بسم الله الرحمن الرحيم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شدن از کلمه ایثار و از خود گذشتگی،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناه‌شان به شجاعت می‌گراید،

و به پاس محبت‌های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

این مجموعه را به پدر و مادر مهربانم و استاد راهنمای عزیزم تقدیم می‌کنم.

تقدیر و تشکر

در هر کجا که زنده‌ای، زندگی است.

در هر کجا که زندگی می‌کنی، روحی در تلاش است.

در هر کجا که روحی در تلاش است، مسیری پیداست.

در هر کجا که مسیری پیداست، هدفی روشن است.

در هر کجا که هدفی روشن است،کامیابی نزدیک است.

حمد و سپاس خدای را که فضل و رحمت بی‌منتهایش توفیق دیگری نصیبم کرد تا با استعانت از الطاف بی‌کرانش بتوانم این پایان‌نامه را به نتایج مورد نظر برسانم. بر خود لازم می‌دانم که از کلیه کسانی که به نحوی مرا در انجام این پایان‌نامه یاری رساندند تشکر وقدردانی نمایم. از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر ساعدپناه به عنوان معلم علم و اخلاق تشکر و قدردانی می‌کنم و امیدوارم قدردان لطف و بزرگواریشان نسبت به من، آن‌چنان که شایسته ایشان است باشم.

از استاد مشاور گرامیم جناب آقای دکتر علی‌پناه و همچنین از سایر اساتید گروه ریاضی دانشگاه کردستان، خصوصا جناب آقای دکتر شانظری کمال تشکر را دارم.

در پایان از مادر مهربان و دلسوزم، پدر زحمت‌کش و عزیزم، که دعایشان بدرقه راه من بوده است، همچنین از مهدی و فریده و فروزان عزیزم به خاطر محبت‌های بی‌دریغشان صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه یک معادله‌ی اینتگرو-دیفرانسیل هذلولوی با هسته‌ی از نوع مثبت، با شرایط اولیه و مرزی، در نظر گرفته شده است. مسائلی از این قبیل، به عنوان مثال، در مدلسازی چسبنده-کشسان و نظریه‌ی کشسان خطی استفاده می‌شوند.

از آنجا که معادله‌ی اینتگرو-دیفرانسیل مورد مطالعه از نوع هذلولوی می‌باشد، حل تقریبی مساله به روش عناصر متناهی و آنالیز جواب تقریبی آن مشابه با معادله‌ی موج می‌باشد. در این پایان نامه ابتدا به حل تقریبی معادله‌ی موج به روش عناصر متناهی، در متغیر مکان، پرداخته و تخمین‌های خطای پیشین را برای جواب تقریبی آن و مشتق‌های زمانی و مکانی آن، با روش انرژی، بدست می‌آوریم. سپس روش عناصر متناهی را برای تقریب معادله‌ی اینتگرو-دیفرانسیل، در متغیر مکان، بکار می‌بریم. پایداری مساله‌ی پیوسته و نیم‌گسسته را اثبات نموده و سپس تخمین‌های خطای پیشین از مرتبه‌ی بهینه را می‌یابیم. در نهایت برای بهبود همواری تابع جواب در تخمین خطای پیشین با نرم L_2 روشی را ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی : فرم تغییراتی، روش عناصر متناهی، تخمین پایداری، تخمین خطای پیشین، معادله‌ی اینتگرو دیفرانسیل هذلولوی

فهرست مطالب

مقدمه

برخی مسائل فیزیکی شامل بیش از یک متغیر را می‌توان با معادلات حاوی مشتقات جزئی بیان کرد. روش‌های زیادی برای حل این معادلات که به عنوان معادلات دیفرانسیل جزئی [۱] (PDE) معرفی می‌شوند، وجود دارند، از جمله می‌توان به ایده‌ی عناصر متناهی [۲] (FEM) اشاره کرد. روش عناصر متناهی یک تکنیک عددی برای پیدا کردن جواب‌های تقریبی (PDE) بصورت معادلات انتگرال می‌باشد. یکی از رویکردهای این روش بر اساس انتقال دادن (PDE) به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تقریبی می‌باشد. مزیت روش عناصر متناهی نسبت به روش‌های دیگر، سادگی نسبی آن در پرداختن به شرایط مرزی مساله است. بسیاری از مسائل فیزیکی دارای شرایط مرزی هستند که شامل مشتقات جزئی می‌باشند و در حالت کلی مرز ناحیه‌ی تعریف شده آنها شکلی نامنظم دارد. پرداختن به شرایط مرزی با استفاده از روش‌های دیگر بسیار مشکل است، اما در روش عناصر متناهی، شرایط مرزی بصورت انتگرال‌های از یک تابع بیان می‌شود، که این تابع مینیمم می‌گردد، پس اساس ساخت روند، مستقل از شرایط مرزی خاص مساله است.

روش عناصر متناهی برای حل مسائل کشسانی [۳] پیچیده و طرح محاسبات ساختمانی در مهندسی عمران و فضانوردی به وجود آمده است. استفاده از این روش را در کارهای الکساندر هرینکوف [۴] در سال ۱۹۴۱ و همچنین در گزارش‌های ریچارد کارنت [۵] در سال ۱۹۴۲ می‌توان دید. رویکرد این پیشگامان در بکار بردن این روش، بطور چشمگیری متفاوت است. در دهه ۱۹۵۰ توسعه روش مذکور برای مسائل ناشی شده از بدنه هواپیما و طرح محاسبات ساختمانی در مهندسی عمران را در کارهای ارگریس [۶] و برکلی [۷] در دانشگاه

[۱] Partial differential equations
[۲] Finite element method
[۳] Elasticity
[۴] Alexander Hrennikoff
[۵] Richard Courant
[۶] John Argyris
[۷] Berrkeley

اشتوتگارد [1] می‌توان دید. کتاب آنالیز روش عناصر متناهی در سال **۱۹۷۳** توسط فیکس [2] سترانگ [3]، روش‌های عناصر متناهی را توسعه داد.

در این پایان نامه، ابتدا در فصل اول مروری بر تعاریف و مفاهیمی که در تئوری روش عناصر متناهی بکار برده می‌شوند داریم. و همچنین به مفاهیمی اصلی از فضاهای خطی می‌پردازیم. و در فصل دوم ابتدا روش عناصر متناهی را برای مساله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ای معرفی کرده سپس روش مذکور برای مساله‌ی مدل در حالت دو بعدی یعنی در صفحه در نظر گرفته شده است. همچنین به تخمین خطای پیشین [4] پرداخته که در آن به تحلیل خطا برای جواب روش عناصر متناهی یعنی u_h و همچنین خطای تقریب جواب روش عناصر متناهی به جواب دقیق می‌پردازیم. در فصل سوم به تقریب عددی، به روش عناصر متناهی در متغیر مکان برای مساله‌ی مقدارجواب دقیق آغازین و مرزی معادله‌ی موج می‌پردازیم، و تخمین‌های خطای پیشین را برای جواب تقریبی آن و مشتق‌های زمانی و مکانی آن، بدست می‌آوریم. همچنین تخمین خطای پیشین را برای بهبود همواری جواب اثبات می‌کنیم. در فصل آخر یک معادله‌ی اینتگرو -دیفرانسیل هذلولوی با هسته‌ی نوع مثبت را درنظر می‌گیریم، سپس روش عناصر متناهی نیم گسسته را برای مساله‌ی مذکور فرمول بندی می‌کنیم و تخمین پایداری و فرم تجزیه شده‌ی آن را بدست می‌آوریم. نهایتا تخمین‌های خطای پیشین از مرتبه‌ی بهینه را برای روش عناصر متناهی اثبات می‌کنیم.

[1] Stuttgart

[2] Fix

[3] Strang

[4] A priori error estimates

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل مروری خواهیم داشت بر تعاریف و مفاهیمی که در تئوری روش عناصر متناهی بکار برده می‌شوند. پس از یادآوری مفاهیمی اصلی از فضاهای خطی (فضاهای برداری)، به بیان قضیه‌ی مهم نمایش ریس [۱] و همچنین تعمیم آن یعنی لم لکس-میلگرام [۲] می‌پردازیم. سپس تعاریفی از فضاهای تابعی، از جمله فضاهای L_p و فضاهای سوبولوف، ارائه خواهیم نمود. مطالب آورده شده از مراجع [۱۵] ، [۲۱] و [۲۴] می‌باشند.

۱.۱ فضاهای خطی

فرض کنیم V یک فضای خطی (فضای برداری) حقیقی باشد، یعنی

$$\forall u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda u + \mu v \in V.$$

تابعک خطی L روی V، یک تابع $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد، به طوریکه

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v), \qquad \forall u, v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ روی V یک تابع $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد، به طوریکه

$$\forall u, v, w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

---

[۱] Riesz' representation

[۲] Lax-Milgram lemma

$$(i)\, a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w),$$

$$(ii)\, a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w, u) + \mu a(w, v).$$

فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ متقارن گفته می‌شود اگر $\quad a(w, v) = a(v, w), \quad \forall v, w \in V,$

و معین مثبت است، اگر $\quad a(v, v) > 0, \quad \forall v \in V, v \neq 0$.

تبصره ۱.۱.۱. اگر برای فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ خاصیت (i) و نیز خاصیت تقارن برقرار باشد، آنگاه خاصیت (ii) از آن‌ها نتیجه می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. (۱) فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ که روی V معین مثبت و متقارن باشد، ضرب داخلی روی V نامیده می‌شود.

(۲) فضای خطی V با ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

(۳) اگر V فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ باشد، نرم متناظر آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall v \in V. \tag{۱.۱}$$

تعریف ۶.۱.۱. نرم در فضای خطی V یک تابع $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ می‌باشد، به طوریکه

$$\|v\| > 0, \qquad \forall v \in V, v \neq 0,$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\, v \in V,$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \qquad \forall v, w \in V.$$

تابع $\|\cdot\|$، یک نیم نرم [1] نامیده می‌شود، اگر شرایط نرم برقرار باشد، به استثنای شرط اول که با $\|v\| \geq 0, \quad \forall v \in V,$ جایگزین می‌شود، بنابراین $\|v\|$ برای بعضی $v \neq 0$ می‌تواند صفر شود.

یادآوری ۳.۱.۱. (۱) دنباله‌ی نامتناهی $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ در V را یک دنباله‌ی کوشی گوییم،

هرگاه $i, j \longrightarrow \infty$ آنگاه $\quad \|v_i - v_j\| \longrightarrow 0$.

(۲) فضای خطی با یک نرم، فضای خطی نرمدار نامیده می‌شود.

(۳) فضای نرمدار V تام نامیده می‌شود، اگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

یعنی $v \in V$ وجود داشته باشد به طوریکه برای $i \to \infty$ داشته باشیم $\quad \|v_i - v\| \longrightarrow 0$.

تعریف ۴.۱.۱. فضای باناخ: یک فضای نرمدار تام می‌باشد.

[1] Semi norm

تعریف ۵.۱.۱. فضای هیلبرت: یک فضای ضرب داخلی تام می‌باشد، لذا فضای هیلبرت یک فضای باناخ می‌باشد.

یادآوری ۷.۱.۱. فضای ضرب داخلی، فضای خطی نرمدار است، اما همه‌ی فضاهای خطی نرمدار فضای ضرب داخلی نیستند.

تصویر متعامد: فرض کنیم V یک فضای هیلبرت و $V_\circ \subset V$ یک زیر فضای خطی آن باشد، یعنی $\forall v, w \in V_\circ, \forall \lambda \in \mathbb{R}; v + w \in V_\circ, \lambda v \in V_\circ$. زیر فضای $V_\circ$ بسته نامیده می‌شود، اگر $\{v_j\}_{j=۱}^{\infty} \subset V_\circ$ و برای $j \longrightarrow \infty$، $v_j \longrightarrow v$ نتیجه دهد که $v \in V_\circ$. فضای خطی $V_\circ$ با همان ضرب داخلی بکار برده شده برای V یک فضای هیلبرت می‌باشد.

فرض کنیم $V_\circ$ یک زیر فضای بسته از V باشد، آنگاه هر $v \in V$ را می‌توان بطور یکتایی بصورت زیر نوشت،

$$v = v_\circ + w,$$

که در آن $v_\circ \in V_\circ, w \in V_\circ^\perp$ می‌باشد.

عنصر $v_\circ$ یکتا و نزدیکترین عنصر در $V_\circ$ به v می‌باشد، به عبارت دیگر

$$\|v - v_\circ\| = \min_{u \in V_\circ} \|v - u\|.$$

این، قضیه‌ی تصویر نامیده می‌شود، که نتیجه‌ای اساسی در تئوری فضای هیلبرت است. تصویر متعامد $v_\circ$ ، از v به توی $V_\circ$ می‌باشد و آن را بصورت $P_{V_\circ} v = v_\circ$ نمایش می‌دهیم.

یک نتیجه‌ی مفید از قضیه‌ی تصویر این است که، اگر زیر فضای خطی بسته‌ی $V_\circ$ با فضای V یکسان نباشد، آنگاه دارای یک بردار نرمال است، یعنی بردار ناصفر $w \in V$ متعامد به $V_\circ$وجود دارد.

تذکر ۸.۱.۱. در حالت کلی‌تر اگر در فضای خطی V با ضرایب مختلط مواجه شویم، در چنین حالتی اگرضرب داخلی (v, w) تعریف شده روی $V \times V$ وجود داشته باشد، که هرمیتی و برحسب متغیر اول خطی باشد، یعنی $\overline{(v, w)} = (w, v)$ چنین فضایی با نرم تعریف شده در (۱.۱) یک فضای ضرب داخلی است. اگر تام بودن نسبت به این نرم برقرار باشد، چنین فضایی یک فضای هیلبرت مختلط نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. دو نرم $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ در V معادل هستند، اگر ثابت های مثبت c, C وجود داشته باشند، به طوریکه

$$c\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq C\|v\|_b, \qquad \forall v \in V.$$

فرض کنیم V, W دو فضای هیلبرت باشند، عملگرخطی $B : V \longrightarrow W$ کراندار نامیده می‌شود اگر ثابت C وجود داشته باشد، به طوریکه

$$\|Bv\|_W \leq C\|v\|_V, \qquad \forall v \in V. \tag{۲.۱}$$

نرم متناظر با عملگر خطی کراندار B بصورت

$$\|B\| = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V},$$

تعریف می‌شود. بنابراین

$$\|Bv\|_W \leq \|B\|\|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

لذا $\|B\|$ کوچکترین ثابت C است، به طوریکه (۲.۱) به ازای آن برقراراست.

تذکر ۱۰.۱.۱. عملگر خطی کراندار $B : V \longrightarrow W$ پیوسته می‌باشد، یعنی اگر $v_j \longrightarrow v$ در V، آنگاه $Bv_j \longrightarrow Bv$ در W هنگامیکه $j \longrightarrow \infty$.

زیرا برای $j \longrightarrow \infty$، داریم:

$$\|Bv_j - Bv\|_W = \|B(v_j - v)\|_W \leq \|B\|\|v_j - v\| \longrightarrow 0.$$

و بر عکس یک عملگر خطی پیوسته، کراندار می‌باشد. فرض کنیم که کراندار نباشد، لذا برای $i > 0$ یک v_i وجود دارد به طوریکه

$$\|Bv_i\| > i\|v_i\|,$$

اگر قرار دهیم $w_i = v_i\|Bv_i\|^{-1}$ در اینصورت

$$\|w_i\| = \|v_i\|\|Bv_i\|^{-1} < \frac{1}{i}$$

که اگر $i \longrightarrow \infty$ آنگاه $\frac{1}{i} \longrightarrow 0$، اما $\|Bw_i\| = \|Bv_i\|\|Bv_i\|^{-1} = 1$ لذا $||Bw_i|| \longrightarrow 1$ در حالیکه $w_i \longrightarrow 0$ که با تعریف پیوستگی در تناقض است.

تذکر ۱۱.۱.۱. درحالتی که $W = \mathbb{R}$ باشد، آنگاه تعریف عملگرخطی به تابعک خطی تبدیل می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعه‌ی تابعک‌های خطی کراندار روی V فضای دوگان V نامیده می‌شود و با V^* نمایش داده می‌شود. نرم متناظر در V^* بصورت

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V}$$

تعریف می‌شود. توجه داریم که V^* یک فضای خطی است،

$$((\lambda L + \mu m)(v) = \lambda L(v) + \mu m(v), \qquad \forall L, m \in V^*, \lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

و با نرم تعریف شده در بالا V^* نیز تام می‌باشد، بنابراین V^* یک فضای باناخ می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ روی V کراندار می‌باشد، اگر ثابت M وجود داشته باشد، به طوریکه

$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\|v\|, \qquad \forall w, v \in V.$$

قضیه ۱۴.۱.۱. نمایش ریس : فرض کنیم که V فضای هیلبرت با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ باشد، آنگاه برای هر تابعک خطی کراندار L روی V $u \in V,$ یکتایی وجود دارد به طوریکه

$$(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V. \tag{۳.۱}$$

و به علاوه

$$\|L\|_{V^*} = \|u\|_V. \tag{۴.۱}$$

به عبارتی دیگر برای هر $L \in V^*$ وجود دارد $u \in V$ به طوریکه

$$(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

برای مراجع بیشتر می‌توان به [۲۱] رجوع کرد.

اثبات. (یکتایی): اگر $u_۱, u_۲ \in V$ هر دو جواب (۳.۱) باشند، آنگاه

$$(u_۱, v) = (u_۲, v), \quad \forall v \in V.$$

بنابراین داریم:

$$(u_۱ - u_۲, v) = ۰, \quad \forall v \in V,$$

با انتخاب $v = u_۱ - u_۲$ داریم:

$$(u_۱ - u_۲, u_۱ - u_۲) = \|u_۱ - u_۲\|^۲ = ۰,$$

و بنابراین $u_۱ = u_۲$.

(وجود): اگر $L(v)=\circ, \forall v\in V$، آنگاه $u=\circ$ یک جواب بدیهی برای مساله‌ی (۳.۱) می‌باشد، در غیراینصورت $L(\overline{v})\neq \circ$ برای بعضی $\overline{v}\in V$. فرض کنیم

$$V_\circ=\{v\in V|L(v)=\circ\},$$

که یک زیر فضای بسته از V می‌باشد، به دلیل اینکه اگر $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}\subset V_\circ$ باشد و $v_i \longrightarrow v$ در V، از طرفی هم چون L خطی و کراندار، بنابراین پیوسته می‌باشد، لذا $L(v_i)\longrightarrow \circ = L(v)$ بنابراین وجود دارد $v_\circ\in V_\circ, w\in V_\circ^{\perp}$ به طوریکه $\overline{v}=v_\circ+w$ در نتیجه

$$L(\overline{v})=L(v_\circ)+L(w)=\circ+L(w)=L(w),$$

بنابراین $L(w)\neq\circ$ می‌باشد، از طرفی دیگر

$$L\Big(v-w\frac{L(v)}{L(w)}\Big)=L(v)-\frac{L(w)}{L(w)}L(v)=\circ,\quad \forall v\in V.$$

در نتیجه

$$v-w\frac{L(v)}{L(w)}\in V_\circ$$

چون $w\in V_\circ^{\perp}$ لذا

$$\Big(v-w\frac{L(v)}{L(w)},w\Big)=\circ,$$

بنابراین

$$(v,w)-\Big(\|w\|_V^{2}\frac{L(v)}{L(w)}\Big)=\circ,$$

در نتیجه

$$(v,w)=\|w\|_V^{2}\frac{L(v)}{L(w)},$$

بنابراین داریم:

$$\Big(v,w\frac{L(w)}{\|w\|_V^{2}}\Big)=L(v),\quad L(v)=(v,u),\quad \forall v\in V.$$

اکنون برای اثبات (۴.۱)

$$\|u\|_V=\|w\frac{L(w)}{\|w\|_V^{2}}\|_V=\frac{|L(w)|}{\|w\|_V}\leq \sup_{v\in V\setminus\{\circ\}}\frac{|L(v)|}{\|v\|_V}=\|L\|_{V^*},$$

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{|(u,v)|}{\|v\|_V} \le \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_V\|v\|_V}{\|v\|_V} = \|u\|_V,$$

لذا

$$\|u\|_V = \|L\|_{V^*}.$$

□

تذکر ۱.۱.۱۵. تابعک‌های خطی کراندار $L \in V^*$ را می‌توانیم با $u \in V$ متناظر سازیم، درنتیجه درحالتی که V فضای هیلبرت باشد، V^* با V معادل می‌باشد.

کاربردی از قضیه‌ی نمایش ریس:

گاهی اوقات برای یافتن جواب به معادله‌ای بصورت زیر می‌رسیم،

پیدا کردن $u \in V$ به طوریکه

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V, \tag{۵.۱}$$

که در آن V فضای هیلبرت باشد و L یک تابعک خطی کراندار روی V باشد، $a(\cdot,\cdot)$ فرم دوخطی متقارن باشد، $a(\cdot,\cdot)$ در V کئرسیو [۱] می‌باشد، یعنی وجود داشته باشد $\alpha > 0$ به طوریکه

$$a(v,v) \ge \alpha\|v\|_V^2, \quad \forall 0 \ne v \in V.$$

چون فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ که متقارن و معین مثبت می‌باشد، یک ضرب داخلی در V است، پس قضیه‌ی نمایش ریس وجود $u \in V$ یکتایی را برای هر $L \in V^*$ نتیجه می‌دهد، به علاوه با فرض $v = u$ در (۵.۱) و با توجه به خاصیت کئرسیو داریم:

$$\alpha\|u\|_V^2 \le a(u,u) = L(u) \le \|L\|_{V^*}\|u\|_V,$$

در نتیجه

$$\|u\|_V \le C\|L\|_{V^*}, \quad C = \frac{1}{\alpha}.$$

این مثالی از تخمین انرژی می‌باشد.

تذکر ۱.۱.۱۶. خاصیت کئرسیو، معین مثبت بودن را نتیجه می‌دهد، زیرا از پایین، کراندار به صفر می‌باشد،

$$a(v,v) \ge \alpha\|v\|_V^2 > 0, \quad \forall v \in V, \alpha > 0,$$

---

[۱] Coercive

ولی عکس آن همواره درست نیست.

تذکر ۱.۱.۱۷. اگر $a(\cdot,\cdot)$ یک فرم دوخطی متقارن روی V باشد، که کئرسیو وکراندار است، آنگاه نرم انرژی بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}, \quad \forall 0 \neq v \in V.$$

تذکر ۱.۱.۱۸. دو نرم $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_a$ روی V معادل هستند، زیرا با استفاده از کراندار وکئرسیو بودن $a(\cdot,\cdot)$ داریم:

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_V = \sqrt{\alpha\|v\|_V^2} \leq \|v\|_a = \sqrt{a(v,v)} \leq \sqrt{M\|v\|_V\|v\|_V} = \sqrt{M}\|v\|_V.$$

بنابراین $\|\cdot\|_a$ با $\|\cdot\|_V$ روی V معادل است و بنابراین V همچنین یک فضای هیلبرت با نرم $\|\cdot\|_a$ و ضرب داخلی $a(\cdot,\cdot)$ می‌باشد، زیرا اگر یک دنباله کوشی با نرم اصلی به v همگرا باشد، آنگاه با نرم $\|\cdot\|_a$ نیز همگراست، چون هم ارزند.

مساله‌ی می‌نیمم سازی: مساله‌ی (۱.۵) را می‌توان بصورت یک مساله‌ی می‌نیمم سازی مشخص کرد.

قضیه ۱.۱.۱۹. فرض کنیم V یک فضای هیلبرت و $a(\cdot,\cdot)$ فرم دوخطی متقارن ومعین مثبت روی V و L نیزتابعک خطی کراندار روی V $(L \in V^*)$ باشد، آنگاه $u \in V$ در (۱.۵) صدق می‌کند، اگر و تنها اگر

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V, \tag{۱.۶}$$

که در آن $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم u در (۱.۵) صدق کند و $v \in V$ دلخواه باشد. حال تعریف می‌کنیم $w = v - u \in V$ و لذا $v = u + w$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
F(v) &= \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - L(u+w) \\
&= \frac{1}{2}a(u+w,u) + \frac{1}{2}a(u+w,w) - L(u+w) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(w,u) + \frac{1}{2}a(u,w) + \frac{1}{2}a(w,w) - L(u+w) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,w) - L(u) - L(w) + \frac{1}{2}a(w,w) \\
&= F(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \geq F(u).
\end{aligned}$$

در بالا از (۱.۵)، خاصیت تقارن، معین مثبت بودن $a(\cdot,\cdot)$ استفاده شده است

برعکس اگر $u \in V$ جوابی از مساله‌ی (۶.۱) باشد، آنگاه برای یک $v \in V$ داده شده و تابع $g(t) = F(u + tv)$ داریم:

$$g(t) = F(u + tv) \geq F(u) = g(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

بنابراین $g(t)$ دارای یک مینیمم در $t = 0$ می‌باشد، اما $g(t)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است و بنابراین $g'(0) = 0$. از طرفی داریم:

$$g(t) = \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - L(u + tv) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + t(a(u, v) - L(v)) + \frac{1}{2}t^2 a(v, v).$$

در نتیجه

$$g'(t) = a(u, v) - L(v) + ta(v, v),$$

و لذا

$$g'(0) = a(u, v) - L(v) = 0,$$

که نتیجه می‌دهد

$$a(u, v) = L(v).$$

$\square$

تذکر ۲۰.۱.۱. اگر $a(\cdot, \cdot)$ فرم دوخطی نامتقارن ومعین مثبت وکراندار روی V باشد، آنگاه وجود جوابی یکتابرای (۵.۱) با استفاده از لم لکس -میلگرام اثبات می‌شود، که تعمیمی از قضیه‌ی نمایش ریس می‌باشد.

قضیه ۲۱.۱.۱. اگرفرم دوخطی $a(\cdot, \cdot)$ کراندار و کئرسیو در فضای هیلبرت V و L فرم خطی کراندار روی V باشد، آنگاه بردار یکتای $u \in V$ وجود دارد، به طوریکه (۵.۱) برقرار باشد. به علاوه تخمین انرژی $\|u\|_V \leq C\|L\|_{V^*}$ نیز برقرار است.

اثبات. با ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ در V و با استفاده از قضیه‌ی نمایش ریس وجود $b \in V$ یکتایی را داریم، به طوریکه

$$L(v) = (b, v), \quad \forall v \in V.$$

به علاوه $\forall u \in V \quad a(u,\cdot),$ تابعک خطی کراندار روی V می‌باشد، بنابراین $A(u) \in V$ یکتایی وجود دارد، به طوریکه

$$a(u,v) = (A(u),v), \quad \forall v \in V.$$

که در آن $A : V \longrightarrow V$ و $Au = A(u)$ یک عملگر روی V است. به سادگی مشخص است که Au یک عملگر خطی کران‌دار روی V می‌باشد، در این صورت $A \in V^*$، بنابراین (۵.۱) با $Au = b$ معادل است و نشان می‌دهیم که برای هر b دارای جواب یکتای $u = A^{-1}b$ می‌باشد. بااستفاده ازخاصیت کئرسیو داریم:

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v,v) = (Av,v) \leq \|Av\|_V \|v\|_V,$$

بنابراین

$$\alpha \|v\|_V \leq \|Av\|_V, \quad \forall v \in V. \tag{۷.۱}$$

که یکتایی را نشان می‌دهد، زیرا $Av = 0$ نتیجه می‌دهد $v = 0$، یعنی A یک به یک است. این همچنین بصورت فضای پوچی

$$N(A) = \{v \in V |\, Av = 0\} = 0,$$

بیان می‌شود.

نشان می‌دهیم که $u \in V$ برای هر $b \in V$ وجود دارد به این معنی که، نشان می‌دهیم برای هر $b \in V$ که متعلق به $R(A) = \{w \in V | w = Av$ باشد که $v \in V$ برای بعضی$\}$ باشد، $R(A) = V$ می باشد، توجه می‌کنیم که $R(A)$ زیرفضای خطی از V می‌باشد، نشان می‌دهیم $R(A)$ بسته می‌باشد، فرض کنیم که برای $Av_j \longrightarrow w,\ j \longrightarrow \infty$ در V. با توجه به (۷.۱) برای $i,j \longrightarrow \infty$ داریم:

$$\|v_j - v_i\|_V \leq \alpha^{-1} \|Av_j - Av_i\|_V \longrightarrow 0,$$

بنابراین برای $j \longrightarrow \infty \quad v_j \longrightarrow v \in V,$ و با توجه به پیوستگی A $Av_j \longrightarrow Av = w,$ و در نتیجه $w \in R(A)$ لذا $R(A)$ بسته می‌باشد.

اکنون فرض کنیم $R(A) \neq V$ آنگاه با توجه به قضیه‌ی تصویر ، $w \neq 0$ و متعامد به $R(A)$ وجود دارد، لذا با توجه به خاصیت تعامد داریم:

$$\alpha \|w\|_V^2 \leq a(w,w) = (Aw,w) = 0$$

بنابراین $w = 0$ می‌باشد، که با ناصفربودن w درتناقض است، بنابراین $R(A) = V$ لذا جواب یکتایی برای هر $b \in V$ وجود دارد، اثبات تخمین انرژی به همان روش اثبات قضیه‌ی قبلی می‌باشد. $\square$

تذکر ۲۲.۱.۱. درحالتی که تقارن وجود نداشته باشد جواب را نمی‌توان بصورت مساله‌ی مینیمم سازی نوشت.

تذکر ۲۳.۱.۱. وجود و یکتایی جواب برای معادلات خطی در فضای با بعد متناهی: فرض کنیم $V = \mathbb{R}^n$ و یک معادله‌ی خطی را در V درنظر می‌گیریم که به فرم ماتریسی $Au = b$ نوشته می‌شود، که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و u, b بردارهایی n بعدی می‌باشند. می‌دانیم که برای $b \in V$ داده شده، جواب یکتای مساله موجود است، اگر و تنها اگر A^{-1} موجود باشد. همچنین A^{-1} موجود می‌باشد، اگر و تنها اگر $det(A) = |A| \neq 0$.

تذکر ۲۴.۱.۱. اگر $det(A) = 0$، آنگاه $Au = 0$ دارای جواب غیر بدیهی $u \neq 0$ می‌باشد، لذا $Au = b$ همواره حل پذیر نیست (جواب ندارد یا بی‌نهایت جواب دارد). درصورتی حل پذیر است،که جواب $Au = b$ یکتا و موجود باشد، در حالتی که بی‌نهایت جواب داشته باشد، جواب موجود است اما یکتا نیست.

درحالت خاص، یکتایی هنگامی برقراراست، که $det(A) \neq 0$ باشد، لذا وجود جواب را نتیجه می‌دهد. بنابراین درحالتی که بعد متناهی باشد، اگر یکتایی را اثبات کنیم آنگاه وجود جواب را در همان لحظه داریم.

۲.۱ فضاهای توابع

۱.۲.۱ فضاهای $\mathcal{C}^k$

برای $M \subset \mathbb{R}^N$، فضای $\mathcal{C}(M)$ را بصورت فضای خطی توابع پیوسته روی M نمایش می‌دهیم. توجه داریم که $\{v \in \mathcal{C}(M) | v$ کراندار است$\}$ یک زیر فضای خطی از $\mathcal{C}(M)$ با نرم

$$\|v\|_{\mathcal{C}(M)} = \sup_{x \in M} |v(x)|, \tag{۸.۱}$$

می‌باشد.

هنگامیکه M مجموعه‌ای بسته و کراندار باشد، به عبارتی دیگر مجموعه‌ای فشرده باشد، سوپریمم در (۸.۱) مقدار خود را می‌گیرد، یعنی

$$\|v\|_{\mathcal{C}(M)} = \max_{x \in M} |v(x)|.$$

است، در این حالت نرم، ماکزیمم-نرم نامیده می‌شود و همگرایی در $\mathcal{C}(M)$ همگرایی یکنواخت در M می‌باشد، به دلیل اینکه برای $i \longrightarrow \infty$ داریم:

$$\|v_i - v\|_{\mathcal{C}(M)} = \sup_{x\in M} |v_i(x) - v(x)| \longrightarrow ۰,$$

یادآوری ۱.۲.۱. اگر یک دنباله از توابع پیوسته روی M همگرای یکنواخت باشد، آنگاه حدآن نیز پیوسته می‌باشد، بنابراین $\mathcal{C}(M)$ یک فضای نرمدار تام، یعنی باناخ است. اما $\mathcal{C}(M)$ یک فضای هیلبرت نیست، به دلیل اینکه ماکزیمم-نرم، متناظر با یک ضرب داخلی تعریف شده بصورت (۱.۱) نمی‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه باشد، یعنی یک مجموعه‌ی باز و همبند [۱]. برای هر عدد صحیح $k \geq ۰$ ، $\mathcal{C}^k(\Omega)$ را فضای خطی همه‌ی توابع v که k بار بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، تعریف می کنیم، به عبارتی دیگر

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{v \,|\, D^\alpha v \in \mathcal{C}(\Omega), \quad |\alpha| \leq k\},$$

که در آن $\alpha = (\alpha_۱, ..., \alpha_d)$ یک بردار چند-اندیس [۲] d مولفه‌ای با مولفه‌های $۰ \leq \alpha_i \in \mathbb{Z}$ و $|\alpha| = \sum_{i=۱}^d \alpha_i$ می‌باشد.

برای تابع $v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق جزئی از مرتبه‌ی $|\alpha|$ را بصورت

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_۱^{\alpha_۱} ... \partial x_d^{\alpha_d}},$$

و همچنین برای $X = (x_۱, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, X^α را بصورت $X^\alpha = x_۱^{\alpha_۱} ... x_d^{\alpha_d}$, نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ یک دامنه‌ی کراندار باشد، $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}), \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{C}(\overline{\Omega}) = \{v \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, v \text{ کراندار است}\}$$

که یک فضای باناخ می‌باشد،

$$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) = \{v \in \mathcal{C}^k(\Omega) \,|\, D^\alpha v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \quad \forall |\alpha| \leqslant k\}$$

نیز یک فضای باناخ می‌باشد.

توجه داریم که

$$\|v\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha v(x)|,$$

[۱] Connected and open set

[۲] Multi-index