بسم الله الرحمن الرحيم

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب **جلال یادپار** معتهد میشوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است .این پایان نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است .در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی میباشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: جلال یادپار

امضاء

تهران – لویزان – کدپستی ۱۶۷۸۸- صنوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۸۵ تلفن ۲۲۹۷۰۰۶۰(داخلی ۲۳۴۷)نمابر۲۲۹۷۰۰۱۱پست الکتریکی
sru@sru.ac.ir

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

گراف‌های غیردوری وابسته به یک گروه

نگارش

جلال یادپار

استاد راهنما : دکترفرزانه نوروزی لرکی

استاد مشاور : دکترحمیدرضا میمنی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

دررشته ریاضی محض

مهرماه ۱۳۹۰

تقدیم به

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است
به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت میگراید
و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند
این پایان نامه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم .

تقدیر و تشکر

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و مساعدت‌های بی‌دریغ استاد محترم، سرکار خانم دکتر فرزانه نوروزی تشکر نمایم که نه تنها علم، بلکه معرفت و اخلاق ایشان به اینجانب درس‌های زیادی آموخت. همچنین قدردانی خود را نثار استاد محترم و عزیز جناب آقای دکتر حمیدرضا میمنی می-نمایم که تلاشها، دلسوزی‌ها و همکاری‌های ایشان در رفع مشکلات پایان نامه از ابتدا تاکنون، باعث دلگرم وتشویق اینجانب بوده است.

از همه اساتید بزرگوار گروه ریاضی تشکر می‌کنم که از محضرشان کسب علم نمودم.

جا دارد از همه دوستان عزیزم بویژه حمیدکنعانی و سجادآدینه‌وند به خاطر کمک‌ها و همراهی‌شان سپاس‌گزاری کنم و آرزوی موفقیت برایشان داشته باشم.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه باشد مرکز ساز عنصر $x \in G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$C_G(x) = \left\{ y \in G \,\middle|\, \langle x, y\rangle \text{ آبلی است} \right\}$$

اگر در این تعریف، کلمه آبلی را با کلمه دوری جایگزین کنیم. یک زیر مجموعه از مرکزساز به دست می‌آید که به این زیرمجموعه، دوری ساز x در G می‌گوییم و آن را با $Cyc_G(x)$ نشان می‌دهیم پس؛

$$Cyc_G(x) = \left\{ \mathrm{y} \in G \,\middle|\, \langle x, y\rangle \text{ دوری است} \right\}$$

همچنین، $Cyc(G)$ را به صورت زیرتعریف می‌کنیم؛

$$Cyc(G) = \left\{ x \in G \,\middle|\, \langle x, y\rangle \text{ دوری است ,} G \text{ برای هر } y \text{ در} \right\} = \cap_{x \in G} Cyc_G(x)$$

برای هر گروه غیردوری G، $Cyc_G(G)$ یک زیرگروه مرکزی، دوری، نرمال و اشتراک همه زیرگروه-های دوری ماکسیمال از G است.

ما یک گراف C_{G} به یک گروه غیرموضعاًدوری G نسبت می‌دهیم (که به آن گراف غیردوری می-گوییم) به طوری که $G \backslash Cyc(G)$ مجموعه رئوس گراف است و دو رأس مانند x, y مجاورند اگر $\langle x, y\rangle$ زیرگروه دوری نباشد. برای یک گراف ساده Γ، عدد خوشه‌ای Γ را با $\omega(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم که بزرگترین اندازه یک زیرگراف کامل در Γ است. در این پایان‌نامه گروه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف غیردوری آن‌ها عددخوشه‌ای کمتر از ۴ دارند.

همچنین ثابت می‌کنیم که یک گروه غیردوری G حل پذیر است هرگاه $\omega(C_G) < 31$ و تساوی برای گروه حل ناپذیر برقرار است اگر و تنها اگر $G/\mathrm{Cyc(G)} \cong \mathrm{A}_5$ یا S_5.

کلید واژه‌ها؛ گراف غیردوری، قطر، عدد احاطه‌گر، گروه‌های حل‌پذیر.

فهرست

عنوان.......... صفحه

فهرست علایم و اختصارات

مرتبه عنصر a .... $|a|$

گروه متقارن از مرتبه n .... S_n

گروه متناوب از مرتبه n .... A_n

اعداد صحیح به پیمانه m .... Z_m

یکریخت است با .... $\cong$

زیرگروه دوری تولید شده به وسیله a .... $\langle a\rangle$

گروه کواترنیون تعمیم یافته از مرتبه $4n$ .... Q_{4n}

گروه دووجهی از مرتبه $2n$ .... D_{2n}

مرکزساز a در G .... $C(a)$

مجموعه تمام مرکزسازهای G .... $cent(G)$

دوری ساز a در G .... $Cyc_G(a)$

مجموعه تمام دوری‌سازهای G .... $Cycl(G)$

مرکز گروه G .... $Z(G)$

گروه خطی عام از درجه n روی F .... $GL(n,F)$

گروه خطی خاص از درجه n روی F .... $SL(n,F)$

گروه خطی خاص تصویری از درجه n روی F .... $L_n(\mathrm{F})$

مجموعه رئوس گراف G .... $V(G)$

مجموعه یال های گراف G .... $E(G)$

درجه راس v .... $deg(v)$

گراف کامل از مرتبه n .... K_n

گراف دوبخشی کامل m و n رأسی .... $K_{m,n}$

قطرگراف G .... $diam(G)$

عددرنگی گراف G .... $\chi(G)$

عددخوشه‌ای گراف G .... $\omega(G)$

عدداحاطه‌گری گراف G .... $\gamma(G)$

مقدمه

اولین بار موضوع دوری‌ساز توسط پاتریک[1] در سال ۱۹۹۲ مطرح شد [4] و همچنین تعریف گراف غیردوری توسط عبدالهی و محمدی حسن آبادی در سال ۲۰۰۷مطرح شده است[12] ,[11] .

هدف این پایان نامه مطالعه ساختار گراف با ویژگی‌های تئوری آن که به یک گروه نسبت می‌دهیم. که در آن گراف را به یک گروه غیر موضعاً دوری وابسته می‌کنیم.

فرض کنیم G گروه غیر موضعاًدوری باشد یک گراف C_{G} به گروه G نسبت می‌دهیم (که آن را گراف غیردوری می‌نامیم) که مجموعه رئوس آن $V(G) = G \backslash Cyc(G)$ و مجموعه یال‌های آن $E(C_G) = \left\{ \{x, y\} \subseteq V(C_G) \middle| \langle x, y \rangle \right.$دوری نیست$\left. \right\}$ است.

این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول ویژگی‌های و مفاهیم اولیه گروه و گراف را آورده‌ایم.[2]و[1] .

در فصل دوم نتایجی درباره دوری سازی یک گروه به دست آورده‌ایم که در فصول آتی از آن‌ها استفاده می‌کنیم. [5]و[4].

در فصل سوم بعضی از ویژگی‌های گراف غیردوری که در یک گروه صدق می‌کند را ثابت می‌کنیم. برای نمونه گراف غیردوری هر گروه غیرموضعاًدوری، همیشه همبند و قطر آن کمتر یا مساوی ۳ است و همچنین نتایجی در مورد خاصیت قطر و عدد احاطه‌گری گراف غیردوری و گراف دوری به دست می‌آوریم.[12]و[11].

در فصل چهارم گروه‌های را مشخص می‌کنیم که عدد خوشه‌ای آن‌ها کمتر از ۴ است و در ادامه همه گروه‌هایی که گراف های غیردوری آن‌ها مسطح یا همیلتونی است دسته بندی می‌کنیم و همچنین ثابت می‌کنیم که یک گروه غیردوری G حل پذیر است هرگاه $\omega(C_G) < 31$ و تساوی برای گروه حل ناپذیر صدق می‌کند اگر و تنها اگرS_5 یا $A_5 \cong G/Cyc(G)$.[11]

---

[1]-Patrick

فصل اول

تعاریف ، قضایای و مفاهیم اولیه

مقدمه

در این فصل به طور خلاصه به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های آتی از آن‌ها استفاده می‌شود می‌پردازیم. لازم به ذکر است که تعاریف و قضایای بخش یک از منبع [1] و [2] و تعاریف و قضایای بخش دوم از منبع [3] استفاده شده است.

1-1 تعاریف و قضایای گروه

۱-۱-۱- تعریف . یک عمل دوتایی $*$ روی S عبارت است نگاشت $* : S \times S \to S$ که در آن S یک مجموعه غیرتهی است.

۱-۱-2-تعریف . ساختمان جبری G همراه با عمل دوتایی $*$ یک نیم‌گروه است هرگاه $*$ یک عمل دوتایی شرکت پذیری بر G باشد. به عبارت دیگر؛

$$\forall\ a, b, c \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c$$

۱-۱-۳- تعریف . نیم‌گروه $(G,*)$ را مونویید می‌گوییم هرگاه عضو $e \in G$ وجود داشته باشدکه برای هر $a \in G$ ، $e * a = a * e = a$. عضو e را عضو همانی $(G,*)$ می‌نامیم.

۱-۱-۴- تعریف . مونویید $(G,*)$ را گروه می‌گوییم هرگاه برای هر عضو $a \in G$، عضو $b \in G$ وجود داشته باشد که $b * a = a * b = e$. b را وارون a می‌نامیم.

۱-۱-۵- تعریف . اگر در گروه $(G,*)$ داشته باشیم $a * b = b * a$ برای هر a و b در G،در این صورت گروه G را یک گروه آبلی می‌نامیم.

۱-۱-۶- تعریف . گروه G متناهی است اگر تعداد متناهی عنصر داشته باشد و در غیر این صورت گروه نامتناهی است.

۱-۱-۷- تعریف . قرار می‌دهیم $Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ ، در مجموعه Z_n عمل دوتایی$\oplus$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ $\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in G\ \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$

دراین صورت گروه $(Z_n, \oplus)$ را گروه اعداد صحیح به پیمانه n تحت جمع می‌نامیم.

۱-۱-۸- تعریف . تعریف می‌کنیم $V_4 = \{1, x_1, x_2, x_3\}$ که در آن خواص زیر برقرار است؛

۱. $(x_i)^2 = 1\,; i = 1,2,3$
۲. $x_i . x_j = x_k\,; i \neq j \neq k$

ساختمان جبری$(V_4\,,.)$ تشکیل گروه می‌دهد و آن را گروه چهارتایی کلاین گوییم. واضح است این گروه آبلی و از مرتبه ۴ است.

۱-۱-۹- تعریف . به ازای n طبیعی که $n \geq 2$ ، گروه کواترنیون تعمیم یافته که آن را با Q_{4n} نشان می‌دهند، زیرگروهی از گروه $GL(2,\mathbb{C})$ است که با دو ماتریس زیر تولید می‌شود؛

$\eta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\xi = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \varpi \end{bmatrix}$ که در آن $\omega = e^{i\pi/n}$ و ϖ نمایش مزدوج عدد مختلط ω است.

۱-۱-۱۰- قضیه . گروه Q_{4n} دارای نمایش زیر است؛

(۱-۱)

$$\langle x, y | x^{2n} = 1, x^n = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

برهان . ر.ک [1]، ص۱۷۳.

۱-۱-۱۱- تعریف . گروه دو وجهی D_{2n} عبارت است از گروه تولید شده با دوران r از مرتبه n و انعکاس s از مرتبه ۲ به طوری که $srs = r^{-1}$. شکل ماتریسی آن یک دوران برخلاف عقربه‌های ساعت و یک تقارن حول محور x به صورت زیر هستند؛ $s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و

$$r = \begin{bmatrix} Cos\,\frac{2\pi}{n} & -Sin\,\frac{2\pi}{n} \\ Sin\,\frac{2\pi}{n} & Cos\,\frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}.$$

۱-۱-۱۲- قضیه .گروه دو وجهی D_{2n} به صورت زیر نمایش داده می‌شود؛

(۱-۲)

$$D_{2n} = \langle r, s | r^n = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$$

برهان . ر.ک [1]، ص۱۷۲.

۱-۱-۱۳-تعریف . فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی است و S_X مجموعه تمام توابع یک به یک و پوشا از مجموعه X به X است S_X تحت ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد.

۱-۱-۱۴- تعریف . اگر X متناهی و دارای n عنصر باشد در این صورت S_X را گروه متقارن از درجه n نامیده و به صورت S_n می‌نویسیم و همچنین $\delta \in S_n$ را یک جایگشت می‌گوییم.

۱-۱-۱۵- تعریف . جایگشت $\beta \in S_n$ را زوج می‌گوییم هرگاه β حاصل ضرب تعدادی زوج ترانهش(دوربه طول۲) باشد در غیر این صورت جایگشت را فرد می‌گوییم .

۱-۱-۱۶- **تعریف** . مجموعه تمام جایگشت‌های زوج در S_n را با A_n نشان می‌دهیم و آن را گروه متناوب از درجه n می‌نامیم.

۱-۱-۱۷- **تعریف** . زیرمجموعه ناتهی H از گروه $(G,*)$ را یک زیرگروه می‌نامند اگر H نسبت به عمل دوتایی G یعنی $*$ خود یک گروه باشد و در این صورت می‌نویسیم $H \leq G$.

۱-۱-۱۸-**تعریف** . فرض کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه غیرتهی G است دراین صورت مرکزساز H در G شامل آن عناصری از G است که با تمام عناصر H جابه جا می‌شوند و آن را با $C(H)$ نشان می‌دهیم به عبارت دیگر،

$$C(H) = \{g \in G | \forall h \in H;\ gh = hg\}$$

۱-۱-۱۹- **تعریف** . فرض کنید G یک گروه و a یک عضو از G باشد در این صورت مرکزساز a در G شامل آن عناصری از G است که با عنصر a جابه‌جا می‌شوند و آن را $C(a)$ نشان می‌دهیم به عبارت دیگر،

$$C(a) = \{g \in G | ga = ag\}$$

۱-۱-۲۰- **تعریف** . برای یک گروه متناهی G، مجموعه تمام مرکزسازهای G را با $cent(G)$ نشان می‌دهیم به عبارت دیگر، $cent(G) = \{C(x) | x \in G\}$. G را یک گروه n−مرکزسازگوییم هرگاه $|cent(G)| = n$.

۱-۱-۲۱- **تعریف** . فرض کنیم G یک گروه باشد تعریف می‌کنیم؛
$Z(G) = \{g \in G | \forall x \in G\ ; gx = xg\}$ دراین صورت $Z(G)$ را مرکز گروه G می‌نامیم. به عبارت دیگر $Z(G)$ شامل آن عناصری از G است که با تمام عناصر G جابه‌جا می‌شوند.

۱-۱-۲۲-**مثال** . برای $n \geq 3$ ، $Z(S_n) = 1$. اگر n فرد باشد $Z(D_{2n}) = 1$ و اگر n زوج باشد $Z(D_{2n}) = \left\{1, s^{\frac{n}{2}}\right\}$.

۱-۱-۲۳- **تعریف** . هرگاه $(G,*)$ یک گروه و H زیرگروهی از G باشد آن‌گاه به ازای هر $g \in G$، مزدوج H توسط g در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg | h \in H\}$. اگر H زیرگروه G باشد آن‌گاه $g^{-1}Hg$ نیز زیرگروه G است.

۱-۱-۲۴- **تعریف** . گروه G دوری است هرگاه عنصری مانند $a \in G$ وجود داشته باشد به طوری که هر $x \in G$ توانی از a باشد. یعنی $n \in \mathbb{Z}$ای موجود باشد که $x = a^n$. در این صورت a را مولد گروه دوری G می‌نامیم و می‌نویسیم $G = \langle a \rangle$. به عبارت دیگر G دوری است اگر $G = \langle a \rangle = \{a^n | a \in G; n \in \mathbb{Z}\}$.

۱-۱-۲۵- **قضیه** . زیرگروه هر گروه دوری، دوری است.

برهان . ر.ک [2]، ص۱۴۹.

۱-۱-۲۶- قضیه . هر گروه دوری متناهی با $(Z_n, \oplus)$ و هر گروه دوری نامتناهی با $(Z, +)$ یکریخت است.

برهان . ر.ک [2]، ص۱۳۸.

۱-۱-۲۷- نتیجه . هر گروه دوری، آبلی است.

۱-۱-۲۸- قضیه لاگرانژ[۱] . فرض کنیم G یک گروه متناهی است در این صورت مرتبه هر زیرگروه زیرگروه G، مرتبه G را عاد می‌کند. عکس قضیه لاگرانژ همواره برقرار نیست. یعنی اگر G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد، لازم نیست به ازای هر مقسوم علیه m از G زیرگروهی از مرتبه m داشته باشد.

۱-۱-۲۹- تذکر . اگر G گروهی آبلی یا دوری باشد، عکس قضیه لاگرانژ برقرار است.

۱-۱-۳۰- قضیه . فرض کنید G گروهی دوری و متناهی از مرتبه n باشد، فرض کنیم d یک مقسوم علیه مثبت n باشد در این صورت، G دقیقاً یک زیرگروه از مرتبه d دارد.

برهان . ر.ک [2]، ص۱۵۰.

۱-۱-۳۱- تعریف . فرض کنیم G یک گروه و $a_i \in G$ و $(1 \leq i \leq k)$ باشد عناصر $a_1, a_2, \dots, a_k$، G را تولید می‌کند هرگاه هیچ زیرگروه حقیقی G شامل همه عناصر $a_1, a_2, \dots, a_k$ نباشد در این صورت می‌نویسیم $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$.گروه G توسط عناصر $a_1, a_2, \dots, a_k$ تولید می‌شود اگر و تنها اگر هر عضو آن را بتوان به صورت حاصل ضربی متناهی از $a_1, a_2, \dots, a_k$ و وارون‌های آن‌ها نوشت.

۱-۱-۳۲- تعریف . فرض کنید H یک زیرگروه G باشد و نیز $a \in G$، مجموعه $aH = \{ah | h \in H\}$ را هم دسته چپ H توسط a در G می‌نامیم. به طور مشابه Ha را هم مجموعه راست H توسط a در G می‌نامیم.

۱-۱-۳۳- تعریف . هرگاه G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد در این صورت تعداد هم دسته متمایز چپ (راست) H در G را شاخص H در G می‌نامیم و آن را با $[G:H]$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۳۳- قضیه . اگر G یک گروه و K, H زیرگروه‌های متناهی آن باشند آن‌گاه؛

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} \qquad (۱-۳)$$

برهان .ر.ک [1]، ص۱۶.

---

[۱] -Lagrange

۱-۱-۳۴- تعریف . هر گاه G یک گروه و N زیرگروهی از G باشد N در G نرمال است هرگاه؛ $\forall g \in G;\ gN = Ng$ در این صورت می‌نویسیم $N \lhd G$. به عبارت دیگر هرهم دسته چپ N در G یک هم دسته راست N در G است.

۱-۱-۳۵- تعریف. هرگاه N زیرگروه نرمالی از G باشد. در این صورت مجموعه $G/N = \{gN | g \in G\}$ تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه خارج قسمت G بر N می‌نامیم.

۱-۱-۳۶- تعریف . گروه G ساده است اگر دارای هیچ زیرگروه نرمال سره و غیربدیهی نباشد.

۱-۱-۳۷- قضیه . هر گروه از مرتبه p^k (p عدد اول ، $k > 1$) ساده نیست.

برهان . ر.ک [1]، ص۷۰.

۱-۱-۳۸- قضیه . A_n برای هر $n \geq 5$ گروه ساده، متناهی و غیر آبلی‌است.

برهان . ر.ک [2]، ص۱۶۶.

۱-۱-۳۹- تعریف . فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی باشد و M زیرگروهی واقعی از G باشد M را یک زیرگروه ماکسیمال G می‌نامیم، اگر $M \leq H \leq G$ آنگاه $H = M$ یا $H = G$.

۱-۱-۴۰- تعریف . فرض کنید G و H دوگروه باشند، نگاشت $f: G \longrightarrow H$ را یک همریختی می‌نامند، هرگاه به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم؛

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

به‌علاوه اگر f دوسویی(یک به یک و پوشا)باشد، آن گاه f را یکریختی از G بروی H می‌نامیم و چنین می‌نویسیم؛ $G \cong H$.

۱-۱-۴۱- تعریف . یکریختی از G به G را خودریختی می‌نامند.

۱-۱-۴۲- تعریف . اگر φ یک همریختی از G به H باشد هسته φ عبارت است؛

$$ker\varphi = \{g \in G | \varphi(g) = 1_H\}$$

۱-۱-۴۳- قضیه اول یکریختی . فرض کنیم $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد دراین صورت $\frac{G}{\ker\varphi} \cong Im\varphi$. در صورتی که φ پوشا باشد داریم؛ $\frac{G}{\ker\varphi} \cong H$.

برهان . ر.ک [1]، ص۷.

۱-۱-۴۴- قضیه دوم یکریختی . فرض کنیم H و K زیرگروه‌هایی از G باشند به طوری که $K \lhd G$، در این صورت داریم؛

$$\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{HK}{K}$$

برهان . ر.ک [1]، ص۷.

۱-۱-۴۵- قضیه سوم یکریختی . فرض کنیم $N \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G, N \leq K$ در این صورت داریم؛ $(G/N)(K/N) \cong G/K$

برهان . ر.ک [1]، ص۷.

۱-۱-۴۶- تعریف . فرض کنیم $G_1, \dots, G_n$، n گروه باشند. مجموعه $G_1 \times \dots \times G_n$ همراه عمل دوتایی زیر، $(g_1, \dots g_n)(g_1', \dots, g_n') = (g_1 g_1', \dots, g_n g_n')$ که در آن g_i, g_i'، در G_iاند $(1 \leq i \leq n)$، تشکیل یک گروه می‌دهد این گروه را حاصل ضرب مستقیم گروه‌های $G_1, \dots, G_n$ می‌نامند.

۱-۱-۴۷- قضیه . هر گروه آبلی متناهی حاصل ضرب مستقیم گروه‌های دوری است.

برهان . ر.ک [1]، ص۱۲۷.

۱-۱-۴۸- قضیه . هر گروه آبلی متناهی G به دو صورت مختلف با حاصل ضرب مستقیم گروه‌های دوری یکریخت است.

حالت اول؛ $G \cong Z_{p_1^{\alpha_1}} \times Z_{p_2^{\alpha_2}} \times \dots \times Z_{p_k^{\alpha_k}}$ که p_iها عامل اول و متمایزمرتبه G هستند و این حاصل ضرب (صرف نظر از ترتیب عوامل) منحصر به فرد است.

حالت دوم؛ $G \cong Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \dots \times Z_{m_k}$ که در آن m_i ، m_{i+1} را عاد می‌کند و این m_iها منحصر به فرد و مقسوم علیه‌های مرتبه G هستند.

۱-۱-۴۹- تعریف . گروه G را که مرتبه هر عنصرش توانی از یک عدد اول p باشد یک $p-$ گروه می‌نامند.

۱-۱-۵۰- قضیه .گروه متناهی G یک $p-$ گروه است اگر وتنها اگرمرتبه‌ی G توانی از عدد اول p باشد.

برهان . ر.ک [1]، ص۷۰.

۱-۱-۵۱- قضیه . فرض کنیم G یک $p-$ گروه متناهی از مرتبه p^{α} باشد که در آن α یک عددصحیح نامنفی است در این صورت به ازای هر β صحیح که $0 \leq \beta \leq \alpha$، گروه G زیرگروهی از مرتبه p^{β} دارد.

برهان . ر.ک [1]، ص۷۳.

۱-۱-۵۲- قضیه کشی[۱] . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p||G|$، که در آن p یک عدد اول است. در این صورت G عضوی از مرتبه‌ی p دارد.

برهان . ر.ک [1]، ص۶۹ .

---

۱ -Cauchy

۱-۱-۵۳- تعریف . $p-$ گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی می‌گوییم در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیر بدیهی G عدد اول p باشد.

۱-۱-۵۴- تعریف . فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد و $n = p^{\alpha}\acute{n}$ که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است و p عدد اولی است که $p \nmid \acute{n}$، در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^{α} را یک $p-$ زیرگروه سیلوی G می‌نامند. و آن را با $Syl_p(G)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۵۵- قضیه‌های سیلو[1] . فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد که در آن $n = p^{\alpha}\acute{n}$ ، $\alpha \geq 0$ و p عدد اولی است که $p \nmid \acute{n}$ در این صورت،

۱. G حداقل یک $p-$ زیرگروه سیلو دارد.

۲. هر دو $p-$زیرگروه سیلوی G مزدوج اند.

۳. هر $p-$ زیرگروه G جزء یک $p-$ زیرگروه سیلوی G است.

۴. عده‌ی همه‌ی $p-$زیرگروه های G همنهشت ۱ به پیمانه p است.

برهان . ر.ک [1]، ص۷۱.

۱-۱-۵۶- تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد.

۱. گروه G را تابدارگویند هرگاه مرتبه‌ی هر عضو آن متناهی باشد.

۲. گروه G را بی‌تاب گویند هرگاه مرتبه‌ی هر عضوی غیربدیهی آن نامتناهی باشد.

۱-۱-۵۷- تعریف . فرض کنیم F یک میدان و n عددی طبیعی باشد مجموعه همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ که درایه‌های هر یک از آن ها در Fاند را با $GL(n,F)$ نمایش می‌دهیم.$GL(n,F)$ با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد که به آن گروه خطی عام می گوییم.

۱-۱-۵۸- تعریف . مجموعه همه اعضایی از $GL(n,F)$ که دترمینان هر یک از آن‌ها برابر۱ (عضو واحد میدان F) باشد. زیرگروهی از $GL(n,F)$ است این زیرگروه را با $SL(n,F)$ نشان داده و به آن گروه خطی خاص می‌گوییم. اگر F یک میدان متناهی و $|F| = q$ (توانی از عدد اول) باشد، گروه های $GL(n,F)$ و $SL(n,F)$ را به ترتیب با $GL(n,q)$ و $SL(n,q)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۵۹- قضیه . فرض کنیم n یک عدد طبیعی، q توان مثبتی از یک عدد اول باشد در این صورت،

$$|GL(n,q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) \qquad (۱-۴)$$

[1]- Sylow

$$|SL(n,q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})/(q-1) \qquad (۵-۱)$$

برهان . ر.ک [1]، ص۶۰ .

۱-۱-۶۰- تعریف . اگر F یک میدان دلخواه باشد گروه $SL(n,F)/Z(SL(n,F))$ را گروه خطی خاص تصویری (از درجه n روی F) می‌نامند و آن را با $PSL(n,F)$ نشان می‌دهند. در حالتی که F متناهی و $|F| = q$ باشد این گروه را با $PSL(n,q)$ یا $L_n(q)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۶۱- نتیجه . دیکسون[۱]، ریاضیدان آمریکایی، در ۱۸۹۷ ثابت کرد که به ازای هر میدان متناهی مانند F، و هر عدد طبیعی n که $n \geq 3$، گروه $L_n(\mathrm{F})$ ساده است.

برهان . ر.ک [1]، ص۶۴ .

۱-۱-۶۲- قضیه . هرگروه ساده از مرتبه ۶۰ و ۱۶۸ به ترتیب با گروه های A_5 و $L_2(7)$ یکریخت هستند.

برهان . ر.ک [1]، ص۸۷ .

۱-۱-۶۳- قضیه . فرض کنیم G یک گروه ساده و H زیرگروهی واقعی از آن باشد به طوری که $|G:H| = n$که در آن $n \geq 3$، در این صورت $G \hookrightarrow A_n$.

برهان . ر.ک [1]، ص۸۷ .

۱-۱-۶۴- نتیجه . هرگاه گروه متناهی G زیرگروهی از اندیس n داشته باشد به طوری که $|G| \nmid \frac{n!}{2}$ آن‌گاه G ساده نیست.

برهان . ر.ک [1]، ص۲۸ .

۱-۱-۶۵- نتیجه . بنا به قضیه ۱-۱-۶۳- و نتیجه ۱-۱-۶۴- می توان نتیجه گرفت گروه‌های ساده غیر آبلی، زیرگروه با اندیس کمتر از ۵ ندارند.

۱-۱-۶۶- تعریف . یک گروه آبلی بخشپذیر است اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح مثبت n و هر g، یک y در G وجود داشته باشد به طوری که $ny = g$. به عبارت دیگر برای هر عدد صحیح مثبت n، $nG = G$. Q تحت عمل جمع یک گروه بخشپذیر است.

۱-۱-۶۷- تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد یک سری زیرنرمال G ، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های G مانند $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$، به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$.

---

[۱]-Dickson

۱-۱-۶۸- تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمالG ، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های نرمال G مانند $1 = G_0 \leq G_۱ \leq \cdots \leq G_{\mathrm{r}} = G$.

۱-۱-۶۹- تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد. سری نرمال $1 = G_0 \leq G_۱ \leq \leq G_{\mathrm{r}} = G$ ... را یک سری مرکزی گوییم درصورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\frac{G}{G_{i-1}}\right)$.

۱-۱-۷۰- تعریف . گروه G را پوچ‌توان نامند در صورتی که یک سری‌مرکزی داشته باشد.

هر گروه آبلی، پوچ‌توان است و اگر G یک گروه پوچ‌توان غیربدیهی باشد. آنگاه $Z(G) \neq 1$.

۱-۱-۷۱- نتیجه . فرض کنیم G یک گروه باشد و $N \leq Z(G)$. در این صورت اگر G/N پوچ توان باشد آن‌گاه G پوچ‌توان است.

برهان . ر.ک [1]، ص۲۴۵ .

۱-۱-۷۲- تعریف . گروه G را حل‌پذیر می‌نامیم در صورتی که یک سری زیرنرمال مانند $1 = G_0 \leq G_۱ \ . . . \leq G_r = G$داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، گروه G_i/G_{i-1} آبلی باشد.

۱-۱-۷۳- قضیه . فرض کنیم G یک گروه باشد و $N \lhd G$. در این صورت اگر N و G/N هر دو حل پذیر باشند آن‌گاه G حل‌پذیر است.

برهان . ر.ک [1]، ص۲۵۳ .

۱-۱-۷۴- تعریف . فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی و متناهی باشد در این صورت G پوچ‌توان است اگر و فقط اگر G حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود باشد.

برهان . ر.ک [1] ص۲۲۳ .

۱-۱-۷۵- تعریف . گروه G را موضعاًدوری نامند هرگاه هر زیرگروه متناهیاً تولید شده ازآن دوری باشد.

۱-۱-۷۶- نتیجه . هر زیرگروه و گروه خارج قسمت از یک گروه موضعاًدوری، موضعاًدوری است. گروه جمعی اعداد گویا، موضعاًدوری است.

۱-۱-۷۷- نتیجه . یک گروه موضعاًدوری است اگر وتنها اگر هر دو جفت از عناصر گروه، یک گروه دوری تولید کند.

۱-۱-۷۸- تعریف . گروه یکانی به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) | A^* A = I_n\}$$

که در آن $M(n,\mathbb{C})$ تمام ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ که درایه‌های از $\mathbb{C}$ هستند. و A^* ترانهاده ماتریس A است و I_n ماتریس همانی از مرتبه $n \times n$ است.

۱-۱-۷۹- تعریف . گروه یکانی خاص به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$SU(n) = \{A \in M(n,\mathbb{C}) | A^*A = I_n; detA = 1\}$$

۱-۱-۸۰- تعریف . $SU(n)/Z(SU(n))$ گروه یکانی خاص تصویری می‌گوییم. و آن را با $PSU(n)$ نشان می‌دهیم.

۱-۲ تعاریف و قضایای گراف

۱-۲-۱- تعریف . منظور از یک گراف G ، دوتایی $G = (V,E)$ است که V مجموعه‌ای غیر تهی و E مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های دو عضوی V است. به مجموعه‌ی V، مجموعه‌ی رئوس گوییم و آن را با $V(G)$ نشان می‌دهیم و به مجموعه‌ی E مجموعه‌ی یال‌ها گوییم و آن را با $E(G)$ نشان می‌دهیم. هرگاه $e = \{v,w\}$ یال گراف G باشد آن‌گاه می‌نویسیم $e = vw$.

۱-۲-۲- تعریف . تعداد یال‌های گذرنده از رأس v را درجه ی v نامیده و با $(dv)degv$ نشان می‌دهیم.

۱-۲-۳- تعریف . فرض کنیم $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ دوگراف باشند گوییم G_1 یکریخت با G_2 است، هرگاه تناظر دو سویی $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ چنان موجود باشد که $uv \in E_1$ اگروتنها اگر $\varphi(u)\varphi(v) \in E_2$.

۱-۲-۴- تعریف . گراف $H = (V_H, E_H)$ را زیرگراف $G = (V_G, E_G)$ گوییم هرگاه $V_H \subseteq V_G$ و $E_H \subseteq E_G$.

۱-۲-۵- تعریف . زیرگراف H از گراف G را فراگیرگوییم هرگاه $V_H = V_G$.

۱-۲-۶- تعریف . گراف G را گراف کامل گوییم هرگاه هر دو رأس آن مجاور باشند. گراف کامل با n راس را با K_n نشان می‌دهیم. درجه هر رأس K_n، $n-1$ می‌باشد و همچنین تعداد یال‌های آن $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

۱-۲-۷- تعریف . گراف G با بخش‌های $V_k, \dots, V_1$ را $k-$ بخشی می‌گوییم هرگاه هر رأس در هر بخش به هم مجاورنباشند و همچنین هر رأس در بخش V_i که $1 \leq i \leq n$ به همه رأس بخش-های V_j که $i \neq j$ مجاور باشد.