دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

نگاهی تصادفی به انتگرال لبگ

از

نساء پوراسماعیل جانباز فومنی

استاد راهنما

دکتر علی اصغر ورسه‌ای

مهر ۱۳۸۹

وجود عالم محسوس و تمامی حرکات و تغییرات آن از سنت‌هایی نشأت گرفته است که در عالمی ورای این عالم آفریده شده‌اند و شناخت این سنت‌ها نیازمند قدرت یافتن و رشد بشر است. این پایان نامه گوشه‌ای از تلاش آدمی برای ورود به بیتی از آن منظومه‌ی پر رمز و راز است.

به‌امید درک رازهای پنهانی قصیده‌ی آسمانی عشق،

حاصل کارم را به **خانواده‌ی عزیزم**

تقدیم می‌کنم.

تشکر و قدردانی

خداوندا اگر بخواهم آن‌چه در ذهن دارم با تو بگویم هزاران جلد کتاب می‌شود ولی آن‌چه در دل دارم جمله‌ای بیش نیست. به‌خاطر همه‌ی نعمت‌هایی که عطایم کردی سپاس‌گزارم.

اکنون که خدای مهربان یاری‌ام کرد تا قدم در راه آموختن علم بگذارم و احساس شور و عشق به فراگیری دانش ریاضی را در وجودم نهاد، وظیفه‌ی خود می‌دانم از همه‌ی بزرگوارانی که که در راه رسیدن به اهدافم یاری‌ام کردند قدردانی کنم. ابتدا می‌خواهم از پدر و مادرم تشکر کنم. پدر مهربانم که الفبای ریاضی را به من آموخت و با بیانی ساده و جذاب در تدریس مفاهیم ریاضی انگیزه‌ی وارد شدن به دنیای شگفت انگیز ریاضیات را در من ایجاد کرد و مادر فداکارم که از هر لحاظ حمایتم نمود.

از استاد راهنمای بسیار عزیز و مهربانم جناب آقای **دکتر علی اصغر ورسه‌ای** که همیشه مانند یک پدر پشتیبانم بودند و با صبر و حوصله راهنمایی‌ام کردند سپاس‌گزاری می‌کنم. شاگردی ایشان همواره افتخار بزرگی است، که نصیب من شد. علمی که از دانش بی‌کران ایشان فرا گرفتم تنها علم ریاضی نبود، لحظه به لحظه‌ی ساعاتی که در محضرشان حضور داشتم برایم درسی از زندگی بود.

در ادامه از اساتید بزرگوارم جناب آقای **دکتر داود احمدی دستجردی** به‌خاطر قبول زحمت داوری پایان‌نامه‌ام و جناب آقای **دکتر حسین صمیمی** که علاوه بر پذیرفتن زحمت داوری پایان‌نامه همیشه با راهنمایی‌ها و توصیه‌هایی سودمند، یاری‌ام کردند سپاس‌گزاری می‌کنم.

همچنین از دوست گرامی‌ام سرکار خانم **الهام دسترنج** دانشجوی دکتری ریاضی محض، که همیشه مرا از نظرات و راهنمایی‌های مفید و دقیق خود بهره‌مند ساختند و زمان زیادی را برایم صرف کردند کمال قدردانی و سپاس را دارم.

در پایان از تمام دوستان عزیزم به‌ویژه خانم‌ها سمیه حق پور، نساء قاسمی، مریم حدیدی، مینو خوش اقبال، طلیعه پوراسماعیل جانباز و خواهر مهربانم بهناز پوراسماعیل جانباز که در طول نگارش این پایان‌نامه یاری‌ام کردند صمیمانه تشکر می‌کنم و برای همه‌ی این بزرگواران از خدای متعال سلامتی و توفیق روزافزون خواستارم.

با احترام

نساء پوراسماعیل جانباز

مهر ۱۳۸۹

فهرست مطالب

چکیده:

نگاهی تصادفی به انتگرال لبگ

نساء پوراسماعیل جانباز فومنی

در این پایان نامه ابتدا روی تابع حقیقی و اندازه پذیر f، $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ و دنباله افرازهای $\{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 1}$ روی $[0,1]$ دنباله‌ی مجموع‌های تصادفی ریمان را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم وقتی نرم دنباله افرازها به صفر همگرا است، دنباله‌ی مجموع‌های تصادفی ریمان تابع f دراحتمال به انتگرال لبگ f میل می‌کند. سپس انواع دیگر همگرایی را برای دنباله‌ی مجموع‌های تصادفی ریمان بررسی می‌کنیم.

کلید واژه :
مجموع تصادفی ریمان، انتگرال تصادفی ریمان، انتگرال نخستین بازگشت، انتگرال لبگ.

Abstract:

Title: A Random Look at Lebesgue Integral

Nesa Pouresmaeil Janbaz Foumani

In this dissertation, we first present the concept of random Riemann sums for a real valued measurable function f, f:[0,1]$\rightarrow \mathbb{R}$ and a sequence of partitions of [0,1]. We show the corresponding sequence of random Riemann sums converges in probability to the Lebesgue integral when the norms of partitions tends to zero and we investigate the kinds of convergenses.

Keywords:

Random Riemann sum; Random Riemann integral; First return integral; Rimann sum; Lebesegue integral.

مقدمه

لوی[۱] در سال ۱۹۵۲ تعریف جدیدی برای به‌دست آوردن انتگرال ارائه داد. به این ترتیب که برای هر $f \in L_p(a,b)$، مجموع ریمان را برای نقاط تصادفی $t_i^{(n)}$، $n \geq i \geq 1$ و برای هر $n \geq 1$، $a < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} < b$، به‌صورت $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i^{(n)})(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})$ تعریف کرد و حاصل حد S_n را **انتگرال تعمیم یافته** نامید [۱۵].

بعد از این مقاله، تاکاهاشی[۲] در سال ۱۹۵۶ ثابت کرد اگر $(a,b) = (0,1)$ و t_i^nها دارای توزیع یکنواخت روی $(0,1)$ باشند برای هر $p > 1$، دنباله‌ی مجموع‌های ریمان لوی با احتمال یک به انتگرال لبگ f روی $(0,1)$ همگرا است. همچنین ثابت کرد این دنباله برای $p = 1$ در احتمال به انتگرال لبگ f روی $(0,1)$ میل می‌کند[۱۷].

در پی این دو مقاله بررسی‌های جدیدی پیرامون چگونگی انتخاب نقاط تصادفی صورت گرفت و در نتیجه تعریف‌های جدیدی برای مجموع ریمان بیان شد([۷]،[۱۳]،[۱۴]،[۱۰]،[۱۱]،[۵]،[۱۶]). در تعاریف جدید به این پرسش‌ها هم پاسخ داده شد که آیا دنباله‌ی مجموع‌های ریمان تابع f، در احتمال به انتگرال لبگ f همگرا است؟ درباره‌ی همگرایی قریب به یقین (Almost surely) آن چه می‌توان گفت؟

این رساله در شروع، براساس مقاله‌ی [۱۱] تهیه و تدوین شده و شامل ۵ فصل است. در فصل اول به مفاهیم آنالیز حقیقی و در فصل دوم به مفاهیم مقدماتی نظریه احتمال می‌پردازیم. در فصل سوم دنباله‌ی مجموع‌های تصادفی ریمان را روی تابع حقیقی و اندازه پذیر f، $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ودنباله افرازهای $\{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 1}$ روی $[0,1]$ تعریف می‌کنیم. حاصل حد در احتمال دنباله‌ی مجموع‌های تصادفی ریمان را «انتگرال تصادفی ریمان» (random Riemann integral) می‌نامیم. می‌دانیم شرط لازم و کافی برای انتگرال پذیری ریمان تابع f این است که f کراندار و مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی‌اش دارای اندازه‌ی لبگ صفر باشد. در مورد همگرایی انتگرال تصادفی ریمان نیز به شرطی هرچند ضعیف‌تر نیاز داریم. در این فصل خواهیم دید انتگرال تصادفی ریمان تابع f وجود دارد و برابر است با انتگرال لبگ f، هرگاه f انتگرال پذیر لبگ باشد و نتیجه می‌گیریم مجموع تصادفی ریمان تابع f دراحتمال به انتگرال لبگ‌اش میل می‌کند. در فصل چهارم خواهیم دید همگرایی قریب‌به‌یقین دنباله مجموع‌های تصادفی ریمان به انتگرال لبگ f در حالت کلی برقرار نیست و با قرار دادن شرایطی روی اندازه‌ی

---

[۱] Levy
[۲] Takahashi

دنباله افرازها به این همگرایی می‌رسیم. از آنجایی که ایده‌ی انتگرال تصادفی ریمان از مبحث «انتگرال‌های نخستین بازگشت» (First return integrals) گرفته شده است، بنابراین فصل پنجم پایان نامه به بیان تعاریف و قضایایی از این مبحث اختصاص دارد. مفاهیم مربوط به انتگرال‌های نخستین بازگشت در مقالات مختلف به‌طور گسترده مطالعه می‌شود ([۵]، [۸]) و رابطه‌ی آن با مجموع تصادفی ریمان این است که اگر مسیرها در تعریف انتگرال نخستین بازگشت مسیرهای تصادفی باشند آنگاه در هر زیربازه‌ی افراز $\mathcal{P}$ نقاط نخستین بازگشت با نقاط تصادفی مجموع تصادفی ریمان هم توزیع‌اند و این هم توزیعی، نتایج مهمی را به‌دنبال دارد.

فصل ۱

مفاهیمی از آنالیز حقیقی

۱−۱ اندازه و اندازه پذیری

تعریف ۱−۱−۱ فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های X باشد.

۱) $\mathcal{C}$ را یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های X گوییم اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو $\mathcal{C}$ برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۲) $\mathcal{C}$ را یک حلقه از زیرمجموعه‌های X گوییم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳) $\mathcal{C}$ را یک نیم‌میدان (نیم‌جبر) از زیرمجموعه‌های X گوییم اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک‌های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۴) $\mathcal{C}$ را یک $\sigma-$ میدان از زیرمجموعه‌های X گوییم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماع‌های شمارش پذیر و مکمل بسته باشد.

مثال ۱−۱−۲ دسته‌های گوناگون از بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب‌های دکارتی آنها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم‌حلقه‌ها هستند. همچنین دسته‌های گوناگون از بازه‌ها و شعاع‌ها و حاصلضرب‌های دکارتی آنها و اجتماع‌های آنها الگوهای مناسبی به ترتیب برای نیم‌جبرها و جبرها هستند.

تعریف ۱−۱−۳ فرض کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی و دلخواه از زیرمجموعه‌ها باشد. منظور از یک اندازه روی $\mathcal{C}$ تابعی مانند μ با دامنه $\mathcal{C}$ است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای A در $\mathcal{C}$، $0 \leq \mu(A) \leq \infty$،

۲) هرگاه $\{A_n,\ n \geq 1\}$، دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد به‌طوری‌که $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{C}$ آنگاه $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

خاصیت (۲) را $\sigma-$جمع پذیری برای μ می‌گوییم.

تعریف ۱−۱−۴ فرض کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های X باشد. کوچکترین $\sigma-$جبر شامل $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های X را $\sigma-$جبر تولید شده توسط $\mathcal{C}$ می‌نامیم و به صورت $\sigma(\mathcal{C})$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(\mathcal{C})$ اشتراک تمام $\sigma-$ جبرهای شامل $\mathcal{C}$ است.

تعریف ۱–۱–۵ فرض کنید $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{C}$ دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد. σ–جبر تولید شده توسط $\mathcal{C}$ را σ–جبر بورل گوییم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت $(a,b]$ یا $[a,b)$ یا $[a,b]$ یا (a,b) که در آن a وb اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد $\mathcal{B}$اند.

ملاحظات ۱–۱–۶

الف) به‌طور کلی در یک فضای توپولوژیکی σ– جبر تولید شده توسط مجموعه‌های باز را σ–جبر بورل می‌نامیم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم.

ب) دسته‌ی مجموعه‌های بورل، کوچکترین σ–جبری است که حاوی همه‌ی مجموعه‌های باز است.

تعریف ۱–۱–۷ فرض کنید $\mathcal{C}$ سازه‌ای (نیم‌حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیرمجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی $\mathcal{C}$ باشد. اندازه μ را روی $\mathcal{C}$، متناهی گوییم هرگاه برای هر A در $\mathcal{C}$، $\mu(A) < \infty$ و σ– متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n,\ n \geq ۱\}$ از اعضای $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۱–۱–۸ فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی، $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی $\mathcal{H}$ باشد. همچنین فرض کنید دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد که اندازه‌ی هر جمله‌ی آن متناهی است و این دنباله X را بپوشاند (به عنوان الگو می‌توان X را $\mathbb{R}$ و $\mathcal{H}$ را نیم‌حلقه‌ی بازه‌ها درنظر گرفت). برای زیر مجموعه‌ی دلخواه A از X اندازه‌ی خارجی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq ۱} \mu(I_n)\ \ : I_n \in \mathcal{H}\ ,\ A \subset \bigcup_{n\geq ۱} I_n\}.$$

ملاحظات ۱–۱–۹

الف) برای $I \in \mathcal{H}$، $\mu^*(I) = \mu(I)$.

ب) اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های X باشد آنگاه

$$\mu^*(\bigcup_{n\geq ۱} A_n) \leq \sum_{n\geq ۱} \mu^*(A_n).$$

برهان: به [۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱–۱–۱۰ زیر مجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یا μ) اندازه پذیرگوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم $\mu(I) = \mu^*(I \bigcap A) + \mu^*(I - A)$.

ملاحظات ۱–۱–۱۱

الف) هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه پذیرند.

ب) اگر A نسبت به μ^* اندازه پذیر باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه دلخواه B از X داریم

$$\mu(B) = \mu^*(B \bigcap A) + \mu^*(B - A).$$

در تحقیق تساوی بالا برای A، مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی آزمونی می‌گوییم.

برهان: به [۱] رجوع کنید

□

قضیه ۱–۱–۱۲ دسته‌ی مجموعه‌های اندازه پذیر نسبت به μ^* یک σ–جبر در X شامل $\mathcal{H}$ و μ^* یک اندازه روی این σ–جبر است. تحدید μ^* به $\mathcal{H}$ برابر μ است.

برهان: به [۱] رجوع کنید.

□

قضیه ۱–۱–۱۳ (قضیه گسترش کاراتئودوری)[۱] اگر $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X و μ اندازه‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که تعداد شمارش پذیر از اعضای $\mathcal{H}$ با اندازه‌ی متناهی X را بپوشاند، آنگاه μ گسترشی یگانه به یک اندازه روی $\sigma-$ جبر تولید شده توسط $\mathcal{H}$ در X دارد.

برهان: به [۱] رجوع کنید.

□

---

[۱] Caratheodory

تعریف ۱—۱—۱۴ اگر $X=\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی بازه‌ها (یا جعبه‌ها) و μ تابع طول (یا تابع حجم) باشد، زیر مجموعه‌های اندازه پذیر $\mathbb{R}$ (یا$\mathbb{R}^n$) نسبت به μ^* (براساس تعریف ۱—۱—۱۰) اصطلاحا «اندازه پذیر لبگ» نامیده می‌شود و دسته‌ی چنین مجموعه‌هایی را «σ—جبر لبگ» می‌نامیم.

تعریف ۱—۱—۱۵ منظور از یک فضای اندازه پذیر عبارت است از زوج $(X,\mathcal{A})$، که متشکل از یک مجموعه مانند X و $\sigma-$ جبر $\mathcal{A}$، از زیرمجموعه‌های X می‌باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ را یک مجموعه‌ی اندازه پذیر می‌نامیم.

تعریف ۱—۱—۱۶ منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X,\mathcal{A},\mu)$ است که $(X,\mathcal{A})$ یک «فضای اندازه‌پذیر» و μ یک «اندازه» روی σ—جبر $\mathcal{A}$ است.

ملاحظات ۱—۱—۱۷ در فضای اندازه‌ی $(X,\mathcal{A},\mu)$،

الف) برای A_iهای دوبه‌دو مجزا $(i=1,\ldots,n)$، اگر $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{A}$ و $\bigcup_{i=1}^n A_i\in\mathcal{A}$ آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n\mu(A_i)$. این خاصیت را متناهیا جمع‌پذیری برای μ گوییم.

ب) اگر $B\in\mathcal{A}$ و $A\subseteq B$ آنگاه $\mu(A)\leq\mu(B)$. این خاصیت را یکنوایی برای μ گوییم.

پ) اگر $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{A}$ آنگاه داریم

$$\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)\leq\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n).$$

ت) اگر $A\in\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mu(A)<\infty$ آنگاه $\mu(\emptyset)=0$.

برهان: به [۱] رجوع کنید.

□

تعریف ۱—۱—۱۸ فرض کنید $(X,\mathcal{A})$ و $(Y,\mathcal{A}')$ فضاهای اندازه پذیر باشند. تابع f، $f:X\longrightarrow Y$ را اندازه پذیر نسبت به $(\mathcal{A}',\mathcal{A})$ گوییم، اگر برای هر $A'\in\mathcal{A}'$ داشته باشیم، $f^{-1}(A')\in\mathcal{A}$. از این پس هرگاه $\sigma-$ جبرهای مفروض مشخص باشند و نیاز به تصریح نباشد، به‌طور ساده f را اندازه پذیر گوییم، هرگاه شرط یادشده برقرار باشد.

ملاحظه ۱—۱—۱۹ اگر f تابعی حقیقی و پیوسته باشد، دراین‌صورت f تابعی اندازه پذیر است.

برهان: به [۱] رجوع کنید.

□

ملاحظه ۱ــ۱ــ۲۰ گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، تقریبا همه‌جا $(a.e.)$ برقرار است، اگر و تنها اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه پذیر و دارای اندازه‌ی μ صفر باشد.

۱ــ۲ انتگرال ریمان

قرارداد: از این به بعد در سراسر رساله اندازه‌ی لبگ مجموعه‌ی بورل A را با نماد $|A|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱ــ۲ــ۱ افراز $\mathcal{P}$ روی $[a,b]$ عبارت است از دسته‌ای متناهی از زیربازه‌های جدا از هم $[a,b]$، مانند $\{I_k \subseteq [a,b] : ۱ \leq k \leq n \ , n \in \mathbb{N}\}$، به‌طوری‌که برای هر $۱ \leq k \leq n$، $|I_k| > ۰$.
توجه می‌کنیم که هر مجموعه از بازه‌های ناتهی جدا از هم به‌طور طبیعی توسط اعداد طبیعی مرتب می‌شود. این ترتیب را با $<$ نشان داده و فرض می‌کنیم برای هر $n \geq ۱$، $I_۱ < I_۲ < \cdots < I_n$.

اکنون نرم افراز $\mathcal{P}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{|I_k| \ : \ I_k \in \mathcal{P}\}.$$

تعریف ۱ــ۲ــ۲ فرض کنید f تابعی حقیقی و $\mathcal{P}$ افرازی روی بازه $[a,b]$ باشد. اگر برای هر $۱ \leq k \leq n$، t_k نقطه‌ی دلخواهی از زیربازه‌ی I_k از افراز $\mathcal{P}$ باشد، آنگاه مجموع ریمان متناظر با افراز $\mathcal{P}$ و تابع f که آن را با نماد $S(\mathcal{P}, f)$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=۱}^{n} f(t_k) I_k.$$

گوییم تابع f انتگرال پذیر ریمان است هرگاه عددی حقیقی مانند A و برای هر $\varepsilon > ۰$ افرازی مانند $\mathcal{P}_\varepsilon$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $\mathcal{P}_\varepsilon \subseteq \mathcal{P}$ و هر انتخاب t_k از زیر بازه‌های افراز $\mathcal{P}$، $| S(\mathcal{P}, f) - A | < \varepsilon$. چنین Aای درصورت وجود یکتا است و آن را انتگرال ریمان f تابع می‌نامیم و با نماد $\int_{[a,b]} f dx$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱—۲—۳ فرض کنید f بر بازه‌ی $[a,b]$ کراندار و E مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی f روی بازه $[a,b]$ باشد، در این صورت f انتگرال پذیر ریمان است، اگر و فقط اگر مجموعه‌ی E دارای اندازه‌ی لبگ صفر باشد.

برهان: به [۲] رجوع کنید.

□

۱—۳ انتگرال لبگ

تعریف ۱—۳—۱ اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σ—جبر $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & if\ x \in A \\ ۰ & if\ x \notin A \end{cases}$$

تعریف ۱—۳—۲ تابع ساده، تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ با مقادیر متمایز $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$، a_n باشد. می‌توان نوشت $\varphi = \sum_{i=۱}^{n} a_i\chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\}$ روشن است که A_iها مجزا هستند.

اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_iها اندازه پذیرند. انتگرال φ نسبت به اندازه‌ی μ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=۱}^{n} a_i\mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $۰ = \infty \times ۰$.

تعریف ۱—۳—۳ فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ باشد (برای $A \in \mathcal{A}$، $\varphi\chi_A$ نیز یک تابع ساده می‌باشد). انتگرال φ روی A را تعریف می‌کنیم

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \varphi\chi_A d\mu = \sum_{i=۱}^{n} \mu(A_i \bigcap A).$$

تعریف ۱—۳—۴ فرض می‌کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A\in\mathcal{A}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_A f d\mu = \sup\{\int \varphi d\mu : \varphi \leq f\},$$

که در آن φ تابع ساده و نامنفی است.

قضیه ۱—۳—۵ «قضیه‌ی همگرایی یکنوا»
اگر $f_۱$، $f_۲$، $\cdots$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر، نامنفی و صعودی باشد و $\lim_{n\to\infty} f_n = f$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

برهان: به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱—۳—٦ فرض کنیم f تابعی اندازه پذیر روی X و $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{A}$ باشد و $A=\bigcup_{i=۱}^n A_i$، در این صورت خواهیم داشت

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=۱}^{\infty}\int_{A_i} f d\mu.$$

برهان: به [۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱—۳—۷ تابع اندازه پذیر و نامنفی f را روی مجموعه‌ی اندازه پذیر A «انتگرال پذیر» گوییم، هرگاه

$$\int_A f d\mu < \infty.$$

تعریف ۱—۳—۸ اگر f تابعی حقیقی با دامنه‌ی دلخواه باشد، متناظر با f، برای هر x از دامنه‌ی f، توابع f^- و f^+، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^-(x) = \max\{-f(x), ۰\}\ , \quad f^+(x) = \max\{f(x), ۰\}.$$

f^+ و f^- را به‌ترتیب جزء مثبت و جزء منفی f می‌نامیم. دراین‌صورت $f = f^+ - f^-$، یعنی هر تابع اندازه پذیر را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع اندازه پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم $\mid f \mid = f^+ + f^-$ و $(f)^+ = f^-$ $-$. روشن است که اگر f اندازه پذیر باشد، آنگاه f^+ و f^- نیز اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱ـ۳ـ۹ فرض کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه باشد. تابع اندازه پذیر f که روی X تعریف شده است را انتگرال پذیر گوییم، هرگاه $\int f^+$ و $\int f^-$ متناهی باشند. دراین‌صورت، $\int fd\mu = \int f^+d\mu - \int f^-d\mu$.

تعریف ۱ـ۳ـ۱۰ درحالت خاص وقتی μ اندازه‌ی لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد، به تعریف «انتگرال لبگ» می‌رسیم.

۱ـ۴ فضاهای L_p

تعریف ۱ـ۴ـ۱ فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و $V = v(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی و اندازه پذیر روی X باشد. برای $p \geq ۱$ تعریف می‌کنیم

$$L_p = L_p(X) = \{f \in V : \int \mid f \mid^p d\mu < \infty\}.$$

تعریف ۱ـ۴ـ۲ برای هر $f \in L_p$، نرم f به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\parallel f \parallel_p = \left(\int \mid f \mid^p d\mu\right)^{\frac{۱}{p}}.$$

ملاحظات ۱ـ۴ـ۳

۱) روشن است که f دارای انتگرال متناهی است اگر و فقط اگر $\mid f \mid$ دارای انتگرال متناهی باشد.

۲) اگر $f \in L_۱$ آنگاه $|\int fd\mu| \leq \int \mid f \mid d\mu$.

۳) اگر f و $g \in L_۱$،

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A fd\mu = \int_A gd\mu \iff \int |f-g|d\mu = ۰ \iff f = g \quad a.e. .$$

۴) اگر f_n دنباله‌ای از توابع انتگرال پذیر باشد که $f_n \to f \quad a.e.$ و $\int fd\mu < \infty$ آنگاه

$$\int |f_n - f|d\mu \to ۰ \iff \int |f_n|d\mu \to \int |f|d\mu.$$

برهان: به [۹] رجوع کنید. □

قضیه ۱-۴-۴ (نامساوی مینکوسکی [۲]) اگر f و g برای هر $1 \leq p \leq \infty$ به L_p متعلق باشند، آنگاه $f+g$ نیز به آن تعلق دارد و داریم

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p .$$

برهان: به [۹] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱-۴-۵ در فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$، اگر $\mu(X) < \infty$، p و q اعداد حقیقی باشند که $1 \leq p \leq q$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$، تابعی متعلق به $L_q(X)$ باشد. در این صورت، $f \in L_p(X)$.

برهان: به [۱] رجوع کنید. $\square$

ملاحظه ۱-۴-۶ در فضای اندازه $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$ که در آن μ اندازه شمارنده و $V = v(X)$ مجموعه‌ی همه دنباله‌های حقیقی و اندازه پذیر باشد، برای هر $p \geq 1$ داریم

$$L_p = \left\{ \{a_n\}_{n\geq 1} \in V : \int \mid a_n \mid^p d\mu < \infty \right\} = \left\{ \{a_n\}_{n\geq 1} \in V : \sum_{n\geq 1} \mid a_n \mid^p < \infty \right\}.$$

در این حالت فضای L_p را با نماد ℓ_p نشان می‌دهیم.

---

[۲] Minkowski

فصل ۲

مفاهیمی از نظریه احتمال