دانشگاه الزهرا(س)
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

روش های اختلال هموتوپی، تجزیه آدومیان و اصلاح هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و مقایسه آنها

استاد راهنما

دکتر شهناز طاهری

استاد مشاور

دکتر داریوش بهمردی

پژوهشگر

الهه ایوبی

مهر۱۳۹۱

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید(نهج البلاغه، خطبه شماره ۱).
پیشانی شکر بر آستان حضرتش می سایم که به من شور گام نهادن در مسیر فراگیری دانش را عطا فرموده و مرا در تمام تحصیل یاری نمود.
در آغاز به رسم ادب بر دستان پر مهر پدر و مادر مهربانم بوسه می زنم که از شیره جانشان مرا پروراندند تا توان راه رفتن و اندیشه را بیابم.
همچنین بر خود بایسته می دانم از زحمات بی‌دریغ استاد فرزانه ام، خانم دکتر طاهری ،صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر بهمردی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و با روشنگری ها و صبر و حوصله خود در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
همچنین از جناب آقای دکتر اردوخانی و آقای دکتر ادیبی که با تجارب ارزنده شان در داوری و ارزیابی این پایان نامه اهتمام ورزیده اند، با قلبی سرشار از ادب و ارادت کمال سپاسگزاری را دارم.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا روش تجزیه آدومیان و اختلال هموتوپی را برای معادلات تابعی بررسی می کنیم و سپس این دو روش را برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می گیریم .این دو روش می توانندجواب تقریبی بسیاری از معادلات دیفرانسیل را تعیین کنند. اما روش اختلال هموتوپی برای معادلاتی مانند براتو کارا نیست. از این رو با یک اصلاح روی روش اختلال هموتوپی جواب تقریبی این معادله را نیز تعیین کرده و با روش تجزیه آدومیان مقایسه خواهیم کرد.

بعد از آن یک اصلاح جدید از روش تحلیل هموتوپی HAM بیان شده است که در مورد معادلات دیفرانسیل همگن یا غیرهمگن با ضرایب ثابت یا متغیر به کاررفته است.

سپس یک مقایسه بین روش تحلیل هموتوپی اصلاح شده $(MHAM)$ و روش تحلیل هموتوپی (HAM) کلاسیک ارائه خواهد شد.

مزیت اصلی $MHAM$ این است که می توان از بروز مسایل غیر قابل کنترل با شرایط نقطه ی انتهایی غیرصفر که در روش HAM کلاسیک ایجاد می شود اجتناب کرد.

در نهایت مثال های ارائه شده کارایی و قابل اطمینان بودن $(MHAM)$ را نشان می دهد.

واژه های کلیدی: چندجمله ای های آدومیان، روش تجزیه آدومیان ،روش اختلال هموتوپی، روش تحلیل هموتوپی، روش تحلیل هموتوپی اصلاح شده، معادلات آمدن- فولر، معادلات تابعی ، معادلات دیفرانسیل ریکاتی.

فهرست مطالب

مقدمه

در بررسی بسیاری از پدیده های فیزیکی و در زمینه های مختلف علوم مهندسی همواره مسائلی مطرح می شود که مدل سازی ریاضی آنها منجر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی ، جزئی، تصادفی و یا معادلات انتگرال و انتگرال - دیفرانسیل می شوند. نکته مهم در علوم ریاضی عبارت است از اصلاح فیزیکی جوابی از این دستگاه ها که توسط چنین معادلاتی مدل سازی شده اند، به صورتی که این جواب ، یک جواب واقعی مسأله باشد. درعمل تمام مسائل مکانیک غیرخطی هستند.سیستم های غیرخطی با روش های تقریبی که شامل نوعی خطی سازی هستند حل می شوند. به این ترتیب یک سیستم غیرخطی عملاً با یک سیستم خطی معادل جایگزین می شود و سپس عمل میانگین گیری انجام می شود که عموماً صحیح نیست. فرآیند خطی سازی در شرایط خاصی مسأله اصلی را به یک مسئله متفاوت تبدبل می کند. استفاده از نظریه اختلالات جزئی نیز معقول به نظر می رسدکه تأثیرات جمله غیرخطی و یا پارامترهای تصادفی بسیارناچیز باشد. در مورد روش گسسته سازی و محاسبات عددی ، نیز پارامترهای هم چون تحلیل زمان محاسباتی، نیاز به سخت افزارخاص و ... مطرح است.

روش تجزیه آدومیان که در اوائل ۱۹۸۰ ابداع شدبر مبنای فرضیات ذکرشده استوار است. با به کار بردن این روش پاسخ های صحیحی در وضعیتی قویاً غیر خطی برای تمام شرایط به دست می آید. درحال حاضر روش تجزیه آدومیان یک ابزاربسیار قدرتمند برای حل معادلات تابعی است و در حقیقت یک روش سری می باشد که معادلات زیادی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی ، جزئی، خطی یا غیرخطی و دستگاه های تصادفی و معادلات جبری را بادقت قابل توجهی حل می کند.

روش تحلیل هموتوپی (HAM) اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط دانشمند چینی شی جان لیائو [۱]

[۱] S.J.Lia

در رساله ی دکتری وی مطرح گردید [۴۳] .
او این روش را به عنوان یک روش تحلیلی کلی برای حل مسایل خطی و غیرخطی معرفی کرد [۴۴] . در سال های اخیر این روش بسیار موفقیت آمیز بوده و برای حل بسیاری از مسایل خطی و غیر خطی در علوم مهندسی به کار رفته است. [۵, ۲۲, ۳۹, ۴۶ − ۴۸, ۵۴]
موفقیت همه این کاربردها با درستی ، کارایی و انعطاف پذیری (HAM) سازگار بوده است.
(HAM) در بیشتر نمونه ها خیلی سریع همگرایی سری جواب نتیجه می دهد و معمولاً با تعداد کمی تکرار ، در همان ابتدا به جواب های دقیق می رسیم.
از این رو روش تحلیل هموتوپی لیائو یک روش عمومی است که می توان انواع معادلات دیفرانسیل خطی یا غیرخطی، همگن یا غیرهمگن و با ضرایب ثابت یا متغیر را حل کرد.
این رساله در پنج فصل تنظیم گردیده است، در فصل اول سیر تاریخی روش تجزیه آدومیان را به صورت مختصر مرور کرده و ساختار کلی روش را برای حل معادلات دیفرانسیل مطرح می کنیم. همچنین مفاهیم اساسی نظریه تجزیه و سری تجزیه ای آدومیان را به طور خلاصه بیان می کنیم، سپس چندجمله ای های آدومیان را معرفی کرده و فرمولی برای محاسبه ی چندجمله ای های آدومیان ارائه می دهیم. در فصل دوم ابتدا مقدماتی را در مورد واژه هموتوپی بیان و سپس ساختار روش اختلال هموتوپی را برای حل معادلات تابعی بیان می کنیم در ادامه به بحث در مورد همگرایی این روش خواهیم پرداخت و با ارائه قضایایی در این مورد ، همگرایی روش را بررسی خواهیم کرد. در فصل سوم دو روش تجزیه آدومیان و اختلال هموتوپی را برای یافتن جواب های تقریبی انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل به کار می بریم و با توجه به نتایج به دست آمده مقایسه ای بین این دو روش صورت می پذیرد. در فصل چهارم یک اصلاح روش تحلیل هموتوپی را بیان کرده و برای اثبات کارایی روش تحلیل هموتوپی اصلاح شده ($MHAM$) در مقایسه با روش تحلیل هموتوپی چند مثال بیان می کنیم.در نهایت در فصل پنجم یک ساختار ($MHAM$) برای حل دستگاه معادلات دیفرانسل در حالت کلی مطرح و به بیان یک مثال در این زمینه می پردازیم.
این پایان نامه به طور عمده برگرفته از مقالات [۱،۳،۱۵،۲۳] می باشد.

فصل ۱

ساختار کلی روش تجزیه آدومیان

۱.۱ سیر تاریخی روش تجزیه آدومیان

در سال های اخیر روش تجزیه آدومیان در طیف وسیعی از مسائل تصادفی وغیر تصادفی در بسیاری از زمینه های جالب ریاضی و فیزیک به کار برده شده است. در واقع روش تجزیه در سال ۱۹۶۱ به وجود آمد. اما به اندازه کافی برای ارائه در مسائل ریاضی کافی نبود.جورج آدومیان [۱] (۱۹۹۶ – ۱۹۲۰) به تدریج این روش را گسترش داد و در سال ۱۹۸۱ روش تجزیه ای - که به نام خودش منسوب است- را برای حل معادلات عملگری خطی تصادفی ارئه نمود. این روش بین سال های ۱۹۹۲ – ۱۹۸۱ به سرعت برای حل پاره ای از مسائل غیرخطی فراگیر شد. در سال ۱۹۸۲ ، ، آدومیان روش را برای معادلات دیفرانسیل تصادفی از مرتبه بالا مورد استفاده قرار داد. اولین اثر وی در قالب یک مجموعه مدون برای اولین بار در سال ۱۹۸۳ توسط انتشارات آکادمیک منتشر شد[۱۰] . یک سال بعد دومین اثر وی با همکاری ریچارد بلمن [۲] ، در ارتباط با معادلات دیفرانسیل جزئی و ارائه روش های جدیدی برای حل آنها ارائه شد[۱۴]. سومین اثر وی در سال ۱۹۸۹ منتشر گردید [۱۲] .

که در آن روش تجزیه آدومیان در دو بخش جدا از هم مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در بخش اول کتاب روش تجزیه با جزئیات کامل مرور می شود و در بخش دوم ، وی بیشتر به کاربردهای روش برای حل مسائل فیزیکی نظیر گرما، مسأله غیرخطی پلاسما و غیره می پردازد.

---
[۱] G.Adomian
[۲] Richard Belman

در طی ۱۶ سال ، از سال ۱۹۸۱ تا ۱۹۹۶ ، او کاربردهای فیزیکی و نظری روش را در بیشتر از ۸۰ مقاله ارائه داد. در سال ۱۹۹۴ ، آخرین اثر آدومیان منتشر شد [۱۳] . وی در این کتاب به ارائه روش تجزیه ای جهت ارائه حل مسائل مقدار اولیه و مرزی با شرایط مرزی پیچیده و هم چنین گونه جدیدی از روش تجزیه خویش می پردازد.

بحث همگرایی روش در اوائل سال ۱۹۸۹ توسط شغو [۳] برای اولین بار در [۲۵] مطرح شد ، نتایج بیشتر در مورد همگرایی روش و بحث نظری در مورد نظریه تجزیه ای آدومیان در سال ۱۹۹۲ در پایان نامه دکتری لیونل گابت [۴] و با راهنمایی شغو آمده است. در بین همین سال ها، بسیاری از دانشجویان و همکاران شغو در تحقیقات خود به کاربردهایی از روش تجزیه آدومیان در مسائل کاربردی با شرایط ویژه و هم چنین همگرایی روش اشاره کرده اند، شغو و ابویی [۵] این روش را برای حل معادله غیرخطی $f(x) = 0$ به کار بردند و همگرایی آن را به جواب دقیق اثبات کردند[۶]. بابلیان وهمکارانش روش تجزیه آدومیان را برای حل دستگاه معادلات خطی به کار برده و معادل بودن این روش را با روش تکراری ژاکوبی اثبات کردند[۱۵]. عباس بندی روش نیوتن - رافسون را برای حل معادله غیرخطی $f(x) = 0$ ، [۳] و روش نیوتن را برای حل دستگاه معادلات غیر خطی دو متغیره بر اساس روش تجزیه آدومیان را توسعه داده است [۲] .

امروزه توجه زیادی به سری جواب در روش آدومیان شده است و حل انواع معادلات غیر خطی و خطی به روش تجزیه آدومیان مورد توجه محققین زیادی قرارگرفته است. درحل یک معادله تابعی خطی روش تجزیه آدومیان جواب هایی بهتر از روش کلاسیک تقریبات متوالی نمی دهد و علاوه برآن اگر روش تقریبات متوالی برای حل یک معادله خطی واگرا باشد آن گاه روش تجزیه آدومیان نیز برای حل آن معادله واگراست. در حالی که درحل معادلات تابعی غیرخطی به روش تجزیه آدومیان می توان بهبود در جواب به دست آمده را نسبت به سایر جواب های کلاسیک مشاهده کردو در این حالت روش تجزیه نتایج معتبر و قابل اعتمادی را ارائه می دهد که به سرعت به جواب واقعی معادله همگراست.

---

[۳] Cherruault
[۴] Lionnel Gabet
[۵] Abboui

۲.۱ روش تجزیه آدومیان (ADM)

روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات تابعی به صورت

$$F(u(x)) = g(x), \tag{۱.۱}$$

به کار می رود، که در آن F یک عملگر از فضای باناخ β به توی β است، $g(x)$ یک تابع معلوم در β وهدف تعیین $u \in \beta$ است که در معادله (۱.۱) صدق کند. فرض می کنیم که معادله (۱.۱) به ازای هر $g(x) \in \beta$ دارای جواب یکتاست.به علاوه فرض می کنیم عملگر F دارای جملات خطی و غیرخطی باشد، اگر قسمت خطی را با B و بخش غیرخطی را با N نمایش دهیم، داریم $F = B + N$ قسمت خطی B را می توان به صورت $L + R$ تجزیه کرد که در آن L یک عملگر معکوس پذیر و R قسمت باقیمانده عملگر خطی است. بنابراین عملگر F را می توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$F = L + R + N.$$

با این فرضیات معادله ی (۱.۱) چنین نوشته می شود

$$L(u) + R(u) + N(u) = g.$$

پس

$$L(u) = g - R(u) - N(u),$$

با اعمال L^{-1} درطرفین معادله بالا خواهیم داشت

$$L^{-1}(L(u)) = L^{-1}[g - R(u) - N(u)],$$

درنتیجه

$$u = h + L^{-1}(g) - L^{-1}(R(u)) - L^{-1}(N(u)). \tag{۲.۱}$$

این معادله را صورت کانونی معادله (۱.۱) می نامیم. تابع h با اعمال شرایط اولیه روی $L^{-1}(L(u))$ پدید آمده است و برای آن داریم

$$L(h) = 0.$$

حال برمی گردیم به رابطه (۲.۱) وقرار می دهیم

$$f = h + L^{-1}(g)$$
$$L = -L^{-1}(R)$$
$$G = -L^{-1}(N),$$

خواهیم داشت

$$u = f + L(u) + G(u). \tag{۳.۱}$$

در استفاده از روش تجزیه آدومیان تابع مجهول $u(x)$ به صورت سری نامتناهی زیر بیان می شود

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

وتجزیه عملگر غیرخطی $G(u)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

که درآن A_n چندجمله ای هایی از $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n$ هستند این چندجمله ای ها را چندجمله ای های آدومیان می نامند. فرض کنید شکل صریحی برای چندجمله ای های آدومیان داشته باشیم، یعنی با توجه به صورت عملگر غیرخطی N ، A_n هارا به صورت توابعی از $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n$ به دست آورده باشیم. با این تجزیه ، رابطه (۳.۱) به شکل زیر نوشته می شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f + L(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n).$$

در نتیجه با توجه به خطی بودن L داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f + \sum_{n=0}^{\infty} L(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n). \tag{۴.۱}$$

با توجه به رابطه (۴.۱) ، u_n ها، را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\begin{aligned}
u_0 &= f\\
u_1 &= L(u_0) + A_0(u_0)\\
u_2 &= L(u_1) + A_1(u_0, u_1)\\
&\vdots\\
u_{n+1} &= L(u_n) + A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n).
\end{aligned}$$

همچنین چندجمله ای های آدومیان از رابطه زیر به دست می آیند

$$A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) = \frac{1}{m!}[\frac{d^n}{d\lambda^n}G(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\lambda^i)]_{\lambda=0}.$$

لذا مادامیکه A_n ها برای $n = 0, 1, 2, \cdots$ معین باشند، تمامی مؤلفه های u_n ها (جواب مسأله) را می توان محاسبه کرد. به دلیل زیاد بودن تعداد جملات u_n ، u را می توان به صورت مجموع n جمله از سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ تقریب زد. بنابراین تقریب n جمله ای ϕ_n رابرای جواب مسئله به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\phi_n = \sum_{m=o}^{n-1} u_m,$$

به طوری که

$$lim_{n\to\infty}\phi_n = u_0.$$

ساختار کلی روش تا این مرحله به راحتی می تواند در عمل پیاده سازی شود و لیکن نمایش فوق از روش تجزیه آدومیان قادر به توجیه و تفسیر بسیاری از فرضیات و سؤالات نیست. سؤالات زیر در این باره مطرح خواهد بود. سری $\sum A_n$ ازکجا ناشی می شود؟ آیا سری همواره همگراست؟ چه سری های دیگری را می توان به جای سری $\sum A_n$ مورد استفاده قرار داد؟ تحت چه شرایطی سری $\sum A_n$ همگراست؟چه موقع می توان این روش را به کار برد؟ $\cdots$

۳.۱ مفاهیم اساسی در نظریه تجزیه

فرض کنید E یک فضای باناخ و G یک عملگر غیرخطی است.

تعریف ۱.۳.۱. (سری تجزیه ای از مرتبه متناهی p)
یک سری تجزیه ای از مرتبه متناهی p عبارت است از سری $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ ، که هر C_k یک تابع E مقداری از $p(k+1)$ متغیر زیر خواهد بود.

$$X_0^{(1)}, \cdots, X_k^{(1)}, \cdots, X_0^{(p)}, \cdots, X_k^{(p)}.$$

سری تجزیه ای از مرتبه یک را سری تجزیه ای می نامیم.

تعریف ۲.۳.۱. (همگرایی ضعیف سری تجزیه ای از مرتبه متناهی p)
یک سری تجزیه ای از مرتبه متناهی p همگرایی ضعیف است اگر برای هر گردایه از p سری همگرا در $E(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)}, \cdots, \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)})$ سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(u_0^{(1)}, \cdots, u_k^{(1)}, \cdots, u_0^{(p)}, \cdots, u_k^{(p)}),$$

در E همگرا باشد.

تعریف ۳.۳.۱. (مجموع یک سری تجزیه ای همگرا از مرتبه متناهی p)
یک سری تجزیه ای از مرتبه متناهی p به طور قوی همگراست اگر اولاً: همگرایی ضعیف باشد. ثانیاً: مجموع آن فقط به مجموع این سری در E بستگی داشته باشد، یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(i)}, \quad \forall i \in [1, p]$$

$$\Longrightarrow \quad S(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)}, \cdots, \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)}) = S(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)}, \cdots, \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(p)}).$$

یادداشت : مجموع تمام سری های تجزیه ای همگرای قوی از مرتبه متناهی p ، یک فضای برداری است[۲۹].

تعریف ۴.۳.۱. (مجموع تباهیده از یک سری تجزیه ای همگرای قوی از مرتبه متناهی p)
با استفاده از تعریف قبلی مجموع S از یک سری تجزیه ای همگرا با مرتبه متناهی p ، اگرهمگرایی قوی باشد، عملگر جدید S^* را خواهیم داشت که E را به E می نگارد. S^* و S می تواند یکی باشند.

یادداشت : فرض کنید S مجموع یک سری تجزیه ای همگرای قوی از مرتبه متناهی p باشد،در این صورت برای هر گردایه $(u^{(1)},\cdots,u^{(p)})$ از اعضای E ، $(u^{(1)},\cdots,u^{(p)})$ به دلیل همگرایی قوی به وسیله $S(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)},\cdots,\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)})$ تعریف می شود که هر $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)}$ یک سری همگرا در E با مجموع u^i است. با توجه به خواص این سری ، می توان یکی از آنها را انتخاب کرد که به یک جمله مساوی با u^i تبدیل می شود. لذا می توان نوشت

$$S(u^{(1)},\cdots,u^{(p)})=S^*(u^{(1)},\cdots,u^{(p)}).$$

تعریف ۱.۳.۵. (فرآیند تجزیه ای)
فرض کنید $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(X_0,\cdots,X_k)$ یک سری تجزیه ای همگرای قوی باشد. فرآیند تجزیه ای مرتبط با $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ عبارت است از روند بازگشتی زیر

$$u_0=0 \quad , \quad u_{n+1}=C_n(u_0,\cdots,u_n),$$

که سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ را در E به دست می دهد. (توجه کنید که چون هر C_n تابعی از $u_0,\cdots,u_n$ بوده و به جملات قبلی اش وابسته است، لذا سری فوق می تواند ساخته شود.)

تعریف ۱.۳.۶. روش تجزیه روشی است که جواب یک معادله را با درنظر گرفتن جواب به صورت یک سری تجزیه به دست می دهد.

تعریف ۱.۳.۷. (سری تجزیه ای اصلی)
سری تجزیه ای اصلی متناظر با عملگر G ، عبارت است از سری $\sum B_n$ به طوری که

$$B_0=G(X_0) \quad , \quad B_n=G(\sum_{i=0}^{n} X_i)-G(\sum_{i=0}^{n-1} X_i).$$

(هر B_n یک نگاشت از E^{n+1} به توی E است.)

قضیه ۱.۳.۸. (همگرایی سری تجزیه ای اصلی)
سری تجزیه ای اصلی $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ متناظر با عملگر پیوسته G ، یک سری تجزیه ای از مرتبه یک است که همگرایی قوی بوده و مجموع تباهیده آن G است.

تعریف ۹.۳.۱. (سری تجزیه ای اصلی متناظر با عملگر خطی)
سری تجزیه ای اصلی $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ ، متناظر با عملگر خطی L عبارت است از

$$B_0 = L(X_0) \quad , \quad B_n = L(X_n).$$

قضیه ۱۰.۳.۱. (همگرایی سری تجزیه آدومیان)
سری چند جمله ای های آدومیان ، $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ متناظر با تابع تحلیلی G ، یک سری تجزیه ای از مرتبه یک تعریف می کند که همگرای قوی بوده و مجموع تباهیده آن G است.

قضیه ۱۱.۳.۱. (همگرایی روند تجزیه ای)
هر روند تجزیه ای ، متناظر با یک سری تجزیه ای همگرای قوی که مجموع تباهیده آن S است، یک سری همگرا با مجموع U به دست می دهد، به طوری که $U = S(U)$ و G انقباضی است.

برهان. فرض کنید $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ یک سری تجزیه ای همگرای قوی با مجموع تباهیده S و $\bar{S}$ مجموع آن باشد(یعنی برای تمام سری های همگرای $\sum_{i=0}^{\infty} V_i$ و $\bar{S}(\sum_{i=0}^{\infty} V_i) = S(\sum_{i=0}^{\infty} V_i)$) توجه کنید که $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ ، سری حاصل از روند تجزیه ای و متناظر با $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ است. فرض کنید S انقباضی است ، در این صورت u وجود داردبه طوری که $u = S(u)$ همچنین توجه کنید که $\bar{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_i$ سری تعریف شده به وسیله روند بالا است.

$$\forall \quad i \geq 1, n, \quad \bar{u_i} = 0 \quad , \quad \bar{u_0} = u_0.$$

با استفاده از فرآیند $\bar{u}^{(0)} = \bar{u}$ و $\bar{u}^{(n+1)} = \bar{S}(0 + \bar{u}^{(n)})$ یک دنباله از سری $u(n)$ را به دست می آوریم. از آن جا که $u = S(u)$ ، مجموع هر $u^{(n)}$ ، u است. همچنین می توان تحقیق کرد که N جمله اول $u^{(N)}$ با N جمله اول $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ مساوی است. اگر برای هر دو سری همگرای $\bar{w}$ و $\bar{v}$ داشته باشیم $\bar{R}_n(\bar{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_k(\bar{w})$ ، $\bar{R}_n(\bar{v}) = \bar{R}_n(0 + \bar{v})$ آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|u - \sum_{i=0}^{N} u_i\| &= \|\sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_i^{(N)} - \sum_{i=0}^{N} u_i\| \\
&= \|\bar{R}_N(\bar{u}^{(N)})\| \\
&= \|\hat{R}_N.\hat{R}_{N-1} \cdots R_0(\bar{u})\|.
\end{aligned}$$

از آن جا که $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ یک سری تجزیه ای همگرای قوی است، $\hat{R}_N$ و $\bar{R}_N$ به صفر همگرایند. بنابراین $\sum_{i=0}^{N} u_i$ به u همگراست، لذا روند تجزیه ای منجر به سری $\sum_{i=0}^{N} u_i$ می شود که مجموع آن ، جواب u از معادله $u = S(u)$ است. $\square$

یادداشت: توجه کنید که همگرایی روش تجزیه ای را با جمع کردن طرفین تساوی های زیر نمی توان به دست آورد.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= C_0(u_0) \\ u_2 &= C_1(u_0, u_1) \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= C_n(u_0, u_1, \cdots, u_n). \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

زیرا همگرایی سری $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ از همگرایی سری $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(u_0, u_1, \cdots, u_k)$ نتیجه می شود یعنی $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(u_0, u_1, \cdots, u_k)$ همگراست، اگر $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ همگرا باشد و همگرایی $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ تا این مرحله برای مامعلوم نیست.
یادداشت : معمولاً در عمل ، تمامی جملات سری $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ را نمی توان محاسبه نمود. لذا جواب دقیق $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ را نمی توان به دست آورد. در این صورت یک تقریب با اندازه کافی نزدیک ، با استفاده از چند جمله ی اول سری $\rho_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ برای جواب به دست می آوریم.

۱.۴ چند جمله ای های آدومیان

فرض کنید G یک تابع تحلیلی و $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ یک سری همگرا در β باشد، با توجه به تعریف داریم

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n).$$

با استفاده از پارامتر λ می توان $G_\lambda(u)$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$G_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n)\lambda^n, \tag{۱.۶}$$

وخود تابع مجهول u را با استفاده از پارامتر λ به صورت زیر می نویسیم

$$u(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\lambda^i.$$

حال اگر از رابطه ی (۶.۱) نسبت به λ مشتق مرتبه ی n ام بگیرید و قرار دهیم $\lambda=0$ ، داریم

$$[\frac{d^n}{d\lambda^n}G_\lambda(u)]_{\lambda=0}=[\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n)\lambda^n]_{\lambda=0}. \qquad (۷.۱)$$

از طرفی

$$\begin{aligned}&[\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n)\lambda^n]_{\lambda=0}\\&=[\frac{d^n}{d\lambda^n}(A_0(u_0)+A_1(u_0,u_1)\lambda+A_2(u_0,u_1,u_2)\lambda^2+\cdots)]_{\lambda=0}\\&=[n!A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n)+(n+1)!A_{n+1}(u_0,u_1,\cdots,u_{n+1})\lambda+\cdots]_{\lambda=0}\\&=n!A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n).\end{aligned}$$

با جایگذاری نتیجه به دست آمده در (۷.۱) خواهیم داشت

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}G_\lambda(u)\mid_{\lambda=0}=n!A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n),$$

و لذا با توجه به $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\lambda^n$ رابطه ی زیر نتیجه می شود.

$$A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n)=\frac{1}{n!}[\frac{d^n}{d\lambda^n}G(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\lambda^i)]_{\lambda=0},\quad n=0,1,2,\cdots$$

رابطه ی بالا تعریفی برای محاسبه ی چندجمله ای های آدومیان است . در ضمن روش های دیگری نیز برای محاسبه ی آنها وجود دارد که در قسمت بعدی ارائه خواهیم کرد.
پنج جمله اول چندجمله ای های آدومیان در حالت کلی برای یک تابع غیر خطی $f(u)$ عبارت

است از

$$
\begin{aligned}
&A_0 = f(u_0)\\
&A_1 = u_1 f^{(1)}(u_0)\\
&A_2 = u_2 f^{(1)}(u_0) + (\frac{1}{2!}) u_1^2 f^{(2)}(u_0)\\
&A_3 = u_3 f^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + (\frac{1}{3!}) u_1^3 f^{(3)}(u_0)\\
&A_4 = u_1 f^{(1)}(u_0) + [(\frac{1}{2!}) u_2^2 + u_1 u_3] f^{(2)}(u_0) + (\frac{1}{2!}) u_1^2 u_2 f^{(3)}(u_0) + (\frac{1}{4!}) u_1^4 f^{(4)}(u_0)\\
&A_5 = u_0 f^{(1)}(u_0) + [u_2 u_3 + u_1 u_4] f^{(2)}(u_0) + [(\frac{1}{2!}) u_1 u_2^2 + \frac{1}{2!}) u_1^2 u^3] + f^{(3)}(u_0) +\\
&\quad (\frac{1}{3!}) u_1^3 u_2 f^{(4)}(u_0) + (\frac{1}{5!}) u_1^5 f^{(5)}(u_0).
\end{aligned}
$$

۵.۱ ارتباط بین چند جمله ایهای آدومیان و بسط تیلور- مک لورن

با توجه به تعریف چند جمله ای های آدومیان می توان بین این چند جمله ای و بسط تیلور- مک لورن یک ارتباطی برقرار کرد.
با توجه به رابطه

$$A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) = \frac{1}{n!}[\frac{d^n}{d\lambda^n} G(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i)]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

فرض کنیم $v(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i$ ، قرار می دهیم $F = Gov$ در این صورت به راحتی مشاهده می شود که A_n ها را می توان با فرمول ساده مک لورن به صورت زیر نوشت

$$A_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}. \qquad (8.1)$$

بنابراین می توان قضیه زیر را بیان نمود:

قضیه ۱.۵.۱. *سری توانی آدومیان $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n$ عبارت است از بسط مک لورن تابع $F = Gov$ (توجه داریم که برای اثبات همگرایی روش ، نمی توان از این سری تیلور استفاده کرد زیرا تابع F وقتی تعریف می شود که سری $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ همگرا باشد.)*