پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

قضیۀ فالتینگس برای پوچساز مدول‌های کوهومولوژی موضعی روی یک حلقۀ گرنشتاین

استادان راهنما

دکتر رضا نقی پور و دکتر علی اکبر مهرورز

استاد مشاور

دکتر منیره صدقی

پژوهشگر

راحله فیروزنیا

بهمن ماه ۱۳۸۶

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

ساحت مقدس امام زمان (عجل الله تعالی فرجه الشریف) و محضر مبارک مقام معظم رهبری حضرت آیت الله خامنه‌ای(حفظه الله تعالی)

و تقدیم به:

پدر گرامی و عزیزم که همیشه پشتوانهٔ من بوده است،

مادر صبور و مهربانم

که همه مهر است و امید، باشد که توفیق جبران گوشه‌ای از زحماتش را بیابم،

خواهرانم

که دوستانی شفیق و همواره کمک راهم بوده‌اند،

و همسر فداکارم

که همدم و خاطرهٔ لحظه‌های زندگی‌ام است.

تقدیر و تشکر

این پایان‌نامه حاصل تلاشی است که با راهنمایی استاد محترم، جناب آقای دکتر نقی‌پور، گردآوری شده است. بر خود لازم می‌دانم که از زحمات ایشان تشکر نمایم. از همه‌ی دوستان خوبم به ویژه خانم منصوره حاجی‌علی‌اصغری به خاطر کمک‌هایشان و نیز مشورت‌هایی که در حین انجام کار با ایشان داشتم، تشکر می‌کنم.

نام خانوادگی: فیروزنیا **نام:** راحله
عنوان: قضیهٔ پوچساز فالتینگس برای پوچساز مدول‌های کوهومولوژی موضعی روی یک حلقهٔ گرنشتاین
استادان راهنما: دکتر رضا نقی پور و دکترعلی اکبر مهرورز **استاد مشاور:** دکتر منیره صدقی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **دانشگاه:** تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی:** بهمن ماه ۸۶ **تعداد صفحه:** ۹۲
کلید واژه ها: حلقهٔ گرنشتاین، ایده‌آل اول وابسته، کوهومولوژی موضعی
چکیده: در این پایان‌نامه ابتدا برقراری اصل موضعی-کلی برای پوچساز مدول‌های کوهومولوژی موضعی روی حلقهٔ جابجایی و نوتری دلخواه در سطح دو را ثابت می‌کنیم. سپس همان اصل در همهٔ سطوح روی یک حلقهٔ جابجایی و نوتری از بعد کوچکتر یا مساوی چهار ثابت می‌شود. در انتها برقراری اصل موضعی-کلی و قضیهٔ پوچساز(برای مدول‌های کوهومولوژی موضعی) روی یک حلقهٔ گرنشتاین ثابت می‌شود.

فهرست

کوهومولوژی موضعی

۳ قضیه‌ی فالتینگس برای پوچساز مدول‌های کوهومولوژی موضعی روی یک حلقه‌ی گرنشتاین

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس مقالات زیر گردآوری شده است:

1. *M. Brodman, Ch. Rotthaus, R. Y. Sharp, On annihilators and associated primes of local cohomology modules, J. Pure and Applied Algebra* 153 (2000) 197 − 227.

2. *K. Khashayarmanesh and Sh. Salarian, Faltings' theorem for the annihilatin of local cohomology modules over a Gorenstein ring, Proceedings of the American Math. Soc. S* 0002 − 9939(04)07322 − 8.

فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی، یکدار و نوتری باشد.
اصل موضعی–کلی [۱] فالتینگس برای مدول‌های کوهومولوژی موضعی [۲] بیان می‌کند که اگر r یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه به ازای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و هر $i \le r$، $R_{\mathfrak{p}}$–مدول $H^i_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$، تولید شده‌ی متناهی [۳] است، اگر و تنها اگر به ازای هر $i \le r$، R–مدول $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ تولید شده‌ی متناهی باشد.

طبق قضیه‌ی ۲.۳.۴ مرجع [۳] (قضیه‌ی تغییر پایه یکدست) برای مدول‌های کوهومولوژی موضعی، به ازای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و هر $i \in \mathbb{N}_0$، یک $R_{\mathfrak{p}}$–ایزومورفیسم به صورت زیر را داریم:

$$H^i_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \cong (H^i_{\mathfrak{a}}(M))_{\mathfrak{p}}.$$

بنابراین اصل موضعی–کلی فالتینگس برای مدول‌های کوهومولوژی موضعی بیان می‌کند

[۱] Local-global principle

[۲] Local cohomology modules

[۳] Finitely generated

که مدول‌های $H^0_{\mathfrak{a}}(M), H^1_{\mathfrak{a}}(M), ..., H^r_{\mathfrak{a}}(M)$ همگی تولید شده‌ی متناهی‌اند اگر و تنها اگر همه‌ی آنها به طور موضعی تولید شده‌ی متناهی باشند.

شکل دیگر اصل موضعی–کلی فالتینگس بر حسب بعد متناهی M نسبت به $\mathfrak{a}$، $f_{\mathfrak{a}}(M)$ است. به عبارت دیگر می‌توانیم اصل موضعی–کلی فالتینگس برای مدول‌های کوهومولوژی موضعی را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\ ,\ f_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) > r \Leftrightarrow f_{\mathfrak{a}}(M) > r. \quad (۱)$$

حال طبیعی است سوال کنیم که آیا گزاره‌ی:

$$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\ ,\ f^{\mathfrak{b}R_{\mathfrak{p}}}_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) > r \Leftrightarrow f^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M) > r \quad (۲)$$

برای هر $r \in \mathbb{N}$ درست است؟

می‌گوییم اصل موضعی–کلی برای پوچساز[۴] مدول‌های کوهومولوژی موضعی در سطح r (r عدد طبیعی است)(روی حلقه‌ی R) برقرار است اگر (۲) به ازای هر دو ایده‌آل دلخواه $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ و هر R–مدول M درست باشد.

راغاوان[۵] نشان داد که اصل موضعی–کلی در سطح یک برقرار است. او همچنین از قضیه‌ی پوچساز فالتینگس استنتاج کرد که اگر R تصویر هومومورفیک یک حلقه‌ی منظم[٦] باشد، آنگاه اصل موضعی–کلی در همه‌ی سطوح r ($r \in \mathbb{N}$) برقرار است.

نتیجه‌ی اصلی ما در فصل دوم این است که نشان دهیم اصل موضعی–کلی در سطح دو برقرار است و اگر $\dim(R) \leq 4$، اصل موضعی–کلی در هر سطح $r \in \mathbb{N}$، برقرار می‌شود.

همواره داریم $f^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M) \leq \lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M)$. قضیه‌ی پوچساز فالتینگس بیان می‌کند که اگر R تصویر هومومورفیک یک حلقه‌ی منظم باشد، آنگاه $f^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M) = \lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M)$. در فصل دوم با تعمیم اصطلاحات نشان می‌دهیم که برای $r \in \mathbb{N}$، قضیه‌ی پوچساز(برای مدول‌های کوهومولوژی

[۴] Annihilation
[۵] Raghavan
[٦] Regular

موضعی) در سطح r روی R برقرار است، اگر برای هر R−مدول تولید شده‌ی متناهی M و هر دو ایده‌آل دلخواه $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ از R، داشته باشیم:

$$f_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M) > r \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M) > r.$$

در فصل سوم نشان داده می‌شود که اصل موضعی−کلی و قضیه‌ی پوچساز برای مدول‌های کوهومولوژی موضعی روی حلقه‌هایی که تصویر همومورفیک یک حلقه گرنشتاین هستند، برقرار می‌باشد.

فصل اول

تعاریف و قضایای اولیه

۱.۱ تحلیل انژکتیو و پروژکتیو یک مدول

در سراسر این فصل R همواره یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است.

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنید M یک R−مدول بوده وهمبافت[۱]های دقیق زیر را داشته باشیم:

$$P_{\cdot} \;=\; \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

$$E^{\cdot} \;=\; 0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} E^0 \xrightarrow{d^1} E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

به طوری که P_i ها تصویری و E^j ها انژکتیو هستند. در این صورت $P_{\cdot}$ را یک تحلیل تصویری[۲] M و همبافت $\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$ را یک تحلیل تصویری محذوف M نامیده و با نماد $P_{\cdot M}$ نشان می‌دهیم. طول تحلیل $P_{\cdot}$ برابر m است، هرگاه $P_m \neq 0$ و برای هر $i > m$، $P_i = 0$. به طور مشابه $E^{\cdot}$ را یک تحلیل انژکتیو[۳] M و همبافت $0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^1} E^1 \xrightarrow{d^2} \cdots$ را یک تحلیل انژکتیو محذوف نامیده و با نماد $E^{\cdot}_M$ نشان می‌دهیم. طول تحلیل $E^{\cdot}$ برابر m است، هرگاه $E^m \neq 0$ و برای هر $i > m$، $E^i = 0$.

نکته: هر مدول مانند M، حداقل دارای یک تحلیل تصویری و یک تحلیل انژکتیو است.

تعریف ۲.۱.۱ . فرض کنید M و N دو R−مدول باشند. $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

الف) $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = \mathrm{H}_n(\mathrm{Hom}_R(M, E^{\cdot}_N))$، که در آن $E^{\cdot}_N$ یک تحلیل انژکتیو محذوف N است.

---

[۱] Complex

[۲] Projective resolution

[۳] Injective resolution

ب) $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)=\mathrm{H}_n(\mathrm{Hom}_R(P_{.M},N)$، که درآن $P_{.M}$ یک تحلیل تصویری محذوف M است.

قضیه ۳.۱.۱ . فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و N و M، $R-$مدول‌های تولید شده‌ی متناهی باشند. در این صورت برای هر $n\geq 0$، $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$، $R-$مدول تولید شده‌ی متناهی است.

برهان. ر.ک. به قضیه‌ی ۲۱.۹، مرجع [۹]. □

۲.۱ بعد تصویری، انژکتیو و کرول یک مدول، درجه‌ی یک مدول و عمق آن

تعریف ۱.۲.۱ . فرض کنید M یک R–مدول باشد. در این صورت بعد تصویری[۴] M را با نماد $\mathrm{pd}(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{pd}(M) = \sup\{i|\ \mathrm{Ext}^i_R(M, .) \neq 0\}.$$

تعریف ۲.۲.۱ . فرض کنید M یک R–مدول باشد. در این صورت بعد انژکتیو[۵] M را با نماد $\mathrm{id}(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{id}(M) = \sup\{i|\ \mathrm{Ext}^i_R(., M) \neq 0\}.$$

تعریف ۳.۲.۱ . بعد کرول[۶] یک R– مدول ناصفر مانند N را با علامت $\dim(N)$ نشان داده و آن را سوپریمم طول زنجیره‌های ایده‌آل‌های اول واقع در $\mathrm{Supp}(N)$ تعریف می‌کنیم (در صورت وجود) و اگر این سوپریمم موجود نباشد آن را ∞ تعریف می‌کنیم. همچنین اگر $N = 0$، آنگاه بنا بر قرارداد می‌نویسیم $\dim(N) := -1$.

مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با علامت $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین

---

[۴] Projective dimension

[۵] Injective dimension

[۶] Krull dimension

برای هر ایده‌آل مانند I از R واریته‌ی I را با علامت $\mathrm{Var}(I)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Var}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \,:\, I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۴.۲.۱ . عنصر a از R را یک مقسوم‌علیه صفر[۷] روی N می‌نامیم هرگاه عنصر ناصفری مانند $x \in N$ موجود باشد به قسمی که $ax = 0$. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر روی N را با علامت $Z_R(N)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم I یک ایده‌آل از R باشد. در این صورت یک دنباله از اعضای I مانند $a_1, \ldots, a_n$ را یک $N-$رشته‌ی ضعیف در I می‌نامند هرگاه:

(الف) a_1 یک نامقسوم‌علیه صفر روی N باشد.

(ب) برای هر $i \in \mathbb{N}$ که $2 \leq i \leq n$، a_i یک نامقسوم‌علیه صفر روی $N/\Sigma_{j=1}^{i-1} a_j N$ باشد.

عناصر $a_1, \ldots, a_n$ را یک $N-$رشته در I می‌نامند، هرگاه آنها یک $N-$رشته ضعیف در I بوده و $N \neq N < a_1, \ldots, a_n >$.

گوییم $a_1, a_2, ..., a_n$ یک $N-$رشته ماکسیمال در I است هرگاه نتوان عضو $a_{n+1} \in I$ را یافت به طوری که $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ یک $N-$رشته در I باشد. به عبارت معادل $I \subseteq Z_R(M/ < a_1, ..., a_n > M)$.

تبصره ۵.۲.۱ . فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول غیرصفر و تولید شده‌ی متناهی باشد. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد به طوری که $M \neq IM$. در این‌صورت طول مشترک همه‌ی $M-$رشته‌های ماکسیمال در I، $M-$درجه I یا درجه I روی M می‌نامیم و

---

[۷] Zero divisor

باعلامت $\operatorname{grade}_M(I)$ یا $\operatorname{grade}(I, M)$ نشان می‌دهیم. همچنین درجه‌ی M را با علامت $\operatorname{grade}(M)$ نشان داده وتعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{grade}(M) = \operatorname{grade}_M(\operatorname{Ann}(M)).$$

اگر $M = IM$، آنگاه $\operatorname{grade}(I, M)=\infty$. در صورتی که $(R, \mathfrak{m})$ موضعی باشد درجه‌ی $\mathfrak{m}$ روی M را با $\operatorname{depth}(M)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۶ . فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی نوتری و موضعی و M یک $R-$مدول ناصفر و تولید شده‌ی متناهی باشد. در این صورت:

$$\operatorname{depth}(M) = \min\{i |\ \operatorname{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}.$$

برهان. ر.ک. به قضیه‌ی ۱.۲.۸، مرجع [۴]. $\square$

لم ۱.۲.۷ . فرض کنید R یک حلقه‌ی موضعی و$M \neq 0$ یک $R-$مدول تولید شده‌ی متناهی باشد به طوری که $\operatorname{pd}(M) < \infty$. در این صورت:

$$\operatorname{pd}(M) + \operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(R).$$

برهان. ر.ک. به قضیه‌ی ۱۹.۱، مرجع [۸]. $\square$

۳.۱ محمل، ایده‌آل‌های اول وابسته و توسیع اساسی یک مدول

تعریف ۱.۳.۱ . محمل[۸] یک $R-$مدول مانند N، را با علامت $\mathrm{Supp}(N)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Supp}(N) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ : \ N_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

که در آن برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، $N_{\mathfrak{p}}$ موضعی شده‌ی N نسبت به زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $S = R \backslash \mathfrak{p}$ می‌باشد.
به ازای هر ایده‌آل اول مانند $\mathfrak{p}$ از R، $\mathfrak{p}$ را یک ایده‌آل اول وابسته‌ی[۹] N می‌نامند، هر گاه یک عضو مانند $x \in N$ موجود باشد به قسمی که $\mathfrak{p} = (0 :_R x)$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی N را با نماد $\mathrm{Ass}_R(N)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۳.۱ . فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت $\mathrm{Ass}_R(M) \neq \phi$ اگر و تنها اگر $M \neq 0$.

برهان. ر.ک. به نتیجه‌ی ۳۵.۹، مرجع [۱۰]. □

لم ۳.۳.۱ .

---

[۸] Support
[۹] Associated prime ideal

فرض کنید M یک $R-$مدول روی حلقه‌ی نوتری R و S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این صورت:

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)=\{\mathfrak{p}S^{-1}R \mid \ \mathfrak{p}\in Ass_R(M)\ ,\mathfrak{p}\cap S=\phi\}.$$

برهان. ر.ک. به لم ۳۸.۹، مرجع [۱۰]. □

نتیجه ۴.۳.۱ . اگر R حلقه‌ی نوتری، M یک $R-$مدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول R باشد، آنگاه:

$$\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R(M) \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\in \mathrm{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

برهان. ر.ک. به نتیجه‌ی قضیه‌ی ۲.۶، مرجع [۸]. □

قضیه ۵.۳.۱ . فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت:

(i) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه $\mathrm{Ass}_R(M)$ یک مجموعه متناهی است.

(ii) $\mathrm{Ass}_R(M)\subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

(iii) مجموعه عناصر مینیمال $\mathrm{Ass}_R(M)$ و $\mathrm{Supp}(M)$ با هم مساویند.

برهان. ر.ک. به قضیه‌ی ۵.۶، مرجع [۸]. □

تعریف ۶.۳.۱ . فرض کنیم M یک $R-$مدول ناصفر و N یک زیر مدول ناصفر از M باشد. گوییم M یک توسیع اساسی[۱۰] برای N است در صورتی که به ازای هر زیر مدول ناصفر از

[۱۰] Essential extention

M مانند L داشته باشیم: $L \cap N \neq 0$. به عبارت دیگر برای هر عضو ناصفر $b \in M$ یک عضو مانند $r \in R$ موجود باشد به طوری که $rb \in N$ و $rb \neq 0$. فرض کنیم M یک $R-$مدول انژکتیو و توسیع اساسی N باشد. در این صورت گوییم M یک پوشش انژکتیو[۱۱] N است و با علامت $E(N)$ نشان می‌دهیم.

لم ۷.۳.۱ . فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و $\mathfrak{p}_1$ و $\mathfrak{p}_2$ دو ایده‌آل اول R باشند. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:

(a) $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$.

(b) $\mathrm{Hom}_R(E_R(R/\mathfrak{p}_2), E_R(R/\mathfrak{p}_1)) \neq 0$.

برهان. ر. ک. به گزاره‌ی ۲۱.۴ مرجع [۱۲]. □

[۱۱] Injective hull

۴.۱ رادیکال جاکوبسون، تجزیه‌ی اولیه و بلندی یک ایده‌آل

تعریف ۱.۴.۱ . به ازای هر ایده‌آل مانند J از R، رادیکال آن را با علامت $\mathrm{Rad}(J)$ یا $\sqrt{J}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Rad}(J) = \sqrt{J} = \{x \in R \mid \exists r \in \mathbb{N} \ ; \ x^r \in J\}.$$

همچنین اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را رادیکال جاکوبسون[۱۲] R می‌نامیم و آن را با نماد $\mathrm{Jac}(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۱ . ایده‌آل $\mathfrak{q}$ را یک ایده‌آل اولیه در R می‌نامند هرگاه

(۱) $\mathfrak{q} \neq R$.

(۲)به ازای هر $x, y \in R$، اگر $xy \in \mathfrak{q}$، آنگاه $x \in \mathfrak{q}$ یا $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$.

تعریف ۳.۴.۱ . فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از R باشد. یک تجزیه‌ی اولیه برای $\mathfrak{q}$ عبارت است از اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اولیه، یعنی $\mathfrak{q} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ که به ازای هر i، $\mathfrak{q}_i$ یک ایده‌آل اولیه است. در این تجزیه اولیه اگر به ازای هر i، $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ها متمایز باشند و $\mathfrak{q}_i \nsupseteq \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$، آنگاه تجزیه‌ی فوق را مینیمال می‌نامند. در این‌صورت مجموعه‌ی $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, ..., \mathfrak{p}_n\}$ که $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ و به تجزیه‌ی $\mathfrak{q}$ بستگی ندارد، با علامت $\mathrm{ass}(\mathfrak{q})$ نشان داده می‌شود.

---

[۱۲] Jacobson