بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۷ /۲/ ۱۱۹۰

۹۶۸۴۸

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان:

یک محک برای حلقه هایی که به طور موضعی ارزیاب هستند و ارائه چند مشخص سازی برای مدولهای انژکتیو محض

استاد راهنما:

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

پژوهشگر:

فریبا لک

شهریورماه ۱۳۸۶

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....
واحد ....

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ خانم فریبا لک دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

یک محک برای حلقه‌هایی که به طور موضعی ارزه هستند و ارائهٔ چندمشخص سازی برای مدولهای انژکتیو محض

در روز سه‌شنبه مورخ ۸۶/۶/۲۷ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون هیجده تمام (۱۸/۰۰) می‌باشد.

۱- عالی ☒
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیرقابل قبول ☐

استادراهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده	دکتر سیداحمد موسوی	دکتر حسین ذاکری

جواد لالی
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

تقدیر و تشکر

بر خود لازم می دانم از استاد محترم جناب آقـا ی دکتـر طـاهری زاده کـه بنده را در تهیه و تدوین این تحقیق راهنمـایی کردنـد و همچنـین از داوران محترم جناب آقا ی دکتر ذاکر ی و جنـاب آقـا ی دکتـر موسـوی صـمیمانه تشکر کنم.

فریبا لک

شهریور ۸۶

تقدیم به

همسرفداکار

و

فرزندان عزیزم یاسمین و نغمه

۱

چکیده

فرض کنیم R حلقهٔ جابجایی و یکدار است و تمامی مدولها یکانی فرض می شوند. $R-$ تکریختی $f : M \to N$ محض است اگر به ازای هر $R-$ مدول مانند L، نگاشت $f \otimes Id_L : M \otimes_R L \to N \otimes_R L$ یک به یک باشد. همچنین $R-$ مدول D انژکتیو محض است اگر به ازای هر تکریختی محض مانند $f : M \to N$ همریختی القایی $Hom_R(N, D) \to Hom_R(M, D)$ پوشا باشد. هدف ما در این پایان نامه ارائه چند مشخص سازی از مدولهای انژکتیو محض است و رابطهٔ مدولهای انژکتیو محض با مدولهای متناهی نشاندنی، مدولهای آرتینی و خانواده‌ای از $R-$ جبرها که به عنوان $R-$ مدول متناهی نمایش هستند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در ادامه نشان می دهیم اگر $R-$ مدول D انژکتیو محض باشد آنگاه D با جمعوند مستقیمی از ضرب مستقیم یک خانواده از مدولهای متناهی نشاندنی یکریخت است. همچنین نشان می دهیم روی یک حلقهٔ نوتری، D، انژکتیو محض است اگر و تنها اگر D با جمعوند مستقیمی از ضرب مستقیم یک خانواده از مدولهای آرتینی یکریخت باشد. بعلاوه ثابت می شود D انژکتیو محض است اگر و تنها اگر یک خانواده از $R-$ جبرها مانند $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ که به عنوان $R-$ مدول متناهی نمایش هستند موجود باشد بطوریکه D با جمعوند مستقیمی از یک مدول به شکل $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ یکریخت است که در آن به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، E_λ یک $T_\lambda-$ مدول انژکتیو می باشد.

همچنین قضایایی چند از دنباله های $S-$ محض، مدولهای $S-$ محض انژکتیو، $S-$ محض پروژکتیو مطرح می شود و با معرفی حلقه‌های ارزیاب و دامنه پروفر نشان می دهیم دامنه R پروفر است اگر و تنها اگر دو کلاس از سه کلاس مدولهای $RD-$ انژکتیو، $CP-$ انژکتیو و انژکتیو محض بر هم منطبق شوند.

کلمات کلیدی:

انژکتیو محض، پروژکتیو محض، به طورمتناهی هم تولید شده، متناهی نشاندنی، هم دوری، $RD-$ پروژکتیو، $RD-$ انژکتیو، $CP-$ انژکتیو، $CP-$ پروژکتیو.

فهرست مندرجات

مقدمه

در سراسر این پایان نامه R حلقهٔ جابجایی و یکدار و تمام مدولها یکانی فرض می شوند. دنبالهٔ دقیق $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ را محض گوییم هرگاه به ازای هر $R-$ مدول مانند N، دنبالهٔ $0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$ دقیق باشد. همچنین $R-$ مدول I را انژکتیو محض گوییم هرگاه به ازای هر دنبالهٔ دقیق مجض مانند $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ نگاشت القایی $Hom_R(M,I) \to Hom_R(M',I)$ پوشا باشد.

در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی اشاره شده است که مطالب این بخش عمدتاً برگرفته از [۴]، [۱۰] و [۱۵] می باشد.

در فصل دوم برخی مدولهای خاص از جمله مدولهای متناهی نشاندنی، به طور متناهی هم تولید شده، هم دوری، خارج قسمتی متناهی نشاندنی، انژکتیو محض معرفی می گردند و دو مشخصه از مدولهای انژکتیو محض ارائه می شود. مطالب این بخش عمدتاً برگرفته از [۱]، [۶]، [۸] و [۱۵] می باشد. همچنین فیلترها، حلقه‌های کامل، حلقه های موضعی و $R-$ جبرها معرفی می گردند و رابطه مدولهای انژکتیو محض با $R-$ جبرها و مدولهای آرتینی مورد بررسی قرار می گیرد. در ادامه نشان می دهیم اگر $R-$ مدول D انژکتیو محض باشد آنگاه D با جمعوند مستقیمی از ضرب مستقیم یک خانواده از مدولهای متناهی نشاندنی یکریخت است. همچنین نشان می دهیم روی یک حلقهٔ نوتری D انژکتیو محض است اگر و تنها اگر D با جمعوند مستقیمی از ضرب مستقیم یک خانواده از مدولهای آرتینی یکریخت باشد. بعلاوه ثابت می شود D انژکتیو محض است اگر و تنها اگر یک خانواده از $R-$ جبرها مانند $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ که به عنوان R مدول متناهی نمایش هستند موجود باشد بطوریکه D با جمعوند مستقیمی از یک مدول به شکل $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ یکریخت باشد که در آن به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، E_λ یک $T_\lambda-$ مدول انژکتیو است. مطالب این بخش عمدتاً برگرفته از [۲]، [۳]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] می باشد.

در فصل سوم به معرفی مدولهای $S-$ محض انژکتیو، $S-$ محض پروژکتیو، $RD-$ انژکتیو، $RD-$ پروژکتیو، $CP-$ انژکتیو، $CP-$ پروژکتیو، حلقه های ارزیاب و دامنهٔ پروفر می پردازیم و رابطهٔ آنها را مشخص می کنیم. همچنین نشان می دهیم دامنه R پروفر است اگر و تنها اگر دو کلاس از سه کلاس مدولهای $RD-$ انژکتیو، $CP-$ انژکتیو

و انژکتیو محض بر هم منطبق شوند. مطالب این بخش عمدتاً برگرفته از [۵]، [۷]، [۹]، [۱۶]، [۱۷] و [۱۸] می باشد. در این پایان نامه مقالات زیر مورد بررسی قرار گرفته است:

[1] K. Divani-Aazar, M.A. Esmkhani and M. Tousi, *Two characterizations of pure injective modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 34, (2006), N. 10, 2817-2822.

[2] K. Divani-Aazar, M.A. Esmkhani and M. Tousi, *A criteroin for rings which are locally valuation*, ArXiv:Math. Ac\0702372v1.

فصل ۱

محض بودن

۱.۱ دستگاه معادلات در مدولها

تعریف ۱.۱.۱ [۴] معادله در مدول . فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد، یک معادله در مدول M عبارت است از $r_1x_1 + ... + r_nx_n = c$، به قسمی که x_i ها مجهول می باشند، $r_1, ..., r_n \in R$ و $c \in M$. یک جواب این معادله در M دنبالهٔ $b_1, ..., b_n \in M$ می باشد، بطوریکه $r_1b_1 + ... + r_nb_n = c$ و می نویسیم $x_1 = b_1, ..., x_n = b_n$.

تعریف ۲.۱.۱ [۴] دستگاه معادلات[۱] در مدول . فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد، $j \in J$، $c_j \in M$ و $r_{ij} \in R$. در این صورت؛

$$\sum_{i\in I} r_{ij}x_i = c_j \quad (j \in J) \qquad (I)$$

را دستگاه معادلات در M با مجهولات $\{x_i : i \in I\}$ می نامیم. در صورتیکه $\sum_{i\in I} r_{ij}b_i = c_j(j \in J)$، آنگاه $\{b_i \in M : i \in I\}$ یک جواب در M است. در این حالت گوییم $x_i = b_i \in M(i \in I)$ یک جواب از دستگاه معادلات (I) است و آن را جواب عمومی [۲]

[۱] System of equations
[۲] Global solution

می نامیم.

۲.۱ دنباله‌های دقیق محض و مدولهای پروژکتیو محض

تعریف ۱.۲.۱ [۴] فرض کنیم N یک $R-$ مدول و M یک زیرمدول از N باشد. گوییم M یک زیرمدول محض [1] از N است اگر برای هر دستگاه مانند $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j \in M(j = 1, ..., m)$ از معادلات در M، که در N قابل حل است در M نیز قابل حل باشد.

تعریف ۲.۲.۱ [۴] $R-$ مدول M را متناهی نمایش [2] گوییم اگر یک $R-$ مدول آزاد [3] متناهی مولد [4] مانند F و یک زیرمدول متناهی مولد از F مانند G موجود باشد بطوریکه داشته باشیم؛ $M \cong \frac{F}{G}$. $R-$ مدول متناهی نمایش M را با نماد

$$M =< y_1, ..., y_n | \sum_{i=1}^{n} r_{ij}y_i = 0, r_{ij} \in R, j = 1, ..., m >$$

نیز می توان نشان داد.

تعریف ۳.۲.۱ [۴] دنبالهٔ دقیق $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to C \to 0$ دقیق محض است اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد.

۱) به ازای هر مدول متناهی نمایش مانند M، نگاشت القایی $Hom_R(M, B) \to Hom_R(M, C)$ پوشا باشد.

۲) به ازای هر مدول متناهی نمایش مانند U، نگاشت $\alpha \otimes I : A \otimes_R U \to B \otimes_R U$ یک به یک باشد.

۳) به ازای هر مدول مانند U، نگاشت $\alpha \otimes I : A \otimes_R U \to B \otimes_R U$ یک به یک باشد.

۴) $\alpha(A)$ زیرمدول محضی از B باشد.

---

[1] Pure
[2] Finitely presented
[3] Free
[4] Finitely generated

تعریف ۴.۲.۱ $R-$ تکریختی $f: M \to N$، محض نامیده می شود هرگاه به ازای هر $R-$ مدول مانند L نگاشت $f \otimes Id_L : M \otimes_R L \to N \otimes_R L$ تکریختی باشد.

نتیجه ۱.۲.۱ [۴, ۲.۲.۱۸] ۱) زیرمدول صفر در N محض است.
۲) N زیرمدول محض از N است.
۳) جمعوندهای مستقیم زیرمدول محض هستند.
۴) فرض کنیم N یک $R-$ مدول ثابت باشد. اگر $\phi = \{M_\alpha\}$ یک زنجیر از زیرمدولهای محض در N باشد، آنگاه $\cup\phi = \cup_\alpha M_\alpha$ زیرمدول محض از N است.
۵) اگر $\{H_\alpha\}$ یک زنجیر از مدولها و D برای هر α، زیرمدول محض از H_α باشد آنگاه D زیرمدول محض از $\cup H_\alpha$ است.
٦) خاصیت تعدی در زیرمدولهای محض برقرار است. یعنی اگر $P < M < N$ و P زیرمدول محض از M و M زیرمدول محض از N باشد آنگاه P زیرمدول محض از N است.
۷) خاصیت موروثی[۱]: فرض کنیم $P < M < N$، اگر M زیرمدول محض از N باشد آنگاه $\frac{M}{P}$ زیرمدول محض از $\frac{N}{P}$ است.
۸) عکس جزئی موروثی[۲]: فرض کنیم $P < M < N$، اگر P زیرمدول محض از N و $\frac{M}{P}$ زیرمدول محض از $\frac{N}{P}$ باشد، M زیرمدول محض از N است.

برهان. (۱). فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = 0$ یک دستگاه معادلات باشد که یک جواب در N دارد. باید نشان دهیم که یک جواب در صفر دارد. بدیهی است که صفر جواب این دستگاه است.
(۲). فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j \in N (j = 1, ..., m)$ یک دستگاه معادلات در N باشد که یک جواب در N دارد. بدیهی است که N زیرمدول محض از N است.
(۳). فرض کنیم $N = M \oplus K$. می خواهیم نشان دهیم که M زیرمدول محض از N است. فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j \in M (j = 1, ..., m)$ یک دستگاه معادلات در M باشد و

[۱] Hereditary
[۲] Partial converse of hereditary

$a_1,\dots,a_n$ متعلق به N جواب دستگاه فوق باشد. پس به ازای هر i، $a_i = b_i + c_i$ بطوریکه $b_i \in M$ و $c_i \in K$. در نتیجه؛

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}a_i}_{\in M} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}b_i}_{\in M} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}c_i}_{\in K}$$

بنابراین $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}c_i \in M \cap K = \{0\}$ و $b_1,\dots,b_n$ جواب دستگاه معادلات در M می باشد.

(۴). چون $\phi = \{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک زنجیر است پس برای هر α و β متعلق به I داریم؛ $M_\alpha < M_\beta$ یا $M_\beta < M_\alpha$. فرض کنیم دستگاه معادلات $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j \in \cup M_\alpha (j = 1,\dots,m)$ یک جواب مانند $x_i = b_i \in N (i = 1,\dots,n)$ داشته باشد. پس برای هر $j = 1,\dots,m$، α_j موجود است بطوریکه $c_j \in M_{\alpha_j}$. بنابراین؛

$$\sum r_{ij}x_i = c_j \in M_{\alpha_j} \quad , \quad M_{\alpha_j} < N (j = 1,\dots,m)$$

با استقرا روی m، می توان ثابت کرد $\gamma \in I$ موجود است بطوریکه برای هر $j = 1,\dots,m$، $M_{\alpha_j} \leq M_\gamma$. بنابراین دستگاه $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j (j = 1,\dots,m)$ متعلق به M_γ است. پس یک جواب در M_γ دارد و بنابراین یک جواب در $\cup M_\alpha$ دارد.

(۵). فرض کنیم دستگاه $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = d_j \in D (j = 1,\dots,m)$ یک جواب مانند $a_i \in \cup_\alpha H_\alpha (i = 1,\dots,n)$ داشته باشد. در این صورت برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، α_i موجود است بطورریکه $a_i \in H_{\alpha_i}$ پس $\gamma \in I$ موجود است بطوریکه $a_1,\dots,a_n \in H_\gamma$. اما D زیرمدول محض از H_α است پس دستگاه فوق یک جواب در D دارد.

(٦). هر دستگاه معادلات از P که در N جواب داشته باشد را می توان به عنوان یک دستگاه معادلات از M درنظر گرفت که این دستگاه طبق فرض در M یک جواب دارد و مجدداً با استفاده از فرض چون P زیرمدول محض از M است نتیجه می گیریم که این دستگاه یک جواب در P دارد. پس P زیرمدول محض از N است.

(۷). فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j + P \in \frac{M}{P} (j = 1,\dots,m)$ یک دستگاه معادلات در $\frac{M}{P}$ باشد که یک جواب مانند $x_i = b_i + P \in \frac{N}{P} (i = 1,\dots,n)$ دارد. لذا برای $1 \leqslant j \leqslant m$، $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}b_i + P = c_j + P$ پس $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}b_i - c_j \in P$. بنابراین $p_j \in P$ موجود است بطوریکه

$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}b_i - c_j = p_j$ و $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}b_i = c_j + p_j \in M$. یک دستگاه معادلات در M به شکل $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j + p_j$ یک جواب مانند $x_i = b_i \in N$ دارد و چون M زیرمدول محض از N است پس یک جواب مانند $x_i = a_i \in M(i = 1, ..., n)$ دارد. پس $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(a_i+P) = c_j+P$ و $x_i = a_i + P \in \frac{M}{P}$ یک جواب از دستگاه معادلات $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = c_j + P(j = 1, ..., m)$ در $\frac{M}{P}$ است.

(۸). فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = d_j \in M(j = 1, ..., m)$ یک دستگاه معادلات در M باشد که یک جواب مانند $x_i = c_i \in N(i = 1, .., n)$ دارد. هر دستگاه معادلات در مدول $\frac{M}{P}$ یک جواب مانند $x_i = c_i + P \in \frac{N}{P}(i = 1, ..., n)$ دارد و بنابراین یک جواب مانند $x_i = b_i + P(i = 1, ..., n)$ در $\frac{M}{P}$ دارد یعنی $b_i \in M$. پس $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}b_i = d_j + p_j$ که در آن $p_j \in P$، همچنین $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(b_i - c_i) = p_j(j = 1, ..., m)$ نشان می دهد که دستگاه $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = p_j$ از معادلات P جوابی مانند $x_i = b_i - c_i \in N(i = 1, ..., n)$ دارد. پس دستگاه معادلات یک جواب مانند $x_i = a_i \in P$ دارد یعنی $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}a_i = p_j(j = 1, ..., m)$. پس $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(b_i - a_i) = d_j(j = 1, ..., m)$ و $x_i = b_i - a_i \in M$ یک جواب عمومی در M است.

تعریف ۵.۲.۱ [۴, ۳.۲.۱۸] ۱) فرض کنیم $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ یک دنبالهٔ دقیق از $R-$ مدولها و $R-$ همریختی ها باشد. مدول P نسبت به این دنباله پروژکتیو است اگر به ازای هر همریختی مانند $f : P \to C$ یک همریختی مانند $g : P \to B$ موجود باشد بطوریکه $f = \beta g$.

۲) $R-$ مدول P پروژکتیو محض[1] است اگر نسبت به هر دنبالهٔ دقیق محض، رابطهٔ پروژکتیو داشته باشد.

۳) هر مدول پروژکتیو، پروژکتیو محض است.

گزاره ۱.۲.۱ [۴, ۶.۲.۱۸] هر $R-$ مدول مانند M، با حد مستقیم[2] مدولهای متناهی نمایش یکریخت است.

---

[1] Pure projective

[2] Direct limit

قضیه ۱.۲.۱ [۴, ۷.۲.۱۸] دنبالهٔ دقیق کوتاه ازR− مدولها مانند $0 \to A \to B \to C \to 0$ دقیق محض است اگر و تنها اگر هر R− مدول متناهی نمایش مانند M، خاصیت پروژکتیو در رابطه با این دنباله داشته باشد. یعنی برای هر $f: M \to C$، $g: M \to B$ موجود باشد بطوریکه دیاگرام زیر جابجا شود:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & & M \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

برهان.($\Longleftarrow$). بدون آنکه به کلیت برهان خللی وارد شود فرض کنیم $A \subset B$. فرض کنیم $M =< y_1, ..., y_n | \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i = 0 : j = 1, ..., m >$ یک مدول متناهی نمایش باشد. لذا R− مدول آزاد متناهی مولد F و زیرمدول متناهی مولد از F مانند G موجود است بطوریکه $M \cong \frac{F}{G}$ که در آن اگر همریختی $\phi : F \to M$ مفروض باشد، با قراردادن $Ker\phi = G$، $\psi : \frac{F}{G} \to M$ یکریختی موردنظر است. پس برای هر $1 \leq i \leq n$، $y_i \in M$ و $f(y_i) \in C$.
اما چون β یک R− همریختی پوشا است پس به ازای هر $f(y_i) \in C$، $b_i \in B$ وجود دارد بطوریکه $\beta(b_i) = f(y_i)$. بنابراین برای هر $1 \leq j \leq m$، $\sum_{i=1}^n r_{ij} f(y_i) = \sum_{i=1}^n r_{ij} \beta(b_i)$ و در نتیجه؛

$$\underbrace{f(\sum_{i=1}^n r_{ij} y_i)}_{0} = \beta(\sum_{i=1}^n r_{ij} b_i)(j = 1, ..., m)$$

پس $\sum_{i=1}^n r_{ij} b_i \in Ker\beta = Im\alpha$ لذا $a_j \in A$ وجود دارد بطوریکه $\sum_{i=1}^n r_{ij} b_i = a_j \in A$.
پس دستگاه متناهی $\sum_{i=1}^n r_{ij} x_i = a_j (1 \leq j \leq m)$ از معادلات در A یک جواب مانند $x_i = b_i \in B$ دارد. از آنجا که A زیرمدول محض از B است پس دستگاه یک جواب مانند $x_i = z_i \in A$ دارد. پس $\sum_{i=1}^n r_{ij} z_i = a_j (j = 1, ..., m)$ و در نتیجه؛

$$\sum_{i=1}^n r_{ij}(b_i - z_i) = 0 (j = 1, ..., m) \qquad (I)$$

حال همریختی $g: M \to B$ را با ضابطهٔ $g(y_i) = b_i - z_i (i = 1, ..., n)$ تعریف می کنیم و نشان می دهیم g خوش تعریف است.

$$\begin{array}{ccccccc} \circ \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to \circ \\ & & & \uparrow & & \uparrow f & \\ & & & \frac{F}{Ker\phi} & \xleftarrow{\psi^{-1}} & M & \end{array}$$

که در آن؛

$$M \to \frac{F}{Ker\phi} \to B$$
$$y_i \mapsto e_i + Ker\phi \mapsto b_i - z_i$$

همچنین؛

$$Ker\phi = < l_1, ..., l_m >, l_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}e_i \quad (j = 1, ..., m)$$
$$\phi(l_j) = \circ = \phi(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}e_i) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}y_i \quad (j = 1, ..., m)$$

برای خوش تعریفی باید نشان دهیم؛

$$\sum_{i=1}^{n} s_ie_i + Ker\phi = Ker\phi \overset{?}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} s_i(b_i - z_i) = \circ$$

اگر $\sum_{i=1}^{n} s_ie_i + Ker\phi = Ker\phi$ پس $\sum_{i=1}^{n} s_ie_i \in Ker\phi$. همچنین؛

$$\sum_{i=1}^{n} s_ie_i = \sum_{j=1}^{m} t_j \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}e_i)}_{l_j} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}t_j)e_i$$

در نتیجه $s_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}t_j (i = 1, ..., n)$ از طرفی طرف دوم رابطهٔ بالا به صورت زیر می باشد:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(b_i - z_i) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}t_j)(b_i - z_i) = \sum_{j=1}^{m}(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(r_{ij}(b_i - z_i))}_{\circ}t_j) = \circ$$

پس g خوش تعریف است و $g(y_i) = b_i - z_i \in B$. پس $\beta(g(y_i)) = \beta(b_i - z_i) = f(y_i)$ در نتیجه $\beta g = f$.

($\Longrightarrow$). دستگاه معادلات $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}x_i = a_j \in A (j = 1, ..., m)$ را درنظر می گیریم. فرض کنیم $b_1, ..., b_n \in B$ یک جواب دستگاه در B باشد. $G = < \sum_{i=1}^{n} r_{i1}e_i, ..., \sum_{i=1}^{n} r_{in}e_i >$، $M = < y_1, ..., y_n | \sum_{i=1}^{n} r_{ij}y_i = \circ : j = 1, ..., m >$، $M = \frac{F}{G}$ و $y_i = e_i + G$ که در آن $1 \leq i \leq n$. به راحتی می توان نشان داد $f : M \to C$ با ضابطهٔ $f(y_i) = \beta(b_i)$ خوش

تعریف است. فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} s_i y_i = 0$ در نتیجه $\sum_{i=1}^{n} s_i(e_i + G) = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} s_i e_i \in G$.
همچنین؛

$$\sum_{i=1}^{n} s_i e_i = \sum_{j=1}^{m} t_j (\sum_{i=1}^{n} r_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} r_{ij} t_j) e_i$$

در نتیجه $s_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} t_j$. داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} s_i \beta(b_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} r_{ij} t_j) \beta(b_i) &= \beta(\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} r_{ij} t_j) b_i) \\ &= \beta(\sum_{j=1}^{m} t_j (\sum_{i=1}^{n} r_{ij} b_i)) = 0\end{aligned}$$

پس طبق فرض $g : M \to B$ موجود است بطوریکه $\beta g = f$. لذا برای هر $1 \leq i \leq n$، $\beta g(y_i) = f(y_i) = \beta(b_i)$ بنابراین $\beta(g(y_i) - b_i) = 0$ پس $g(y_i) - b_i \in A$. همچنین؛

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} g(y_i) = g(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} y_i) = g(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} (e_i + G)) = g(0) = 0 (j = 1, ..., m)$$
$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} (g(y_i) - b_i) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} g(y_i) - \sum_{i=1}^{n} r_{ij} b_i = -a_j (j = 1, ..., m)$$

پس $\sum_{i=1}^{n} b_i - g(y_i)$ جواب دستگاه در A می باشد.

نتیجه ۲.۲.۱ [۴, ۸.۲.۱۸] مدولهای زیر پروژکتیو محض هستند.
۱) مدولهای پروژکتیو.
۲) مدولهای متناهی نمایش.
۳) جمع مستقیم مدولهای متناهی نمایش.
۴) جمعوند مستقیم از مدولهای متناهی نمایش.

برهان.(۱). چون هر دنبالهٔ دقیق محض ، دقیق می باشد اگر یک مدول پروژکتیو باشد نسبت به هر دنبالهٔ دقیق محض نیز خاصیت پروژکتیو دارد پس پروژکتیو محض می باشد.
(۲). بنا بر قضیهٔ ۱.۲.۱ هر مدول متناهی نمایش، پروژکتیو محض نیز می باشد.
(۳) و (۴). کافی است نشان دهیم $\oplus_{i\in I} P_i$ پروژکتیو محض است اگر و تنها اگر به ازای هر $i \in I$، P_i پروژکتیو محض باشد.

($\Longleftarrow$). $i \in I$ دلخواه است، ثابت می کنیم P_i پروژکتیو محض است. بدین منظور دیاگرام زیر را با سطر دقیق محض در نظر می گیریم؛

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P_i \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

لذا دیاگرام زیر را داریم که در آن $\pi_i : \oplus P_i \to P_i$، $R-$ برور یختی است.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & \oplus P_i \arrow[u, "f\pi_i"'] \arrow[ul, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

$\oplus_{i\in I} P_i$ پروژکتیو محض است لذا $R-$ همریختی $\phi : \oplus_{i\in I} P_i \to M$ موجود است بطوریکه دیاگرام را جابجا می کند یعنی $g\phi = f\pi_i$. فرض کنیم $\lambda_i : P_i \to \oplus_{i\in I} P_i$، $R-$ تکریختی باشد در این صورت $\phi\lambda_i = \phi_i : P_i \to M$ یک $R-$ همریختی است و چون $g\phi_i = g\phi\lambda_i = f\pi_i\lambda_i = f$ دیاگرام داده شده را جابجا خواهد کرد پس P_i پروژکتیو محض است.

($\Longrightarrow$). دیاگرام زیر که سطر آن دقیق محض است را درنظر می گیریم؛

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & \oplus P_i \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

فرض کنیم $\lambda_i : P_i \to \oplus_{i\in I} P_i$، $R-$ تکریختی باشد. آنگاه به ازای هر $i \in I$ دیاگرام زیر که سطر آن دقیق محض است را خواهیم داشت؛

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P_i \arrow[u, "f\lambda_i"'] & \end{tikzcd}$$

چون برای هر $i \in I$، P_i پروژکتیو محض است، پس به ازای هر i، $R-$ همریختی $\phi_i : P_i \to M$ موجود است که دیاگرام زیر را جابجا می کند.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{g} & N & \to & 0 \\ & \nwarrow^{\phi_i} & \uparrow^{f\lambda_i} & & \\ & & P_i & & \end{array}$$

لذا $R-$ همریختی منحصر بفرد $\phi : \bigoplus_{i\in I} P_i \to M$ موجود است بطوریکه برای هر $i \in I$ دیاگرام زیر را جابجا می کند؛

$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{\lambda_i} & \bigoplus_{i\in I} P_i \\ \downarrow^{\phi_i} & \swarrow^{\phi} & \\ M & & \end{array}$$

یعنی $\phi\lambda_i = \phi_i$. در نتیجه برای هر $i \in I$، $f\lambda_i\pi_i = g\phi_i\pi_i = g\phi\lambda_i\pi_i$. پس $g\phi = f$ یا $\sum_{i\in I} g\phi\lambda_i\pi_i = \sum_{i\in I} f\lambda_i\pi_i$. لذا $R-$ همریختی $\phi : \bigoplus_{i\in I} P_i \to M$ دیاگرام زیر

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{g} & N & \to & 0 \\ & \nwarrow^{\phi} & \uparrow^{f} & & \\ & & \bigoplus_{i\in I} P_i & & \end{array}$$

را جابجا می کند. پس $\bigoplus_{i\in I} P_i$ پروژکتیو محض است.

گزاره ۲.۲.۱ [۴, ۹.۲.۱۸] به ازای هر $R-$ مدول A، یک دنبالهٔ دقیق محض مانند $0 \to K \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \to 0$ وجود دارد بطوریکه F جمع مستقیمی از مدولهای متناهی نمایش و K یک زیرمدول محض از F است.

برهان. فرض کنیم S یک کلاس از $R-$ مدولهای متناهی نمایش باشد و S^* یک زیرکلاس از S ، یک مجموعه است با این خاصیت که به ازای هر $M \in S$، $N \in S^*$ وجود دارد بطوریکه $M \cong N$. کافی است نشان دهیم که F جمع مستقیم از اعضای S می باشد. قرار می دهیم؛

$$\Lambda = \{(M, f) : M \in S^*, f \in Hom(M, A)\}$$

و به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، M و f نظیر آن را با M_λ و f_λ نشان می دهیم. تعریف می‌کنیم: