، آنگاه $SoT : X \multimap Z$ که به صورت $SoT(x) = \bigcup\limits_{y \in T(x)} S(y)$، برای هر $x \in X$، تعریف می‌شود، نیم پیوستهٔ بالایی است.

۵) اگر $T_i : X_i \multimap Y_i$ $(i = ۱, ۲)$ نیم پیوستهٔ بالایی باشند، آنگاه $T_۱ \times T_۲ : X_۱ \times X_۲ \multimap Y_۱ \times Y_۲$ با ضابطهٔ $(T_۱ \times T_۲)(x_۱, x_۲) = T_۱(x_۱) \times T_۲(x_۲)$، برای هر $(x_۱, x_۲) \in X_۱ \times X_۲$، تعریف می‌شود، نیم پیوستهٔ بالایی است.

برهان. ۱) فرض کنید $(x_\circ, y_\circ) \notin \mathrm{Gr}(T)$. در این صورت $y_\circ \notin T(x_\circ)$ و $T(x_\circ)$ بسته است. چون Y منظم است، مجموعه‌های باز U و V در Y چنان موجودند که $U \bigcap V = \emptyset$، $T(x_\circ) \subseteq U$ و $y_\circ \in V$. از طرفی $U^c \subseteq Y$ بسته است، لذا $T^{-۱}(U^c)$ بسته می‌باشد. $W = (T^{-۱}(U^c))^c$ در X باز است و $x_\circ \in W$. حال ادعا می‌کنیم $W \times V \subseteq (\mathrm{Gr}(T))^c$. فرض کنیم $(a,b) \in W \times V$. در این صورت $a \in W$ و $b \in V$. لذا $T(a) \subseteq U$ و $U \bigcap V = \emptyset$. به این ترتیب، $b \notin T(a)$ و در نتیجه $(a,b) \in (\mathrm{Gr}(T))^c$. بنابراین $(\mathrm{Gr}(T))^c$ در $X \times Y$ باز و لذا $\mathrm{Gr}(T)$ بسته است.

۲) فرض کنید $W \subseteq Y$ باز باشد و $(T \bigcap S)(x_\circ) \subseteq W$. می‌خواهیم همسایگی N از $x_\circ$ را طوری پیدا کنیم که $(T \bigcap S)(N) \subseteq W$. قرار دهید $K = T(x_\circ) \backslash W$. در این صورت، K فشرده است. دو حالت داریم: اگر $K = \emptyset$، آنگاه $N = T^u(W)$. در این صورت $x_\circ \in N$ و اگر $z \in N$، آنگاه $T(z) \subseteq W$. بنابراین $(S \bigcap T)(z) \subseteq W$ و لذا حکم ثابت می‌شود. حال فرض کنید $K \neq \emptyset$. اگر $y \in K$، آنگاه $y \notin (T \bigcap S)(x_\circ)$. چون $y \in T(x_\circ)$، لذا $y \notin S(x_\circ)$. بنابراین، $(x_\circ, y) \notin \mathrm{Gr}(S)$.

چون $\mathrm{Gr}(S)$ بسته است، لذا همسایگی‌های U_y و V_y به ترتیب در X و Y موجودند به طوریکه $y \in V_y$، $x_\circ \in U_y$ و $\mathrm{Gr}(S)\bigcap(U_y \times V_y) = \emptyset$. از طرفی $K \subseteq \bigcup\limits_{y\in K} V_y$ و K فشرده است، لذا $y_1, \ldots, y_n \in K$ چنان موجودند که $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$. قراردهید $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$، $U = T^u(W \bigcup V)$ و $N = U \bigcap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i})$. در این صورت، $[(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}) \times V] \bigcap \mathrm{Gr}(S) = \emptyset$. از آنجا که $T(x_\circ) \subseteq [T(x_\circ)\backslash W] \bigcup W \subseteq V \bigcup W$ و T نیم پیوستهٔ بالایی است، $x_\circ \in U$ و برای هر i، $x_\circ \in U_{y_i}$. پس $x_\circ \in N$ و N باز است. اگر $z \in N$، آنگاه $T(z)\bigcap V = \emptyset$ و $T(z) \subseteq W \bigcup V$. در نتیجه $T(z) \subseteq W$ و لذا $(T\bigcap S)(z) \subseteq W$. بنابراین $(T\bigcap S)(N) \subseteq W$ و لذا حکم ثابت می‌شود. به ویژه اگر S بسته و فشرده باشد، چندتابعی $T : X \multimap Y$ را به صورت $T(x) = \overline{S(X)}$ برای هر $x \in X$، تعریف می‌کنیم. چنانچه A مجموعهٔ باز دلخواهی باشد، مجموعهٔ $\{x \in X : T(x) \subseteq A\}$ یا $\emptyset$ است و یا X. بنابراین T نیم پیوستهٔ بالایی با مقادیر فشرده است و $(T\bigcap S)(x) = S(x)$. لذا S نیم پیوستهٔ بالایی است.

۳) فرض کنید A فشرده باشد. می‌دانیم $T(A) = \bigcup\limits_{x\in A} T(x)$. فرض کنیم $T(A) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ و U_iها در Y باز باشند. چون برای هر x، $T(x)$ فشرده است؛ برای هر $x \in A$ مجموعهٔ متناهی E_x موجود است به قسمی که $T(x) \subseteq \bigcup\limits_{i\in E_x} U_i$. چون T نیم پیوستهٔ بالایی است، هرگاه $V_x = \{x \in X : T(x) \subseteq \bigcup\limits_{i\in E_x} U_i\}$، آنگاه $x \in V_x$، V_x باز است و $T(V_x) \subseteq \bigcup\limits_{i\in E_x} U_i$. از طرفی $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} V_x$. چون A فشرده است، مجموعهٔ متناهی E چنان موجود است که $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in E} V_x$. در نتیجه $T(A) \subseteq \bigcup\limits_{x\in E} T(V_x) \subseteq \bigcup\limits_{x\in E}\bigcup\limits_{i\in E_x} U_i$، پس $T(A)$ فشرده است.

۴) فرض کنید W در Z باز باشد.

$$(SoT)^u(W) = \{x \in X : S(T(x)) \subseteq W\} \qquad (1)$$

$$T^u(S^u(W)) = \{x \in X : S(T(x)) \subseteq S^u(W)\} = \{x \in X : S(T(x)) \subseteq W\} \qquad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲)، $(SoT)^u(W) = T^u(S^u(W))$. چون $S^u(W)$ باز است، لذا $T^u(S^u(W))$ باز و بنابراین $(SoT)^u(W)$ باز است. این نشان می‌دهد که SoT نیم پیوستهٔ بالایی است.