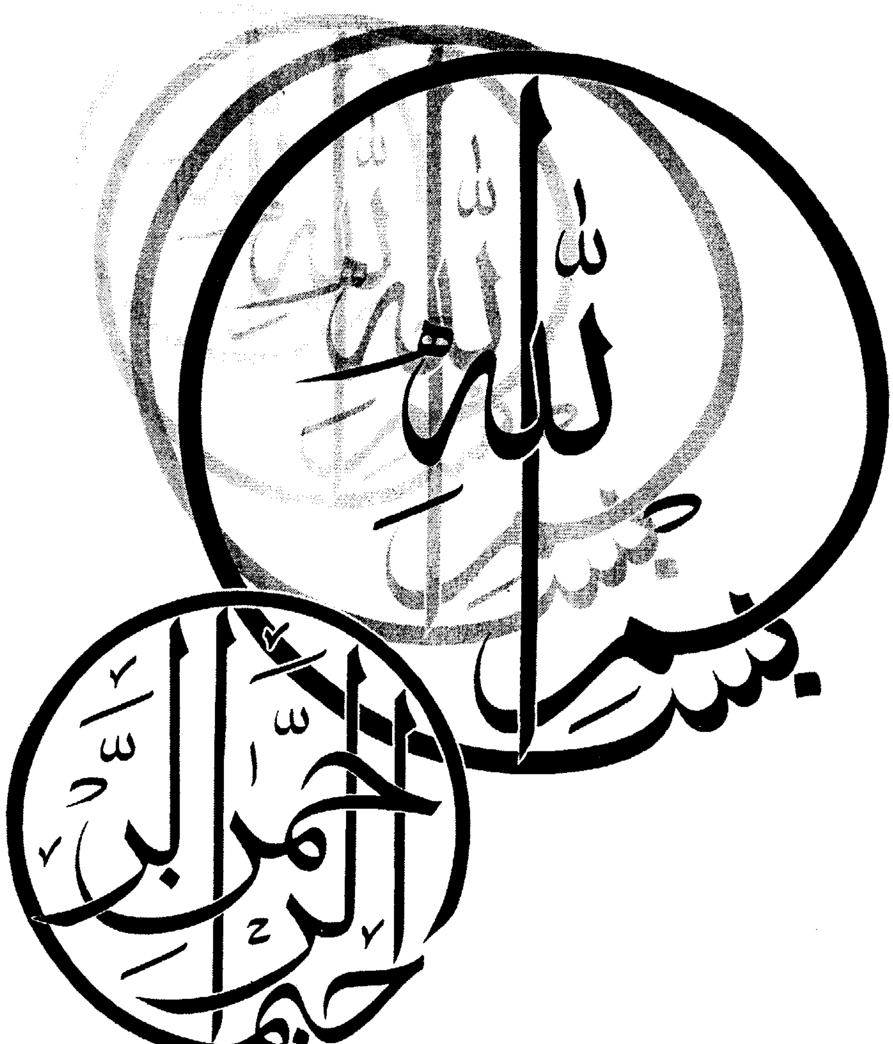

٧٢٠١٧

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

کامل بودن فضاهای L^1 برای اندازه‌هایی که مقادیرشان را در یک فضای برداری مختلط می‌گیرند

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عذرا موسوی

۱۳۸۴/۴/۵

استاد راهنما

دکتر مسلم نیکفر

۷۲۰۱۷

۱۳۸۳

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی عذرا موسوی

تحت عنـــوان

کامل بودن فضاهای L^1 برای اندازه‌هایی که مـقادیرشان را در یک فـضای برداری مختلط می‌گیرند

در تاریخ ۸۳/۱/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مسلم نیکفر
۲ ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر رسول نصر اصفهانی
۳ ـ استاد داور ۱	دکتر جعفر زعفرانی
۴ ـ استاد داور ۲	دکتر قدسیه وکیلی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر بیژن طائری

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی‌کران خداوندی را که بر هر نعمت حق سپاسی برای بندگان مقرر فرموده.

این تقدیر را ابتدا با قدردانی از زحمات پدر و مادر عزیزم آغاز می‌کنم و برخود لازم می‌دانم از همه کسانی که در انجام این مهم مرا یاری دادند، تشکر و قدردانی نمایم.

از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر نیکفر که همواره از رهنمودهای ارزنده ایشان بهره‌مند بوده‌ام، نهایت سپاسگزاری را دارم.

از استاد مشاور گرامی این پایان نامه جناب آقای دکتر نصراصفهانی که مشاورت این پایان نامه را تقبل نمودند صمیمانه متشکرم.

از جناب آقای دکتر زعفرانی و سرکار خانم دکتر وکیلی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان را به عهده گرفتند، سپاسگزارم.

از مسئول محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر طائری که در امر پیشرفت و تحصیل کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی زحمات زیادی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

از دوستان عزیزم بویژه خانم ابدی که در طی این دوره صمیمانه در کنار من بودند و در انجام این پایان نامه مرا یاری دادند، از صمیم قلب متشکرم.

کلیهٔ حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به

پدر و مادر بسیار عزیزم

فهرست مطالب

چکیده:

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب به‌طور دنباله‌ای کامل روی $\mathbb{C}$، Σ یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی دلخواه Ω و $\nu : \Sigma \to X$ یک اندازه‌ی برداری باشد. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا در این حالت فضای $L^1(\nu, X)$ کامل است یا نه؟

در این رساله نشان می‌دهیم که شرط لازم و کافی برای کامل بودن فضای $L^1(\nu, X)$ آن است که اندازه‌ی برداری $\nu : \Sigma \to X$ بسته باشد. همچنین نشان می‌دهیم اگر X یک فضای فرشه دلخواه باشد آن‌گاه، فضای $L^1(\nu, X)$ در این حالت نیز کامل است.

فصل اول

مقدمه

در این رساله، موضوعی را دنبال می‌کنیم که در سال ۱۹۹۷ توسط ریکر[1] مورد بررسی قرار گرفت، و به‌طور خلاصه عبارت است از این که تحت چه شرایطی روی فضای برداری X، و یا روی اندازه‌ی برداری ν (با مقادیر در X)، فضای برداری $L^1(\nu, X)$ کامل می‌شود.

ریکر در سال ۱۹۹۷ در [۱۱] کامل بودن فضای $L^1(\nu, X)$ را برای آن دسته از فضاهای فرشه X که شامل هیچ کپی از فضای دنباله‌ای $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ نیستند، اثبات کرد. در سال ۱۹۹۸، ریکر با همکاری فرناندز[2] و نارنجو[3] در [۱۰] کامل بودن فضاهای $L^1(\nu, X)$ را در دو حالت کلی‌تر ذیل به اثبات رسانیدند. ابتدا حالتی را در نظر گرفت که X یک فضای فرشه‌ی مختلط دلخواه است. بعد، به‌طور ضعیف تر فرض کرد که X یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف موضعاً محدب روی $\mathbb{C}$ و به‌طور دنباله‌ای کامل و ν نیز یک اندازه‌ی برداری بسته باشد.(به بخش ۳−۵ مراجعه کنید.)

این رساله شامل پنج فصل است. فصل حاضر مقدمه‌ی رساله است. در فصل دوم، قضایا و تعاریف مورد نیاز برای فصل های بعدی به اختصار بیان شده‌اند که به دلیل اهمیت برخی از آن‌ها، اثبات آن‌ها را

---

[1] Ricker
[2] Fernandez
[3] Naranjo

نیز آورده‌ایم. ولی اغلب از آوردن اثبات‌های غیر ضروری خودداری، و تنها به ذکر مراجع اکتفا کرده‌ایم. همچنین در این فصل، مفاهیم ساختار یکنواخت روی یک مجموعه‌ی دلخواه، فضاهای یکنواخت و فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب را تا اندازه‌ای که در این پایان نامه به آن‌ها احتیاج داریم، مورد بررسی قرار داده‌ایم.

در فصل سوم، برخی از بهترین و مهمترین تعاریف، نتایج و قضایای به‌دست آمده‌ی قبلی (سال ۱۹۷۰ و بعد از آن) در زمینه‌ی اندازه‌های برداری و خواص آن اندازه‌ها را آورده‌ایم. این فصل در مجموع شامل شش بخش است که بخش‌های سه و پنج آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

مهمترین فصل این پایان نامه، فصل چهارم است. دو قضیه‌ی بسیار مهم را در این فصل مورد بررسی قرار داده‌ایم که هدف اصلی این رساله است. این فصل شامل دو بخش است که به علت اهمیت این قضایا، هر کدام از این دو قضیه را در یک بخش مجزا گنجانیده‌ایم.

در فصل چهارم فرض می‌کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً محدب و $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ یک اندازه‌ی برداری باشد که در آن Σ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω است. متناظر به اندازه‌ی برداری ν، فضای برداری توپولوژیک هاسدورف و موضعاً محدب $L^1(\nu, X)$ را که به توپولوژی همگرایی در میانگین مجهز شده است در نظر می‌گیریم (یعنی $f_n \longrightarrow f$ در $L^1(\nu, X)$، هرگاه $\|f_n - f\|_1 \to 0$ وقتی که $n \to \infty$). در این‌جا X یک فضای برداری روی میدان اسکالر $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) است. در حالت $\mathbb{K} = \mathbb{R}$، فضای برداری $L^1(\nu, X)$ در [۷] به‌طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته است. بویژه، در فصل IV از مرجع اخیر، قضیه‌ی اصلی بخش دوم از فصل چهارم این رساله، در حالتی که X یک فضای‌موضعاً محدب هاسدورف کامل روی $\mathbb{R}$ است، اثبات شده است. هم‌چنان‌که خواهیم دید اثبات این قضیه شدیداً به این فرض وابسته است که X یک فضای برداری روی $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ است. اما در حالت $\mathbb{K} = \mathbb{C}$، با وجودی‌که بسیاری از خواص $L^1(\nu, X)$ روی $\mathbb{R}$، برای $L^1(\nu, X)$ روی $\mathbb{C}$ نیز برقرار است ولی واقعاً شگفت آور است که نمی‌توانیم قضیه‌ی اصلی بخش ۴—۲ را از قضیه‌ی ۴—۱—IV در [۷] نتیجه بگیریم، و یا لااقل با دنبال کردن روند اثبات این قضیه، اثباتی برای قضیه ۴—۲—۴ این رساله ارایه دهیم. همان‌طوری که خواهیم دید، در اثبات این قضیه از روش دیگری استفاده خواهیم کرد.

در بخش اول از فصل چهارم، اثباتی ساده و مستقیم از کامل بودن $L^1(\nu, X)$ را برای یک فضای فرشه مختلط دلخواه X بیان می‌کنیم که تلفیق روش قطری سازی کانتور و به‌کار بردن صورت مختلط قضیه‌ی لِوی برای اندازه‌های برداری، حاصل شده است.

در بخش دوم از این فصل، همان‌گونه که در بالا گفتیم، قضیه‌ی ۴—۱—IV از [۷] را به حالتی که X

یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد، گسترش می‌دهیم.

فصل پنجم، شامل پیوست این رساله می‌باشد، را آن به‌ازای یک اندازه‌ی برداری $\nu : \Sigma \longrightarrow X$، یک ساختار یکنواخت برای فضای $L^1(\nu, X)$ که در مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل دوم

مفاهیم، تعاریف و قضایای پیشنیاز

در این فصل، تعاریف و قضایایی را که در فصل‌های بعدی به دفعات مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم. از آن‌جایی‌که بازنویسی اثبات قضایای کلاسیک آنالیز ضروری به نظر نمی‌رسد، از آوردن این اثبات‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. اما نوشتن اثبات برخی از قضایای عمیق کلاسیک که در فصل‌های آینده مکرر مورد استفاده قرار خواهند گرفت موجه به‌نظر می‌رسد (خصوصاً به‌خاطر ایده‌های عمیقی که در آنها وجود دارد).

برای درک هر چه بهتر فضاهای برداری موضعاً محدب و فضاهای توپولوژیک یکنواخت، دو بخش از این فصل را به این مفاهیم اختصاص داده‌ایم. همچنین، در این دو بخش سعی کرده‌ایم با آوردن مثال‌های گوناگون، به فهم هر چه بیشتر این مفاهیم کمک کنیم.

۲–۱– تعاریف و قضایای پیشنیاز

تعریف ۲–۱–۱. برای مجموعه‌ی دلخواه Ω، خانواده‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های آن‌را با $\mathcal{P}(\Omega)$ نشان می‌دهیم. می‌گوییم خانواده‌ی $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ یک σ– جبر در Ω است هرگاه

۱) $\Omega \in \Sigma$؛

۲) اگر E عضوی دلخواه از Σ باشد آن‌گاه $E^c := \Omega - E \in \Sigma$؛

۳) برای هر دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای Σ داشته باشیم $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

تعریف ۲–۱–۲. مجموعه‌ی دلخواه X داده شده است. خانواده‌ی $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ را یک توپولوژی روی X گوییم هرگاه

۱) $\emptyset, X \in \tau$؛

۲) اگر $O_1, O_2 \in \tau$ آن‌گاه $O_1 \cap O_2 \in \tau$؛

۳) برای هر خانواده‌ی $\{O_i\}_{i\in I} \subset \tau$ داشته باشیم $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.

در این صورت، (X,τ) را یک فضای توپولوژیک و هر عنصر از τ را یک مجموعه‌ی باز در X و مکمل هر مجموعه‌ی باز را یک مجموعه‌ی بسته در X می‌خوانیم. اگر $x \in X$ و V شامل یک مجموعه‌ی باز O در X باشد به‌طوری‌که $x \in O$، آن‌گاه V را یک همسایگی حول x می‌گوییم. برای مثال، در فضای $\mathbb{R}^k$ هر گوی به مرکز $x \in \mathbb{R}^k$ و شعاع $r > 0$، یک همسایگی باز به مرکز x است. هر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^k$ اجتماع شمارایی از چنین گوی‌هایی است. توپولوژی پدید آمده توسط چنین گوی‌هایی را توپولوژی استاندارد در $\mathbb{R}^k$ می‌خوانیم.

فضای توپولوژیک X را یک فضای هاسدورف[1] گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی $x, y \in X$ با قید $x \neq y$، یک همسایگی U حول x و یک همسایگی V حول y یافت شوند به‌طوری‌که $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۲–۱–۳. فرض کنیم Σ یک σ– جبر از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی دلخواه Ω و τ توپولوژی استاندارد روی مجموعه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد گوییم تابع مختلط $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ نسبت به σ– جبر Σ اندازه پذیر است هرگاه

$$\forall\, O \in \tau, \quad f^{-1}(O) \in \Sigma,$$

[1] Hausdorff

که در اینجا $f^{-۱}(O) = \{x \in \Omega : \quad f(x) \in O\}$.

تعریف ۲ــ۱ــ۴. فرض کنیم Σ یک σ- جبر در مجموعه‌ی دلخواه Ω و $\mu : \Sigma \longrightarrow [۰, \infty]$ یک تابع مجموعه‌ای باشد.

الف) تابع μ را جمع‌پذیر متناهی [۲] گوییم هرگاه برای هر گردایه‌ی متناهی از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای Σ مانند $\{E_۱, E_۲, \cdots, E_n\}$، داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{n} E_i) = \sum_{i=۱}^{n} \mu(E_i).$$

ب) تابع μ را زیرجمع پذیر شمارا [۳] گوییم هرگاه برای هر گردایه‌ی شمارا مانند $\{E_i : \quad i \in \mathbb{N}\}$ از اعضای σ- جبر Σ در Ω، داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(E_i).$$

ج) تابع μ را جمع‌پذیر شمارا [۴] گوییم هرگاه برای هر گردایه‌ی شمارا مانند $\{E_i : \quad i \in \mathbb{N}\}$ از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای یک σ- جبر Σ در Ω، داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(E_i).$$

د) تابع μ را یک اندازه مثبت می‌نامیم هرگاه

۱) $\mu(\emptyset) = ۰$،

۲) μ جمع‌پذیر شمارش‌پذیر باشد،

بدیهی است که هر اندازه‌ی مثبت روی Σ تابعی افزایشی است یعنی اگر داشته باشیم $A, B \in \Sigma$، آن‌گاه از فرض $A \subset B$ نتیجه می‌شود $\mu(A) \leq \mu(B)$.

هـ) اندازه‌ی مثبت μ را متناهی گوییم هرگاه به ازای هر $E \in \Sigma$ داشته باشیم $\mu(E) < \infty$. در این حالت بدیهی است که $\mu(\Omega) < \infty$. عکس مطلب نیز درست است. یعنی اگر $\mu(\Omega) < \infty$ باشد آن‌گاه μ یک اندازه‌ی متناهی است.

و) اندازه‌ی $\mu : \Sigma \longrightarrow [۰, \infty]$ را σ- متناهی [۵] گوییم هرگاه بتوان Ω را به‌صورت $\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i$ نوشت که در آن برای هر n داشته باشیم $E_n \in \Sigma$ و $\mu(E_n) < \infty$. در صورت لزوم می‌توان E_n ها را در σ- جبر

---

[۲] Finitely additive
[۳] Conutably Sub-additive
[۴] Conutably additive
[۵] σ- finite

Σ دوبه‌دو مجزا انتخاب کرد. علاوه براین، در صورتی که ضرورت ایجاب کند می‌توان E_n هارا در Σ صعودی انتخاب کرد.

ز) تابع مجموعه‌ای $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک اندازه‌ی مختلط گوییم هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر $\sigma-$ جبر Σ در Ω با قید $E_i \cap E_j = \emptyset$ برای $i \neq j$، اولاً سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ همگرا باشد و ثانیاً داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

اگر در تعریف بالا مقادیر μ همگی حقیقی باشند، آن‌گاه μ را یک اندازه‌ی حقیقی می‌نامیم. اگر μ روی Σ یک اندازه‌ی مثبت باشد به‌طوری‌که $\mu(\Omega) < \infty$، آن‌گاه می‌توان آن‌را یک اندازه‌ی مختلط یا حقیقی به‌حساب آورد.

تعریف ۲—۱—۵. برای اندازه‌ی مختلط μ روی $\sigma-$ جبر Σ، تغییرات کلی[۶] μ را با نماد $|\mu|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|\mu|(E) = \sup\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)|,$$

که در آن سوپریمم روی تمام افرازهای $\{E_i\}_i \subset \Sigma$ از $E \in \Sigma$ گرفته می‌شود. می‌توان نشان داد که $|\mu|$ یک اندازه‌ی مثبت و متناهی روی $\sigma-$ جبر Σ است. بنابراین، برای هر $E \in \Sigma$ داریم $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) < \infty$. همچنین می‌توان نشان داد

$$|\mu|(E) = \sup\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|,$$

که در آن سوپریمم روی تمام افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \Sigma$ از E گرفته می‌شود. برای مشاهده‌ی جزییات بیشتر به [۱۳] مراجعه کنید.

تعریف ۲—۱—۶. برای مجموعه‌ی دلخواه Ω، اگر Σ یک $\sigma-$ جبر روی Ω و μ یک اندازه‌ی مثبت (یا مختلط) روی Σ باشد، آن‌گاه سه تایی (Ω, Σ, μ) را یک فضای اندازه[۷] مثبت (یا مختلط) می‌گوییم.

---

[۶] Total variation
[۷] Measure space