دانشگاه‌محقق اردبیلی

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

عنوان :

قضیه نقطه ثابت برای نگاشت های چند مقداری انقباضی در فضای متری کامل

استاد راهنما :

دکتر محمد باقر مقیمی

استاد مشاور :

دکتر عباس نجاتی

پژوهشگر :

مریم فرزانه حمیداباد

مهر ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادرمهربانم

تقدیر و تشکر

اینک که این مرحله را پشت سر می‌گذارم، از تلاشها، زحمات ومحبت های پدر ومادر عزیزم تشکر می کنم و خدای خود را شکر می‌کنم که چنین نعمت های گران بهایی را نصیبم کرد.

همچنین بر خود لازم می‌دانم ازراهنمایی های دلسوزانهٔ استاد عزیز و گرانمایه‌ام، جناب آقای دکتر محمد باقرمقیمی تشکر کنم که همواره با صبر و حوصله فراوان، مرا در انجام این پایان نامه مساعدت نمودند.

مریم فرزانه حمیداباد

مهر ۱۳۸۸

نام خانوادگی: فرزانه حمیداباد **نام:** مریم

عنوان پایان نامه:
قضیه نقطه ثابت برای نگاشت های چند مقداری انقباضی در فضای متری کامل

استاد راهنما: دکترمحمّدباقر مقیمی

استاد مشاور: دکتر عباس نجاتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض—آنالیز **دانشگاه:** محقق اردبیلی
دانشکده: علوم **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۸۸/۷/۷ **تعداد صفحه:** ۶۸

کلید واژه‌ها :
نگاشت های چند مقداری ، فضای متری کامل ، نگاشت های انقباضی ، نقطه ثابت ، نیم پیوسته پایینی .

چکیده:
قضیه نقطهٔ ثابت برای نگاشت های چند مقداری انقباضی اولین بار به وسیله نادلر در سال ۱۹۶۹ مطرح شد . سپس این موضوع توسط دیگران در جهات مختلف مورد بررسی قرار گرفته و توسیع داده شده است .
در این پایان نامه روند توسیع قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای نگاشت های چند مقداری انقباضی در صور مختلف مطرح و مورد بررسی قرار می گیرد .
روشهای استفاده شده برای اثبات قضایا مختلف ودر عین حال ساده می باشد.
به تازگی کریک ، قضیهٔ نقطهٔ ثابت را برای نگاشت های چند مقداری غیر خطی انقباضی مطرح و ثابت کرده است.
در انتها مثال های مختلفی مطرح می گردند که هماهنگ بودن این توسیع را با قضیهٔ نقطهٔ ثابت نادلر نشان می دهد.

فهرست مندرجات

۱ مفاهیم اولیه و مقدمات ۱

۱.۱ توپولوژی پایه ۲

۱.۱.۱ فضای متری ۲

۲.۱ دنباله ها و سری ها ۳

۱.۲.۱ دنباله ها ۳

۲.۲.۱ سری ها ۵

۳.۱ نگاشت های چند مقداری ۵

۲ نقاط ثابت توابع چند مقداری ۱۹

۱.۲ تاریخچه ۲۰

۱.۱.۲ مقدمه ۲۰

۲.۲ قضایای نقطهٔ ثابت ۲۱

۳.۲ قضایای تعمیم یافته نقطهٔ ثابت ۲۶

۴.۲ مثالها ۵۴

۵.۲ بحث و نتیجه‌گیری ۶۲

الف مراجع ۶۳

ب واژه نامه ۶۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۶

فصل ۱

مفاهیم اولیه و مقدمات

۱.۱ توپولوژی پایه

۱.۱.۱ فضای متری

یک فضای متری عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط مانند X همراه با تابعی مانند d از $X \times X$ به R که دارای خواص زیر باشد:

۱) اگر $p, q \in X$ و $p \neq q$ ، آن گاه $d(p,q) > 0$ و $d(p,p) = 0$ ؛

۲) $d(p,q) = d(q,p)$ ؛

۳) به ازای هر $p, q, r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

مجموعۀ X توأم با تابع d را فضای متری X با متر d گویند و به صورت (X,d) نشان می‌دهند. تابع d را که در شرایط فوق صدق می کند یک متر گویند.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای متری باشد. یک همسایگی به مرکز p، و به شعاع r مجموعه ای است مرکب از تمامی نقاطی چون q از X که $d(p,q) < r$. همسایگی به مرکز p و به شعاع r را معمولا با $N_r(p)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱ اگر E یک مجموعۀ غیرخالی باشد نقطه $p \in E$ را یک نقطه درونی E می نامیم هرگاه یک گوی باز به مرکز p مانند $N_r(p)$ وجود داشته باشد به طوری که $N_r(p) \subseteq E$.

مجموعه همه نقاط درونی E را درون E می نامیم و با E° نمایش می دهیم.

مجموعه E در X باز است هرگاه هر نقطه E یک نقطه درونی باشد یعنی $E \subseteq E^\circ$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیر خالی از X باشد ، a را یک نقطه حدی E می‌نامیم هرگاه به ازای هر همسایگی محذوف a مانند $N_r(a)$ داشته باشیم $N_r(a) \cap E \neq \emptyset$.

مجموعه‌ی نقاط حدی E را با E' نمایش می دهیم.

مجموعه E را بسته‌گوییم هرگاه E شامل تمامی نقاط حدی خود باشد یعنی $E' \subset E$.

نکته : مجموعه E بازاست اگر وفقط اگر E^c بسته باشد و مجموعه E بسته است اگروفقط اگر E^c باز باشد.

تعریف ۴.۱.۱ هرگاه X یک فضای متری بوده و $E \subseteq X$ آن گاه بست E عبارت است از $E \cup E'$ که این مجموعه را با $\overline{E}$ نشان می دهیم .

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای متری باشد و $E \subseteq X$، گردایه‌ی $\{G_\alpha\}$ از مجموعه های باز X را یک پوشش باز E گویند هرگاه $E \subseteq \cup G_\alpha$.

تعریف ۶.۱.۱ زیر مجموعه E از فضای متری X رافشرده نامند هرگاه هر پوشش باز E حاوی زیرپوششی متناهی باشد یعنی هرگاه گردایه‌ی $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز برای E باشد آن گاه اندیسهایی همچون $\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n$ از I وجود داشته باشد به طوری که $E \subseteq \cup_{i=۱}^{n} G_{\alpha_i}$.

۲.۱ دنباله ها و سری ها

۱.۲.۱ دنباله ها

یک دنباله در R^n تابعی است مانند f که دامنه اش اعداد طبیعی و برد آن R^n است در صورتی که مقدار تابع در نقطه $n \in N$ را به جای $f(n)$ با a_n نشان دهیم آن گاه این دنباله را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\{a_n\}_{n=۱}^{\infty} = \{a_۱, a_۲, \dots a_n, \dots\}$$

دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای متری X راهمگرا می نامیم هرگاه نقطه‌ای مانند $p \in X$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد.

به ازای هر $\epsilon > ۰$ عدد طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که هرگاه $n \geq N$ آن گاه $d(x_n, p) < \epsilon$. در این صورت می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p$$

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنید (X,d) فضای متری باشد و $E \subseteq X$ در این صورت اگر $p \in E'$ آن گاه دنباله‌ای از E مانند $\{x_n\}$ هست به طوری که $\lim_{n \to \infty} x_n = p$.

لم ۸.۲.۱ اگر $\{D_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} D_n = \delta$ آن گاه

$$\forall\epsilon > \circ, \quad \exists N, \quad \forall n > N, \quad \delta \leq D_n < \delta + \epsilon.$$

اثبات : چون $\lim_{n\to\infty} D_n = \delta$ پس

$$\forall\epsilon > \circ, \quad \exists N, \quad \forall n > N \Longrightarrow \mid D_n - \delta \mid < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N, \quad \delta - \epsilon < D_n < \epsilon + \delta$$

چون $\{D_n\}$ دنباله‌ای نزولی است . پس $D_n > \delta \quad \forall n > N$ پس داریم

$$\forall n > N, \quad \delta \leq D_n < \delta + \epsilon$$

□

تعریف ۹.۲.۱ دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متری X با متر d را یک دنبالهٔ کشی گوییم هر گاه در شرط زیر صدق کند:

به‌ازای هر $\epsilon > \circ$، عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد به‌طوری که‌اگر $m, n \geq N$، آن گاه

$$d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

تذکر. واضح است که در هر فضای متری X ، هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کشی است.

قضیه ۱۰.۲.۱ فضای متری X را کامل (تام) می نامیم هرگاه در آن هر دنبالهٔ کشی همگرا باشد.

قضیه فشردگی : اگر $\{h_n\}$ و$\{g_n\}$ دنباله‌هایی باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} g_n = L$$

هر گاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد به طوری که به ازای هر $n \geq N$ ، $h_n \leq f_n \leq g_n$ آن گاه $\lim_{n\to\infty} f_n = L$

قضیه ۱۱.۲.۱

۱) $x^* \in E$ ، یعنی حد پایین یک دنباله خود حد یک زیر دنباله از دنباله است .

۲) چنانچه $a > x^*$ عددی صحیح مانند N هست به طوری که $n \geq N$ نامساوی $x_n < a$ را ایجاب می کند.

بعلاوه x^* تنها عددی است که از خواص (۱) و (۲) برخوردار است.

روابط فوق را برای x_* نیز می توان به طور مشابه بیان کرد.

۲.۲.۱ سری ها

فرض کنید $\{a_n\}$ دنبالهٔ مفروضی باشد به کمک این دنباله، دنبالهٔ $\{s_n\}$ را به صورت زیرتعریف نموده و آن را سری می نامیم.

$$s_۱ = a_۱ \quad s_۲ = a_۱ + a_۲ \ldots s_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k \ldots$$

همگرایی یک سری : هرگاه $\{s_n\}$ همگرا به s باشد . یعنی $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ آن گاه سری را همگرا و s را مقدار همگرایی می نامیم. در صورتی که $\{s_n\}$ واگرا باشد آن گاه سری را واگرا گویند.

قضیه محک کشی برای سری ها : سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است اگرو فقط اگر به ازای هر $\epsilon > ۰$ عدد طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که‌اگر $m, n \geq N$، داشته باشیم : $| \sum_{k=n}^{m} a_k | \leq \epsilon$

۳.۱ نگاشت های چند مقداری

فرض کنیم (X, d) فضای متری کامل $N(X)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های X و $CL(X)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های ناتهی بسته X و $CB(X)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های ناتهی بسته و کراندار X و $comp(X)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های ناتهی فشردهٔ X باشد. برای هر A, B از $CB(X)$ تعریف می کنیم.

$$H(A, B) = max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

که درآن

$$\delta(A,B)=\sup\{D(a,B): a\in A\}$$

و

$$D(x,A)=\inf_{y\in A} d(x,y)$$

مثال : اگر $X=R$ و $A=[۱,۲]$ و $B=[۲,۳]$ آن گاه

$\delta(A,B)=\sup_{a\in A} D(a,B)=۱$ ، $\delta(B,A)=\sup_{b\in B} D(b,A)=۱$

بنابراین

$$H(A,B)=max\{\sup_{a\in A} D(a,B),\sup_{b\in B} D(b,A)\}=۱$$

لم ۱۲.۳.۱ اگر A و B زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی و $A\subseteq B$ ، آن گاه

$$\inf A\geq inf B$$

قضیه ۱۳.۳.۱ اگر (X,d) فضای متری کامل و $A,B,C\in CB(X)$ باشد ثابت کنید

$a)\quad \delta(A,B)=۰\Longleftrightarrow A\subseteq B$

$b)\quad B\subset C\Longrightarrow \delta(A,C)\leq\delta(A,B)$

$c)\quad \delta(A\cup B,C)=max\{\delta(A,C),\delta(B,C)\}$

$d)\quad \delta(A,B)\leq\delta(A,C)+\delta(C,B)$

اثبات :

اثبات a) بنا به تعریف δ داریم

$$\delta(A,B)=۰\Longrightarrow\sup_{x\in A} D(x,B)=۰$$

چون $D(x,B)\geq ۰$ پس

$$\forall x\in A\Longrightarrow D(x,B)=۰$$

چون B در X بسته است وبه ازای هر $x \in A$ ، $D(x,B) = \circ$ پس

$$\forall x \in A \quad x \in B \Longrightarrow A \subseteq B$$

بنابراین حکم ثابت می شود.

چون همه روابط فوق معکوس پذیرند پس عکس قضیه نیز برقرار است.

اثبات b) اگر $x_\circ$ نقطه دلخواهی از X باشد داریم

$$D(x_\circ, C) = \inf\{d(x_\circ, c) \mid c \in C\}$$

چون $B \subseteq C$ پس

$$\{d(x_\circ, b) \mid b \in B\} \subseteq \{d(x_\circ, c) \mid c \in C\}$$

پس بنا به لم ۱۲.۳.۱

$$\inf\{d(x_\circ, c) \mid c \in C\} \leq \inf\{d(x_\circ, b) \mid b \in B\}$$

پس داریم

$$D(x_\circ, C) \leq D(x_\circ, B)$$

رابطهٔ فوق به ازای هر $x_\circ \in A$ برقرار است پس

$$\forall x_\circ \in A \quad D(x_\circ, C) \leq \sup_{x \in A} D(x, B) = \delta(A, B)$$

پس

$$\delta(A, C) \leq \delta(A, B)$$

اثبات c) بنا به تعریف δ داریم

$$\begin{aligned} \delta(A \cup B, C) = \sup_{x \in (A \cup B)} D(x, C) &= \sup_{x \in (A \cup B)} \{\inf\{d(x, c) \mid c \in C\}\} \\ &= max\{\sup_{x \in A}\{\inf\{d(x, c) \mid c \in C\}, \sup_{x \in B}\{\inf\{d(x, c) \mid c \in C\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= max\{\sup_{x\in A} D(x,C), \sup_{x\in B} D(x,C)\} \\ &= max\{\delta(A,C), \delta(B,C)\} \end{aligned}$$

اثبات d) به ازای هر a از A و هر b از B و هر c از C بنا به تعریف متر داریم

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$$

بنابراین

$$D(a,B) = \inf_{y\in B} d(a,y) \leq d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad \forall b \in B, c \in C$$

و این نتیجه می دهد

$$D(a,B) \leq \inf_{z\in C} d(a,z) + d(c,b) = D(a,C) + d(c,b) \quad \forall b \in B, c \in C$$

بنابراین

$$D(a,B) \leq D(a,C) + \inf_{b\in B} d(c,b) \quad \forall c \in C$$

بنابراین

$$D(a,B) \leq D(a,C) + D(c,B)$$

چون بنابه تعریف $D(c,B) \leq \delta(C,B)$ پس

$$D(a,B) \leq D(a,C) + \delta(C,B)$$

و به طور مشابه چون $D(a,C) \leq \delta(A,C)$ پس

$$D(a,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

و چون $a \in A$ دلخواه بود پس

$$\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

وحکم ثابت است. □

لم ۱۴.۳.۱ نشان دهید به ازای هر $a, b, c, d \in X$ داریم

$$max\{a+b, c+d\} \leq max\{a, c\} + max\{b, d\}$$

اثبات : فرض کنیم

$$max\{a+b, c+d\} = a+b \Longrightarrow a+b \geq c+d$$

حالت های زیر را در نظر می گیریم

$$۱) max\{a, c\} = a, \qquad max\{b, d\} = b$$

$$a+b \leq a+b$$

$$۲) max\{a, c\} = c, \qquad max\{b, d\} = b$$

$$a \leq c \Longrightarrow a+b \leq c+b$$

$$۳) max\{a, c\} = a, \qquad max\{b, d\} = d$$

$$b \leq d \Longrightarrow a+b \leq a+d$$

$$۴) max\{a, c\} = c, \qquad max\{b, d\} = d$$

$$a \leq c \ \ , b \leq d \Longrightarrow a+b \leq c+d$$

بنابراین حکم برقرار است. □

قضیه ۱۵.۳.۱ اگر (X, d) فضای متری باشد، آن گاه $(CB(x), H)$ نیز یک فضای متری است.

اثبات : بنا به تعریف H واضح است که

$$H(A, B) \geq ۰, \quad H(A, B) = H(B, A)$$

حال

$$H(A, B) = ۰ \Longleftrightarrow max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} = ۰$$

وچون بنا به تعریف δ ، $\delta(A,B) \geq \circ$ و $\delta(B,A) \geq \circ$ پس

$$\delta(A,B) = \circ, \quad \delta(B,A) = \circ$$

پس بنا به لم ۱۳.۳.۱ خواهیم داشت

$$A \subseteq B, B \subseteq A$$

بنابراین

$$A = B$$

واین یعنی

$$H(A,B) = \circ \Longleftrightarrow A = B$$

از طرفی

$$H(A,B) = max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$$

حال بنا به قسمت (d) قضیه ۱۳.۳.۱، به ازای هر زیر مجموعهٔ C از X خواهیم داشت

$$\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

و

$$\delta(B,A) \leq \delta(B,C) + \delta(C,A)$$

بنابراین

$$H(A,B) \leq max\{\delta(A,C) + \delta(C,B), \delta(B,C) + \delta(C,A)\}$$

و بنا به لم (۱۴.۳.۱) داریم

$$\begin{aligned} max\{\delta(A,C) + \delta(C,B), \delta(B,C) + \delta(C,A)\} &\leq max\{\delta(A,C), \delta(C,B)\} + max\{\delta(B,C), \delta(C,B)\} \\ &= H(A,C) + H(C,B) \end{aligned}$$

پس H یک متر روی $CB(X)$ است که متر هاسدورف نامیده می شود. □

لم ۱۶.۳.۱ تمامیت (X,d) ، تمامیت $(CB(X),H)$ و $(comp(X),H)$ را نتیجه می دهد.

اثبات : واضح است .

تعریف ۱۷.۳.۱ تابع f از X به Y را یک تابع چند مقداری گویند هرگاه برای هر عضواز X زیر مجموعه‌ی از Y نسبت داده شود .

قضیه ۱۸.۳.۱ اگر $A,B \in CB(X)$ و $a_\circ \in A$، آن گاه برای هر $\epsilon > \circ$ ، $b_\circ \in B$ یی وجود دارد به طوری که

$$d(a_\circ, b_\circ) \leq H(A,B) + \epsilon$$

اثبات : ابتدا یادآور می شویم که

$$H(A,B) = max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$$

برای اثبات قضیه فرض می کنیم

$$max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} = \delta(A,B)$$

حال برای هر $\epsilon > \circ$ و $a_\circ \in A$ داریم

$$H(A,B) + \epsilon = max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} + \epsilon$$

$$= \delta(A,B) + \epsilon = \sup\{D(a,B) \mid a \in A\} + \epsilon$$

$$\geq D(a_\circ, B) + \epsilon = \inf\{d(a_\circ, y) \mid y \in B\} + \epsilon$$

حال بنا به خواص inf و بسته بودن B، $b_\circ \in B$ چنان موجود خواهد بود که

$$\inf\{d(a_\circ, y) \mid y \in B\} + \epsilon \geq d(a_\circ, b_\circ)$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$d(a_\circ, b_\circ) \leq H(A,B) + \epsilon$$

و حکم ثابت است. □

قضیه ۱۸.۳.۱ اگر X یک فضای متری باشد، ثابت کنید به ازای هر زیر مجموعه‌ی A, B, C, D از X خواهیم داشت.

$$H(A \cup B, C \cup D) \leq max\{H(A, C), H(B, D)\}$$

اثبات : بنا به تعریف δ داریم

$$\delta(A \cup B, C \cup D) = max\{\delta(A, C \cup D), \delta(B, C \cup D)\}$$

بنا به قسمت (b) قضیه ۱۳.۳.۱، چون $C \subseteq C \cup D$ و $D \subseteq B \cup D$ پس

$$max\{\delta(A, C \cup D), \delta(B, C \cup D)\} \leq max\{\delta(A, C), \delta(B, D)\}$$

از طرفی بنا به تعریف H داریم

$$H(A, C) = max\{\delta(A, C), \delta(C, A)\} \geq \delta(A, C)$$

و به طور مشابه

$$H(B, D) = max\{\delta(B, D), \delta(D, B)\} \geq \delta(B, D)$$

بنابراین

$$max\{\delta(A, C), \delta(B, D)\} \leq max\{H(A, C), H(B, D)\}$$

به طور مشابه می توان نشان داد

$$\delta(C \cup D, A \cup B) \leq max\{H(A, C), H(B, D)\}$$

بنا به تعریف H به ازای هر $A, B, C, D \in CB(X)$ داریم

$$\begin{aligned} H(A \cup B, C \cup D) &= max\{\delta(A \cup B, C \cup D), \delta(C \cup D, A \cup B)\} \\ &\leq max\{H(A, C), H(B, D)\} \end{aligned}$$

وحکم ثابت است. □

تعریف ۱۹.۳.۱ اگر T نگاشتی در فضای متری (X,d) به $CB(X)$ باشد.آن گاه گویند T در شرط لیپ شیتز صدق می کند اگر ثابت $k>0$ یی وجود داشته باشد به طوری که

$$H(T(x),T(y))\leq kd(x,y) \quad \forall x,y\in X$$

تعریف ۲۰.۳.۱ یک نگاشت چند مقداری لیپ شیتز، انقباضی نامیده می شود اگر $k<1$ باشد.

قضیه ۲۱.۳.۱ اگر تابع $\varphi: X\longrightarrow X$ که در آن X یک فضای متری با متر d است یک تابع انقباضی باشد آن گاه φ پیوسته است .

اثبات : برای اثبات پیوسته بودن φ باید نشان دهیم

$$\forall\epsilon>0 \quad , \quad \exists\delta>0 \quad , \quad d(x,y)<\delta\Longrightarrow d(\varphi(x),\varphi(y))<\epsilon \qquad (1.3.1)$$

چون φ انقباضی است پس داریم .

$$d(\varphi(x),\varphi(y))\leq cd(x,y)$$

و چون $d(x,y)<\delta$ پس

$$d(\varphi(x),\varphi(y))\leq c\delta \qquad (2.3.1)$$

پس کافیست قرار دهیم $\delta\leq\frac{\epsilon}{c}$. □

قضیه ۲۲.۳.۱ اگر X فضای متری کامل و$S,T: X\longrightarrow CB(X)$ دو نگاشت چند مقداری با ثابت لیپ شیتز $k<1$ و$F(T)$ مجموعه نقاط ثابت T و$F(S)$ مجموعهٔ نقاط ثابت S باشند و

$$H(S(x),S(y))\leq kd(x,y), \qquad H(T(x),T(y))\leq kd(x,y) \quad \forall x,y\in X$$

آن گاه

$$H(F(S),F(T))\leq(1-k)^{-1}\sup_{x\in X}H(S(x),T(x))$$

اثبات : بنا به آزمون نسبت به راحتی می توان ملاحظه نمود که $\sum_{n=1}^{\infty} nk^n$ یک سری همگراست.
حال C راعددی در نظر می گیریم که

$$C\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < 1$$

فرض کنید $\epsilon > 0$ و $x_0 \in F(S)$ پس $x_0 \in S(x_0)$. بنا به قضیه ۱۸.۳.۱ ، $x_1 \in T(x_0)$ یی وجود دارد به طوری که

$$d(x_0, x_1) \leq H(S(x_0), T(x_0)) + \epsilon \tag{۳.۳.۱}$$

به طورمشابه $x_2 \in T(x_1)$ یی وجود خواهد داشت به طوری که

$$d(x_1, x_2) \leq H(T(x_0), T(x_1)) + \frac{C\epsilon k}{1-k}$$

و چون داریم

$$H(T(x_0), T(x_1)) \leq kd(x_0, x_1)$$

پس

$$d(x_1, x_2) \leq H(T(x_0), T(x_1)) + \frac{C\epsilon k}{1-k} \leq kd(x_0, x_1) + \frac{C\epsilon k}{1-k}$$

با ادامه روند فوق دنباله‌ای همچون $\{x_n\}$ به دست خواهد آمد به طوری که $x_{n+1} \in T(x_n)$ و

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) + \frac{C\epsilon k^n}{1-k}$$

حال قرار می دهیم $\eta = \frac{C\epsilon}{1-k}$. واضح است که

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) + \eta k^n \\
&\leq k(k(d(x_{n-1}, x_{n-2})) + \eta k^{n-1}) + \eta k^n \\
&\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) + 2\eta k^n \\
&\leq \dots
\end{aligned}$$