دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

ساختارهای ابرمختلط روی گروه‌های لی چهار بعدی

فاطمه غلامی

اساتید راهنما:

دکتر احمد زیره

دکتر حمیدرضا سلیمی مقدم

اساتید مشاور:

دکتر ابراهیم هاشمی

دکتر کاظم بی تقصیرفدافن

شهریور 1389

چکیده

هدف این پایان نامه، طبقه بندی ساختارهای ابرمختلط ناوردا روی گروه‌های لی 4- بعدی حقیقی G است. نشان می‌دهیم گروه‌های لی همبند ساده که ساختارهای ابرمختلط ناوردا می‌پذیرند، به صورتهای: 1- گروه جمعی H از کواترنیونها 2- گروه ضربی H^{*} از کواترنیونهای غیر صفر 3- گروه های حل‌پذیری که بطور ساده متعدی روی فضاهای هیپربولیک مختلط و حقیقی RH^4 و CH^2 عمل می‌کنند. 4- ضرب نیم مستقیم $C \rtimes C$، هستند.

فضاهای CH^2 و $C \rtimes C$ یک RP^2 از ساختارهای ابرمختلط ناوردای (غیر هم ارز) دارند در حالی که باقی گروه‌ها فقط یک RP^2 در حد هم ارزی دارند. و در نهایت منیفلدهای چهار بعدی ابرهرمیتی بررسی می-شوند.

کلما ت کلیدی: ساختار ابرمختلط، ساختار ابرهرمیتی

فهرست مندرجات

فصل اول

تاریخچه و مقدمات

1-1 تاریخچه

در مورد ساختارهای ابرمختلط کارهای فراوانی انجام شده که تعدادی از آنها را در زیر می‌آوریم. چارلز بویر[1]در 1988 ساختارهای ابرمختلط از ساختارهای3-ساساکین[2] را توصیف نمود. در این زمینه یاستون پون[3] در 1999 ساختارهای ابرمختلط روی منیفلدهای گروهی را بیان کرد وی دگردیسی ساختارهای ابر مختلط روی گروه‌های لی فشرده را بررسی نمود. آنا فینا[4] در سال 2000 منیفلدهای ابرمختلط 8-بعدی را طبقه بندی کرد. دوتی[5] به همراه آنا فینا گروه‌های لی پوچ توان ابرمختلط را در حالت 8-بعدی بررسی نموده و سپس با همکاری باربریز[6] ساختارهای ابرمختلط روی یک کلاس از گروه‌های لی حل‌پذیر را توصیف نمود.

ساختارهای ابرمختلط و ابرکیلر روی کلاف‌های مماس از فضاهای متقارن هرمیتی رتبه یک توسط میکی تیبوک[7] بررسی شد. همچنین باربریز ساختارهای ابرمختلط ناوردا روی گروه‌های لی 4-بعدی را طبقه بندی نمود. در این زمینه جویسی[8] این ساختارها را بر روی گروه‌های لی فشرده بررسی کرد. در مورد ساختارهای ابرمختلط می‌توان به کارهای بیشتری اشاره کردکه ادامه آنها در این بحث نمی‌گنجد.

---

[1] Charles boyer
[2] Sasakian
[3] Yatsun poon
[4] Anna fina
[5] Dotti
[6] Barberi
[7] I.v .mikityuk
[8] D.Joyce

1-1-1 مقدمه

در فصل اول تعاریف و قضایایی را می‌آوریم که از آنها در فصل‌های بعدی استفاده خواهیم نمود. در فصل دوم ساختارهای مختلط و ابرمختلط را تعریف نموده و با ارائه لم و مثال‌هایی آنها را بررسی می‌نماییم.

فصل سوم شامل دو بخش است که در بخش اول ساختارهای ابرمختلط روی گروه‌های لی4- بعدی حل ناپذیر طبقه بندی می‌شوند و در بخش دوم این ساختارها را روی گروه‌های لی 4- بعدی حل‌پذیر طبقه بندی می‌کنیم. در فصل چهارم ساختارهای هرمیتی و ابرهرمیتی را تعریف می‌نمائیم و سپس ساختارهای ابرهرمیتی را روی گروه‌های لی 4- بعدی طبقه بندی می‌کنیم. در فصل پنجم متر کیلر را تعریف نموده نتایج حاصله را بیان می‌نمائیم.

در تمام این پایان نامه C نمایانگر مجموعه اعداد مختلط و R مجموعه اعدادحقیقی می‌باشد.

2-1 تعاریف و قضایای مقدماتی

1-2-1 منیفلد توپولوژیک: یک فضای توپولوژیکM یک منیفلد توپولوژیک از بعد n است اگر شرایط زیر برقرار باشد:

i) M هاسدورف باشد یعنی: برای هر دو نقطه $p,q\in M$ زیر مجموعه‌های باز جدا از هم $U,V\subset M$ وجود دارند بطوریکه $p\in U$ و $q\in V$.

ii) M شمارای نوع دوم باشد یعنی: پایه‌ای شمارا برای توپولوژی M وجود داشته باشد.

(iii M موضعاً اقلیدسی از بعد n باشد یعنی: هر نقطه M یک همسایگی داشته باشد که با یک زیر مجموعه باز از R^n همئومورفیسم باشد.

یک منیفلد توپولوژیک، دیفرانسیل‌پذیر است در صورتی که بتوان برای آن یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر تعریف کرد. اکنون ساختار دیفرانسیل‌پذیر روی یک منیفلد را شرح می‌دهیم.

2-2-1 **تعریف**

1- فرض کنیم M یک منیفلد توپولوژیک n-بعدی باشد یک چارت مختصاتی روی M یک دوتایی (u,φ) است که u یک زیرمجموعه باز از M است و $\varphi: u \to \tilde{u}$ یک همئومورفیسم از u به یک زیرمجموعه باز $\tilde{u} = \varphi(u) \subset R^n$ است.

2- اگر (u,φ) و (v,ψ) دو چارت باشند بطوریکه $u \cap v \neq \emptyset$ نگاشت ترکیبی $\psi\, o\, \varphi^{-1}: \varphi(u \cap v) \to \psi(u \cap v)$ نگاشت انتقال از φ به ψ نامیده می‌شود. که چون ترکیبی از همئومورفیسم ها می‌باشد خود یک همئومورفیسم است.

3- دو چارت (u,φ) و (v,ψ) سازگارهموارند اگر $u \cap v = \emptyset$ یا نگاشت انتقال $\psi\, o\, \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد.

4- مجموعه‌ای از چارت‌هایی که دامنه M را می‌پوشاند یک اطلس برای M نامیده می‌شود.

5- یک اطلس $\mathcal{A}$ هموار است اگر هر دو چارت در $\mathcal{A}$ سازگار هموار با یکدیگر باشند.

6- اگر یک اطلس $\mathcal{A}$ مشمول در هیچ اطلس هموار بزرگتر نباشد می‌گوییم اطلس $\mathcal{A}$ روی M ماکزیمال است.

7- یک ساختار هموار روی منیفلد توپولوژیک M، یک اطلس هموار ماکزیمال است.

1-2-3 تعریف: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد یک مجموعه u از زیرمجموعه‌های X موضعاً متناهی است اگر هر نقطه X همسایگی داشته باشد که حداکثر در تعدادی متناهی از مجموعه‌های u اشتراک داشته باشد.

1-2-4 تعریف: اگرپوشش باز $\mathcal{U}$ از X داده شده باشد آنگاه هر پوشش باز دیگر X مانند $\mathcal{V}$ تظریف $\mathcal{U}$ است اگر برای هر $v \in \mathcal{V}$ تعدادی $u \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد بطوریکه $v \subset u$. می‌گوییم X پارافشرده است اگر هر پوشش باز از X یک تظریف موضعاً متناهی بپذیرد.

1-2-5 مثال: فضای اقلیدسی R^n یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر n-بعدی است.

1-2-6 گروه لی: یک گروه لی یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر G است که گروه در مفهوم جبری است با نگاشت حاصلضربی و نگاشت معکوس که هر دو دیفرانسیل پذیرند. چون نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر پیوسته اند، یک گروه لی یک گروه توپولوژیک است.

1-2-7 مثال: گروه خطی عمومی GL(n,R)، مجموعه تمام ماتریس های n×n معکوس‌پذیر با درآیه-های حقیقی است که تحت ضرب ماتریس‌ها یک گروه و یک زیر منیفلد باز از فضای برداری M(n,R) است.

ضرب دیفرانسیل‌پذیر است زیرا درآیه‌های ماتریسی یک ماتریس حاصلضرب AB چند جمله‌ای‌هایی از درآیه‌های A,B هستند. معکوس نیز دیفرانسیل‌پذیر است زیرا با قانون کرامر درآیه‌های A^{-1} به عنوان توابعی گویا از درآیه‌های A بیان می‌شوند.

1-2-8 تعریف: برای هر منیفلد دیفرانسیل پذیر M ،کلاف مماس از بردار M برابر است با اجتماع جدا از هم فضاهای مماس در همه نقاط: $TM = \coprod T_pM.$

1-2-9 **تعریف**: اگر M یک منیفلد هموار باشد آنگاه یک میدان برداری روی M یک برش از نگاشت $\pi: TM \to M$ است به خصوص یک میـــدان برداری یک نگاشـــت پیوســـتـه $Y: M \to TM$ اســـت

با این خاصیـــت که: $\pi o\, Y = Id_M$

1-2-10 **براکت لی:**

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد. نگاشت$[V, W]: C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ براکت لی از V

وW نامیده شده و با رابطه $[V, W]\, f = VWf - WVf$ تعریف می‌شود.

تابع $f: M \to R$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر است.V وW میدان‌های برداری دیفرانسیل‌پذیر روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M هستند.

1-2-11 **لم:** براکت لی از هر جفت میدان‌های برداری دیفرانسیل‌پذیر یک میدان برداری دیفرانسیل-پذیر است.

اثبات: به مرجع [12] مراجعه شود.

1-2-12 **جبر لی:** یک جبر لی یک فضای برداری حقیقی $\mathfrak{g}$ است با نگاشتی از $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ به $\mathfrak{g}$ که آنرا براکت نامیده و معمولا با $(X, Y) \to [X, Y]$ نشان می‌دهیم. و برای هر X و Y و Z در $\mathfrak{g}$ داشته باشیم:

i) $a, b \in R\,,\ [aX+b\,Y, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ دو خطی بودن

ii) $[X, Y] = -[Y, X]$ پاد تقارنی

iii) $[X,[Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0$ اتحاد ژاکوبی

اگر $\mathfrak{g}$ یک جبر لی باشد آنگاه یک زیر فضای خطی $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ یک زیر جبرلی $\mathfrak{g}$ نامیده می‌شود اگر تحت براکت‌ها بسته باشد و همچنین $\mathfrak{h}$ خودش یک جبر لی باشد.

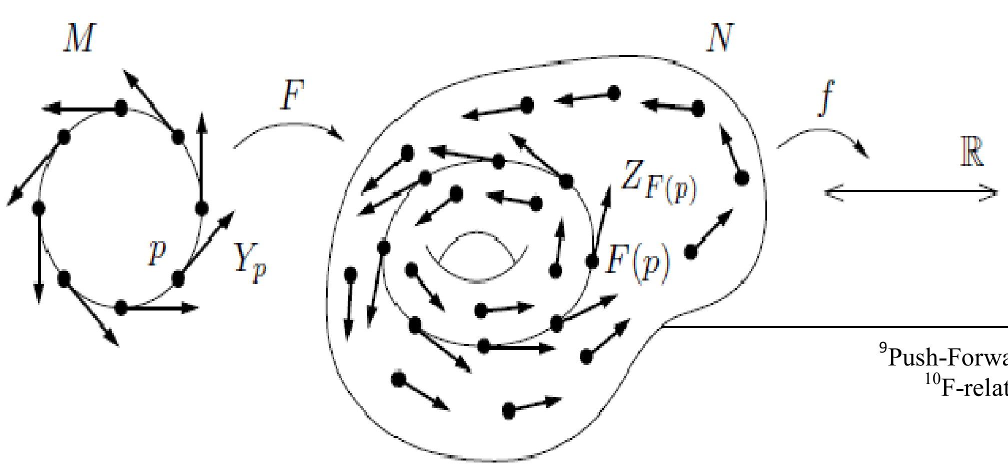
13-2-1 **مثال:** فضای $\mathcal{T}(M)$ شامل تمام میدان‌های برداری دیفرانسیل‌پذیر روی منیفلد دیفرانسیل-پذیر M یک جبرلی تحت براکت لی است.

14-2-1 **تعریف:** فرض کنیم M و N منیفلد های دیفرانسیل‌پذیر و $F : M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشد. برای هر $p \in M$ نگاشت $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ [9] پوش–فوروارد وابسته به F نامیده می شود. T_pM فضای مماس M در p و $T_{F(p)}N$ فضای مماس در $F(p)$ است و داریم:

$$(F_*X)f = X(f \circ F)$$

15-2-1 **تعریف:** اگر $F : M \to N$ نگاشتی دیفرانسیل‌پذیر و Y یک میدان برداری روی M باشد و میدان برداری Z روی N وجود داشته باشد با این خاصیت که برای هر $p \in M$

می‌گوییم میدان های برداری Yو Z، F-مرتبط [10] هستند.



[9] Push-Forward
[10] F-related

1-2-16 **لم:** فرض کنید $F : M \to N$ نگاشتی دیفرانسیل‌پذیر باشد و $y \in \mathcal{T}(M)$، ($\mathcal{T}(M)$مجموعه همه میدان‌های برداری دیفرانـــسیل‌پذیر رویM است) و $Z \in \mathcal{T}(M)$ بنابراینY و F، Z –مرتبطند اگر و فقط اگر برای هر تابع f حقیقی مقدار دیفرانسیل‌پذیر تعریف شده روی یک زیر مجموعه باز N:

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F$$

اثبات: به مرجع [12] مراجعه شود.

شکل 1-1 : میدان های برداری F-مرتبط

1-2-17 **تعریف:** یک فضای آفین یک ساختار هندسی است که خواص (مستوی) آفین از فضای اقلیدسی را عمومیت می‌دهد و می‌توان آنرا به عنوان یک فضای برداری که از مبدأ آن صرفنظر می‌شود در نظر گرفت.

1-2-18 **تعریف:** یک تبدیل آفین یک نگاشت آفین بین دو فضای برداری وشامل یک تبدیل خطی است که با انتقال روبرو بدست می‌آید. $X \to AX + b$

1-2-19 **انتقال های چپ و راست:** فرض کنیم G یک گروه لی باشد هر$g \in G$ نگاشت های $L_g , R_g : G \to G$ را تعریف می کند که انتقال های چپ و راست نامیده شده و بصورت زیر تعریف می گردند:

$$L_g(h) = gh \qquad , \qquad R_g(h) = hg$$

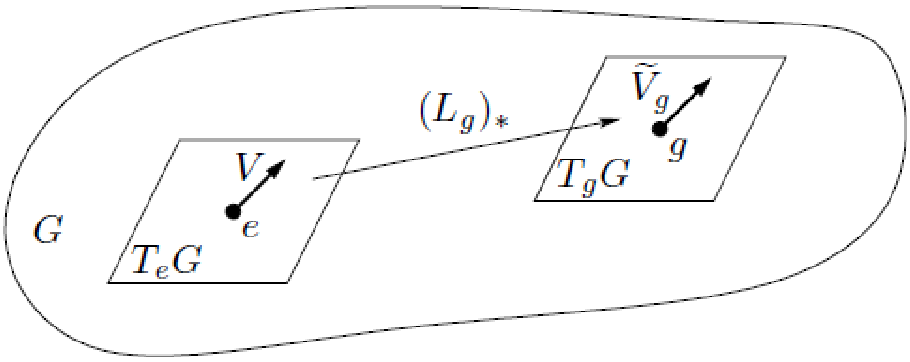
که R_g و L_g دیفئومورفیسم هستند.

1-2-20 تعریف: یک میدان برداری X روی گروه لی G ناوردای چپ نامیده می‌شود اگر تحت همه انتقال های چپ ناوردا باشد. یعنی برای هر $g \in G$ ، L_g-مرتبط با خودش باشد:

$$(L_g)_* X_{g'} = X_{gg'} \qquad g\,, g' \in G$$

چون L_g دیفئومورفیسم است می‌توانیم بنویسیم:

$$(L_g)_* X = X \qquad \text{برای هر } g \in G$$



شکل 1-2 : تعریف یک میدان برداری ناوردای چپ

1-2-21لم: فرض کنید G یک گروه لی باشد و X و Y میدان‌های برداری ناوردای چپ و دیفرانسیل‌پذیر روی G باشند بنابراین [X , Y] ناوردای چپ است.

اثبات: به مرجع [12] مراجعه شود.

1-2-22 جبر لی از یک گروه لی: جبر لی از همه میدان‌های برداری ناوردای چپ روی یک گروه لی G،جبر لی G نامیده می‌شود و با Lie(G) نشان داده می‌شود.

23-2-1 **مثال:** در فضای اقلیدسی R^n، انتقال چپ توسط یک عنصر $b \in R^n$ با نگاشت آفین $L_b(x) = b + x$ داده می‌شود که پوش -فوروارد $(L_b)_*$، توسط ماتریس همانی و مختصات استاندارد نمایش داده می‌شوند. بنابراین یک میدان برداری $V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ناوردای چپ است اگر و فقط اگر ضرایب V^i آن ثابت باشند. زیرا براکت لی از دو میدان برداری ضریب ثابت، صفر است.

جبر لی R^n آبلی است و با براکت صفر، ایزومورفیسم با خود R^n است. بطور خلاصه:

$$\mathrm{Lie}(R^n) \cong R^n$$

24-2-1 **تعریف:** فرض کنیم V یک فضای برداری از بعد متناهی روی میدان F باشد مجموعه تمام تبدیلات خطی روی Vرا به $\mathrm{End}_F V$ نمایش می‌دهیم.

$$f \in \mathrm{End}_F V\,; \quad f: V \to V$$

25-2-1 **تعریف:** فرض کنیم $\mathfrak{g}$ یک جبر لی روی میدانK و V یک فضای برداری روی K (که لزوما متناهی البعد نیست) نمایش $\mathfrak{g}$ درV یک نگاشت:

$$\pi: X \to \pi(X) \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

از $\mathfrak{g}$ به فضای برداری همه اندومورفیسم‌هایی از Vاست به طوریکه:

i) πخطی است

ii) $\pi[X, Y] = \pi(X)\,\pi(Y) - \pi(Y)\,\pi(X) \quad , \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$

26-2-1 **تعریف:** اگر $\mathfrak{g}$ یک جبر لی باشد یک زیر فضای خطی $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ یک ایده‌آل در $\mathfrak{g}$ است اگر

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ یا اگر $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ که $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$

1-2-27**تعریف:** $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (که $D\mathfrak{g}$ یک زیر جبر لی از $\mathfrak{g}$ است) جبر لی مشتق شده از $\mathfrak{g}$ نامیده می‌شود. $D^p\mathfrak{g}$ رابرای هر $p \geq 0$ با استقرا تعریف می‌کنیم:

$$D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$$

$$D^p\mathfrak{g} = D(D^{p-1}\mathfrak{g}) \quad , \quad p \geq 1$$ p-امین جبر لی مشتق شده

1-2-28 **تعریف:** فرض کنیم U یک جبر رویK باشد، ضرب در U دو خطی است ولازم نیست شرکت پذیر باشد. یک اندومورفیسم D از U(به عنوان یک فضای برداری)، یک مشتق نامیده می‌شود اگر

$$D(ab) = (D\,a)b + a(D\,b) \qquad a, b \in U$$

1-2-29 **گروه تحلیلی:** یک گروه لی همبند، یک گروه تحلیلی نامیده می‌شود.

1-2-30 **جبر لی حل‌پذیر:** جبر لی $\mathfrak{g}$ حل‌پذیر است اگر برای یک $p \geq 1$ داشته باشیم $D^p\mathfrak{g} = 0$

1-2-31 **گروه حل‌پذیر:** یک گروه تحلیلی، حل‌پذیر است اگر جبر لی آن حل‌پذیر باشد.

1-2-32 **تعریف:** عمل‌های گروه:

اگر G یک گروه و M یک مجموعه باشد، عمل چپ G روی M یک نگاشت $G \times M \to M$ است که بصورت $(g,p) \to g.p$ نوشته می‌شود. که در شرایط زیر صادق است:

$$g_1.(g_2.p) = (g_1g_2).p \qquad \text{for all } g_1, g_2 \in G \quad , \quad p \in M$$

$$e.p = p \qquad \text{for all } p \in M$$

یک عمل راست بطور مشابه تعریف می‌شود. یک نگاشت $G \times M \to M$ با روابط زیر:

$$(p.g_1).g_2 = p.(g_1g_2) \qquad \text{for all } g_1, g_2 \in G \quad , \quad p \in M$$

$$p.e = p \qquad \text{for all } p \in M$$

فرض کنیم G یک گروه لی و M یک منیفلد باشد یک عمل G روی M پیوسته است اگر نگاشت $M \times G \to M$ یا $G \times M \to M$ که عمل را تعریف می‌کند پیوسته باشد.

یک منیفلد M با یک G– عمل[11] پیوسته، G– فضا[12] نامیده می‌شود. اگر M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد عمل نیز دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه M یک G– فضای دیفرانسیل‌پذیر نامیده می‌شود.

1-2-33 **تعریف:** عمل گروه متعدی است اگر برای هر دو نقطه $p, q \in M$ یک عضوگروه مانند g وجود داشته باشد بطوریکه: $g.p=q$

1-2-34 **تعریف:** عمل یک گروه آزاد نامیده می‌شود اگر تنها عنصر G که هر عنصر M را ثابت نگه می‌دارد همانی باشد:

یعنی اگر به ازای یک $p \in M$ ای داشته باشیم $g.p = p$ آنگاه $g=e$

هم ارز است با شرط $G_p = \{e\}$ برای هر $p \in M$ که $G_p = \{g \in G;\ g.p = p\}$ گروه ایزوتروپی از p است.

1-2-35 **ساده متعدی:** اگر عمل گروه هم آزاد و هم متعدی باشد هم‌ارز است با اینکه بگوییم برای هر p و q در M دقیقا یک g در G وجود داشته باشد بطوریکه $g.p = q$ و برای تعدادی p در M و تعدادی g در U، $g = e$ باشد.

[11] G-Action
[12] G-Space

36-2-1 تعریف: فرض کنیم a و b دو ایده‌آل حل‌پذیر جبر لی $\mathfrak{g}$ باشند بنابراین a+b یک ایده‌آل است، چون $\frac{a+b}{a}$ با $\frac{b}{a\cap b}$ یکریخت است و $\frac{a+b}{a}$ حل‌پذیر است پس a+b حل‌پذیر است.

یک ایده‌آل حل‌پذیر یکتای $\mathfrak{q}$ از $\mathfrak{g}$ شامل همه ایده آل‌های حل‌پذیر $\mathfrak{g}$ وجود دارد. $\mathfrak{q}$ رادیکال $\mathfrak{g}$ نامیده می‌شود.(rad)

$\text{rad}\ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ اگر و فقط اگر $\mathfrak{g}$ حل‌پذیر باشد.

37-2-1 تعریف: جبر لی $\mathfrak{g}$ نیم ساده است اگر $\text{rad}\ \mathfrak{g} = 0$

رادیکال یک جبر لی بوضوح تحت همه اتومورفیسم‌های جبر لی ناورد است.

38-2-1 تعریف: یک کلاف برداری از بعد(رتبه) K روی فضای توپولوژیک M، یک فضای توپولوژیک E با نگاشت پیوسته و پوشای $\pi : E \to M$ است.

که در شرایط زیر صدق می‌کند:

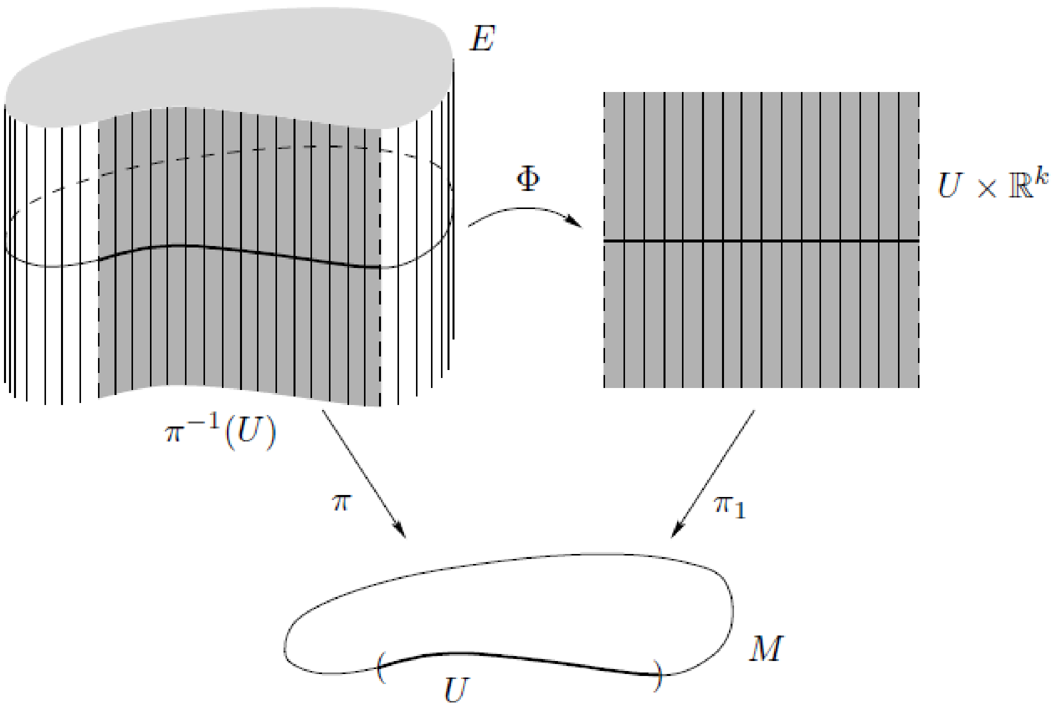
i) برای هر $p \in M$ ، $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (تاری از E روی p نامیده می شود)E_p ساختاری از یک فضای برداری حقیقی K بعدی دارد.

ii) برای هر $p \in M$ یک همسایگی U از p در M و یک همئومورفیسم $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times R^K$ (φ یک بدیهی سازی موضعی E روی U نامیده می شود) وجود دارد بطوریکه نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\tau"'] & & U \times R^K \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(π_1نگاشت تصویری روی اولین فاکتور است)

بطوریکه برای هر $q \in U$ تحدید φ به E_q ایزوموفیسم خطی از E_q به $R^K \cong \{q\} \times R^K$ است.



شکل 1- 3 : بدیهی سازی موضعی یک کلاف برداری

39-2-1 **تعریف**: فرض کنید $\pi : E \to M$ یک کلاف برداری روی منیفلد M باشد.یک برش از E، یک برش از نگاشت π است یعنی نگاشت پیوسته $\sigma: M \to E$ که $\pi o\, \sigma = Id_M$

40-2-1 **تعریف:** یک k- تانسورهموردا روی V، یک تابع چند خطی حقیقی

$T : \underbrace{V \times . . . \times V}_{K} \to R$ است. عدد K رتبه نامیده می‌شود.

41-2-1 **تعریف:** کلافی از K-تانسور هموردا روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M برابر است با:

$$T^K M = \coprod T^K(T_p M)$$

اجتماع جدا از هم مجموعه‌ای از همه K-تانسورهای هموردا روی فضای مماس منیفلد هموار M.

1-2- 42 **تعریف:** یک برش از یک کلاف تانسوری ، میدان تانسوری روی منیفلد M نامیده می‌شود.

فصل دوم

ساختارهای مختلط و ابرمختلط