۲۰ /۶/ ۱۳۸۱

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر-بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

# همولوژی اشیاء گروهی با صفر ضعیف زنجیری و سادکی

استاد راهنما:

دکتر سید ناصر حسینی

مؤلف:

محمد ظاهر کاظمی باله

اسفند ۱۳۸۰

ب

۳۳۶۴۷

بسمه تعالی

این رساله

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

**بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر**

**دانشگاه شهید باهنر کرمان**

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

**دانشجو: محمد ظاهر کاظمی بانه**

**استاد راهنما: دکتر سید ناصر حسینی**

**داور ۱: دکتر یوسف بهرامپور**

**داور ۲: دکتر نصرت الله شجره پورصلواتی**

**نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر ناصحزاده**

---

حق چاپ محفوظ و مخصوص به مولف است

دانشگاه ...
کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی



۳۳۶۴۷

تقدیم به:

## همسر مهربانم

که یار و یاور صادق همیشه زندگیم میباشد.

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

لازم و شایسته است قبل از هر چیز از زحمات بی شائبهٔ استاد گرامیم جناب آقای دکتر سید ناصر حسینی کمال تشکر و قدردانی را نموده و از درگاه ایزد منان خواستار توفیق روزافزون ایشان بوده و مراتب متعالیتری را برایشان آرزومندم که در انجام این امر مرا راهنمایی نموده و استاد راهنمای اینجانب بوده اند.

از جناب آقای دکتر یوسف بهرامپور و جناب آقای دکتر نصرت الله شجره پورصلواتی تشکر و قدردانی میکنم که داوری پایان نامه اینجانب را بعهده گرفتند.

همچنین از جناب آقای دکتر بیژن هنری و جناب آقای دکتر سید حسین جوادپور که مانند برادری بزرگ و پدری دلسوز مرا یاری نموده‌اند سپاسگزاری می‌نمایم.

در نهایت از پدر و مادر دلسوز خود و همسرم سپاسگزارم که پشتوانهٔ محکم قلبی در تمام مسیر زندگیم بوده و هستند.

محمد ظاهر کاظمی بانه
اسفند ۱۳۸۰

# چکیده

در توپولوژی جبری کلاسیک، فانکتور همولوژی زنجیری از کاتگوری $R$ـمدول های زنجیری به کاتگوری $R$ـمدول های مدرج تعریف شده است. با ترکیب این فانکتور با فانکتور زنجیر، که از کاتگوری $R$ـمدول های سادکی به کاتگوری $R$ـمدول های زنجیری می باشد، فانکتور همولوژی سادکی بدست می آید. در این تعاریف کاتگوری $R$ـمدول ها نقش اساسی را بازی میکند.

در این رساله هدف تعمیم کاتگوری $R$ـمدول ها به یک کاتگوری دلخواه تر بوده است. نتیجه کار کاتگوریی است که آنرا کاتگوری گروهها با صفر ضعیف آبلی نامیده و با $AbWGrp$ نمایش داده ایم. کاتگوری $AbWGrp$ شامل گروههای آبلی و در نتیجه شامل همه $R$ـمدول ها می باشد.

نتیجه بالا را با جایگزینی کاتگوری پایهٔ $Set$ به کاتگوری دلخواه تر $\mathcal{E}$ باز هم تعمیم داده ایم. اشیاء گروهی با صفر ضعیف (آبلی) در $\mathcal{E}$ را تعریف کرده، که حاصل آن کاتگوریهای $(Ab)WGrp(\mathcal{E})$ می باشد.

بعضی از خواص کاتگوریهای $WGrp(\mathcal{E})$ و $AbWGrp(\mathcal{E})$، از جمله وجود حد متناهی و هم‌معادل‌ساز، بعنوان ابزار زیر بنائی نیز در این رساله مورد مطالعه قرار گرفته است.

# فهرست






مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

# مقدمه

همانطور که در چکیده آمده است، در این رساله فانکتورهای همولوژی استاندارد را که بر اساس کاتگوری $R$_مدولها تعریف شده اند تعمیم داده به قسمی که کاتگوری $R$_مدولها با کاتگوری دلخواه تر گروهها با صفر ضعیف آبلی جایگزین شده است. این تعمیم را از جنبه دیگر نیز گسترش داده و کاتگوری پایهٔ $Set$ را با کاتگوری دلخواه تر $\mathcal{E}$ جایگزین نموده ایم.

در فصل ۰، پیش نیازهای کاتگوریکی، از جمله تعاریف اشیاء آغازی، نهائی و صفر، مورفیسمهای مونو، اپی و ایزو، حد متناهی شامل ضرب، معادل‌ساز و پولبک، و همچنین هم‌معادل‌ساز آمده است. در فصل ۱ به تعاریف اشیاء و مورفیسمهای گروهی با صفر ضعیف (آبلی) پرداخته، کاتگوری این اشیاء را تشکیل داده و آنرا با $(Ab)WGrp(\mathcal{E})$ نمایش داده ایم. در حالت خاص $\mathcal{E} = Set$ برای نمایش این کاتگوریها از نماد $(Ab)WGrp$ استفاده شده است. مثالهای گوناگونی را از گروههای با صفر ضعیف آبلی آورده ایم که نشان میدهند که کاتگوری گروههای با صفر ضعیف آبلی شامل گروههای آبلی، $R$_مدولها، مجموعه های ترتیبی کامل با مینیمم یا ماکزیمم و بسیاری اشیاء دیگر می باشد. بعضی از خواص این کاتگوریها نیز بررسی شده و نشان داده شده است که چنانچه کاتگوری $\mathcal{E}$ دارای حد متناهی باشد، کاتگوری $(Ab)WGrp(\mathcal{E})$ نیز دارای حد متناهی است. وجود هم‌معادل‌سازی نیز تحت شرائطی نشان داده شده است. در فصل ۲، تعاریف اشیاء گروهی ضعیف (آبلی) سادکی، مدرج و زنجیری و تعمیم فانکتور زنجیر آمده است. نهایتاً در فصل ۳، ابتداء در یک کاتگوری دلخواه، مفاهیم هسته، برد و همولوژی را آورده، سپس فانکتورهای همولوژی را بر اساس کاتگوری $AbWGrp(\mathcal{E})$ تعریف کرده ایم.

# فصل ۰

# پیش‌نیازهای کاتگوریکی

## ۰ـ۱ کاتگوری، اشیاء و مورفیسمهای خاص

برای مطالعه بیشتر مطالب این فصل می توانید به [AHS] و [M1] رجوع نمایید.

۰ـ۱ـ۱ **تعریف**: یک کاتگوری $\mathcal{C}$ شامل

a_ یک رده $\mathcal{C}_0$، که اعضای آن، اشیاء نامیده می‌شوند.

b_ برای هر زوج $(A,B)$ از اشیاء $\mathcal{C}$ یک مجموعهٔ $hom(A,B)$ که اعضای آن را مورفیسمهای از $A$ به $B$ می‌نامیم. اگر $f \in hom(A,B)$ باشد، $A$ را دامنه و $B$ را هم‌دامنه $f$ نامیم و می‌نویسیم $f: A \to B$ یا $A \xrightarrow{f} B$.

c_ برای هر شیئی در $\mathcal{C}$، یک مورفیسم $A \xrightarrow{id_A} A$ که آنرا مورفیسم همانی روی $A$ می‌نامیم.

d_ یک ترکیب از مورفیسم‌ها، یعنی برای هر دو مورفیسم $A \xrightarrow{f} B$ و $B \xrightarrow{g} A$ یک مورفیسم $A \xrightarrow{gof} C$ که ترکیب $f$ و $g$ نامیده می‌شود،

می‌باشد به قسمی که:

i) ترکیب شرکتپذیر است یعنی برای هر $A \xrightarrow{f} B$ و $B \xrightarrow{g} C$ و $C \xrightarrow{h} D$ معادلهٔ $ho(gof) = (hog) = f$ برقرار است.

ii) برای هر مورفیسم $A \xrightarrow{f} B$ داریم $id_B of = f$ و $foid_A = f$.

iii) مجموعه‌های $hom(A,B)$، به طور زوجی با هم متفاوتند و جدا از همند.

۰ـ۱ـ۲ **تذکر**: معمولاً ردهٔ اشیاء کاتگوری $\mathcal{C}$ را با $\mathcal{C}_0$ و ردهٔ مورفیسمهای آن را با $\mathcal{C}_1$ نشان می‌دهیم.

۰ـ۱ـ۳ **مثال**: کاتگوری $Set$، که اشیای آن ردهٔ همهٔ مجموعه‌ها است و ردهٔ مورفیسمها، ردهٔ همهٔ توابع بین مجموعه‌ها می‌باشد.

۰ـ۱ـ۴ **مثال**: کاتگوری $Vec$، که اشیاء آن، فضاهای برداری حقیقی و مورفیسمها، تبدیلات خطی بین آنها می‌باشند.

۰ـ۱ـ۵ **مثال**: کاتگوری $Grp$، که اشیاء آن همهٔ گروهها و مورفیسمهای آن، همهٔ مورفیسمهای گروهی بین آنها می‌باشند.

۰ـ۱ـ۶ **مثال**: کاتگوری $Top$، که اشیاء آن فضاهای توپولوژیکی و مورفیسمها، توابع پیوسته بین آنها می‌باشند.

۰ـ۱ـ۷ **مثال**: کاتگوری $Rmod$، که اشیاء آن $R$ـمدولها و مورفیسمها، $R$ـمدول همومورفیسمهای بین آنها می‌باشند.

۰ـ۱ـ۸ **تعریف**: فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری باشد. شیئی $A$ از $\mathcal{C}$ را یک شیئی آغازی گوئیم هرگاه به ازای هر شیئی $B$، یک و تنها یک مورفیسم از $A$ به $B$ وجود داشته باشد، یعنی

$$\forall B \in \mathcal{C} \qquad \exists! : A \xrightarrow{!} B$$

۰ـ۱ـ۹ **مثال**: در کاتگوری $Set$، مجموعهٔ تهی، یک شیئی آغازی می‌باشد، زیرا که به ازای هر مجموعهٔ $B$ تنها تابع شمول از تهی به $B$ وجود دارد.

۰ـ۱ـ۱۰ **مثال**: در کاتگوری $Rmod$، $R$ـمدول صفر، یک شیئی آغازی می‌باشد، چون تنها همومورفیسم صفر از صفر به هر $R$ـمدول دیگری وجود دارد.

۰ـ۱ـ۱۱ **تعریف**: فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری باشد شیئی $A$ از $\mathcal{C}$ را یک شیئی نهایی گوئیم هرگاه به ازای هر شیئی $B$ از $\mathcal{C}$، تنها یک مورفیسم از $B$ به $A$ وجود داشته باشد، یعنی

$$\forall B \in \mathcal{C} \qquad \exists! : B \xrightarrow{!} A$$

۰ـ۱ـ۱۲ **مثال**: در کاتگوری $Set$، مجموعهٔ تک عضویی، یک شیئی نهایی می‌باشد. زیرا به ازای هر مجموعهٔ $B$، تنها یک تابع که همهٔ اعضای $B$ را به تک عضو مجموعه می‌برد، وجود دارد.

۰ـ۱ـ۱۳ **مثال**: در کاتگوری $Rmod$، $R$ـمدول صفر، یک شیئی نهایی می‌باشد. زیرا که تنها $R$ـمدول هومومورفیسم $f$، از یک $R$ـمدول دلخواه به $R$ـمدول صفر همهٔ اعضای $R$ـمدول دلخواه را به صفر می‌برد.

۰ـ۱ـ۱۴ **تعریف**: هرگاه یک شیئی، هم یک شیئی آغازی و هم یک شیئی نهایی باشد آنگاه آن شیئی را شیئی صفر می‌نامیم و آنرا با ۰ نمایش می‌دهیم، یعنی

$$\forall B, C \in \mathcal{C} \qquad \exists!\ B \xrightarrow{!} 0 \xrightarrow{!} C$$

۰ـ۱ـ۱۵ **مثال**: در کاتگوری $Set$، شیئی صفر، وجود ندارد.

۰ـ۱ـ۱۶ **مثال**: در کاتگوری $Rmod$، شیئی صفر، همان $R$ـمدول صفر می‌باشد.

۰ـ۱ـ۱۷ **تعریف**: مورفیسم $A \xrightarrow{f} B$ یک مونومورفیسم نامیده می‌شود هرگاه نسبت به ترکیب، از چپ حذف‌پذیر باشد. یعنی به ازای هر دو مورفیسم $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A$ به قسمی که $fog = foh$ آنگاه داشته باشیم $g = h$.

۰ـ۱ـ۱۸ **مثال**: در کاتگوری‌های $Set$، $Top$، $Vec$ و $Rmod$، یک مورفیسم، مونو است اگر و فقط اگر یک تابع یک به یک باشد.

۰ـ۱ـ۱۹ **تعریف**: مورفیسم $A \xrightarrow{f} B$ یک اپی‌مورفیسم نامیده می‌شود هرگاه نسبت به ترکیب، از راست حذف‌پذیر باشد. یعنی به ازای هر دو مورفیسم $B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$ به قسمی که $gof = hof$ آنگاه داشته باشیم $g = h$.

۰_۱_۲۰ **مثال**: در کاتگوری‌های $Set$، $Top$، $Vec$ و $Rmod$، یک مورفیسم، اپی است اگر و فقط اگر یک تابع پوشا باشد.

۰_۱_۲۱ **تعریف**: مورفیسم $A \xrightarrow{f} B$ ایزومورفیسم است هرگاه مورفیسم $B \xrightarrow{g} A$ موجود باشد به طوریکه $fog = id_B$ و $gof = id_A$.

۰_۱_۲۲ **مثال**: در کاتگوری‌های $Set$، $Vec$ و $Rmod$، یک مورفیسم، ایزومورفیسم است هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

## ۰_۲ ضرب متناهی، معادل‌ساز، هم‌معادل‌ساز و پولبک

۰_۲_۱ **تعریف**: هرگاه $A$ و $B$ دو شیئی از کاتگوری $\mathcal{C}$ باشند، ضرب $A$ و $B$ که آنرا با $A \times B$ نمایش می‌دهیم، شیئی‌ای از کاتگوری $\mathcal{C}$ است همراه با مورفیسمهای $A \times B \xrightarrow{\pi_1} A$ و $A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ به قسمی که به ازای هر شیئی $C$ و مورفیسمهای $C \xrightarrow{f} A$ و $C \xrightarrow{g} B$، یک مورفیسم منحصر بفردی، که آنرا با $\langle f,g\rangle$ نمایش می‌دهیم، موجود باشد به قسمی که $\pi_1\langle f,g\rangle = f$ و $\pi_2\langle f,g\rangle = g$، یعنی دیاگرام زیر تعویضپذیر باشد.

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
 & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\exists! \langle f,g\rangle"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

اگر هر دو شیئی $\mathcal{C}$ دارای ضرب باشند، گوئیم $\mathcal{C}$ دارای ضرب دوتایی می‌باشد.

۰_۲_۲ **تبصره**: فرض کنید که کاتگوری $\mathcal{C}$ دارای ضرب دوتایی می‌باشد و $A \xrightarrow{f} B$ و $C \xrightarrow{g} D$ دو مورفیسم در $\mathcal{C}$ باشند. بنا به ضرب دوتایی، مورفیسمهای $\pi_1$ و $\pi_2$ موجود است به قسمی

که

$$B \xleftarrow{\pi_1} B \times D \xrightarrow{\pi_2} D$$

و همچنین داریم:

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times C \xrightarrow{\pi_2} C$$

با ترکیب مورفیسمهای $f$ و $\pi_1$، مورفیسم $f\pi_1 : A \times C \to B$ و با ترکیب مورفیسمهای $g$ و $\pi_2$، مورفیسم $g\pi_2 : A \times C \to D$ موجود است. بنا به خاصیت ضرب، مورفیسم منحصر بفرد $\langle f\pi_1, g\pi_2\rangle$ که آنرا با $f \times g$ نمایش می‌دهیم، از $A \times C$ به $B \times D$ وجود دارد، به طوری که دیاگرام زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xleftarrow{\pi_1} & & B \times D & & \xrightarrow{\pi_2} & D \\ f \uparrow & & f\pi_1 \nwarrow & \uparrow f \times g & \nearrow g\pi_2 & & \uparrow g \\ A & \xleftarrow{\pi_1} & & A \times C & & \xrightarrow{\pi_2} & C \end{array}$$

**۰_۲_۳ تبصره:** می‌دانیم که به ازای هر شیئی $A$ از کاتگوری $\mathcal{C}$، مورفیسم همانی $A \xrightarrow{1} A$ وجود دارد، لذا بنا به خاصیت ضرب، مورفیسم منحصر بفرد $A \times B \xrightarrow{1_A \times 1_B} A \times B$ موجود است. اما می‌دانیم که $A \times B$ نیز شیئی در $\mathcal{C}$ و مورفیسم همانی $A \times B \xrightarrow{1} A \times B$ در $\mathcal{C}$ موجود است لذا بنا به منحصر بفردی $1 \times 1$ باید داشته باشیم:

$$1_A \times 1_B = 1_{A \times B}$$

**۰_۲_۴ تعریف:** فرض کنید که کاتگوری $\mathcal{C}$ دارای ضرب دوتایی باشد، آنگاه به ازای هر دو شیئی

$A, B$ از $\mathcal{C}$ داریم:

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

و همچنین:

$$B \xleftarrow{\pi_1} B \times A \xrightarrow{\pi_2} A$$

مورفیسم پیچش، مورفیسم منحصر بفرد $T$ از $B \times A$ به $A \times B$ می‌باشد به طوریکه دیاگرام زیر تعویضپذیر می‌باشد.

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
& B \times A \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[u, "T"] \arrow[ur, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

یعنی $T = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$.

**۵_۲_۰ لم**: هرگاه $A \xrightarrow{f} B$ یک مورفیسم در کاتگوری $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه $Tf^2 = f^2T$.

**اثبات**:

$$\begin{aligned}
Tf^2 &= \langle \pi_2, \pi_1 \rangle f^2 \\
&= \langle \pi_2 f^2, \pi_1 f^2 \rangle \\
&= \langle f\pi_2, f\pi_1 \rangle \\
&= f^2 \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = f^2 T
\end{aligned}$$

که تعویض‌پذیری دیاگرام زیر مؤید مطلب است:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{\pi_1} & B^2 & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ f \uparrow & f\pi_1 \nwarrow & f^2 \uparrow & \nearrow f\pi_2 & \uparrow f \\ A & \xleftarrow{\pi_1} & A^2 & \xrightarrow{\pi_2} & A \end{array}$$

**۰-۲-۶ تعریف:** هرگاه $A$ و $B$ دو شیئی از کاتگوری $C$ و $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ دو مورفیسم از $A$ به $B$ باشند، گوئیم $f$ و $g$ دارای معادل‌ساز می‌باشند هرگاه شیئی $E$ و مورفیسم $E \xrightarrow{h} A$ موجود باشد به قسمی که $fh = gh$ و به ازای هر مورفیسم $C \xrightarrow{h'} A$ به طوریکه $fh' = gh'$، مورفیسم منحصر بفرد $\overline{h'} : C \to E$ موجود باشد به قسمی که دیاگرام زیر تعویض‌پذیر باشد.

$$\begin{array}{ccccc} & E & \xrightarrow{h} & A & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \\ \exists!\ \overline{h'} & \uparrow & \nearrow h' & & \\ & C & & & \end{array}$$

هرگاه به ازای هر دو مورفیسم $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ در کاتگوری معادل‌ساز داشته باشیم آنگاه گوئیم کاتگوری دارای معادل‌ساز است.

**۰-۲-۷ مثال:** در کاتگوری $Set$، هرگاه $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$، دو تابع باشند آنگاه معادل‌ساز آنها مجموعه $E = \{a \in A | f(a) = g(a)\}$ و تابع $E \to A$ تابع شمول می‌باشد.

**۰-۲-۸ مثال:** در کاتگوری $Rmod$، هرگاه $M_1$ و $M_2$، دو $R$-مدول و $M_1 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} M_2$ دو $R$-مدول همومورفیسم باشند، آنگاه معادل‌ساز آنها $E = \{m \in M_1 | f(m) = g(m)\}$ با جمع و ضرب $M_1$ و تابع $E \to M_1$ همان تابع شمول می‌باشد.

**۰-۲-۹ تعریف:** هرگاه $C$ یک کاتگوری و $A$ و $B$ دو شیئی از $C$ و $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ دو مورفیسم از $A$ به $B$ باشند گوئیم $f$ و $g$ دارای هم‌معادل‌ساز هستند هرگاه شیئی $Q$ و مورفیسم $B \xrightarrow{q} Q$ موجود