دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشنا سی ارشد

رشته ریاضی محض (آنالیز)

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

عملگرهای ترکیبی بر فضاهای هاردی وزندار

فاطمه سیاه چشم

استاد راهنما :

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر رحمت سلطانی

خرداد ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض(آنالیز)

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

عملگرهای ترکیبی بر فضاهای هاردی وزندار

فاطمه سیاه چشم

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر رحمت سلطانی

خرداد ۱۳۹۲

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد خانم **فاطمه سیاه‌چشم** دانشجوی رشته **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** به شماره دانشجویی **۹۰۰۱۰۳۶۷۷** با عنوان:

" عملگرهای ترکیبی بر فضاهای هاردی وزندار"

با حضور هیات داوران در روز **سه‌شنبه** مورخ **۱۳۹۲/۳/۲۸** ساعت **۹ صبح** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۸٫۲۵ به حروف هجده و بیست و پنجم با درجه عالی تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر بهمن یوسفی	راهنما	استاد	پیام نور شیراز	
۲	دکتر رحمت سلطانی	مشاور	استادیار	پیام نور شیراز	
۳	دکتر فریبا ارشاد	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۶۲۲۲۲۵۵ - ۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۴۹ - ۰۷۱۱
صندوق پستی: ۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب **فاطمه سیاه چشم** دانشجوی ورودی سال **۱۳۹۰** مقطع کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض(آنالیز)** گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو: **فاطمه سیاه چشم**

تاریخ و امضاء:

اینجانب **فاطمه سیاه چشم** دانشجوی ورودی سال **۱۳۹۰** مقطع کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض (آنالیز) گواهی** می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو: **فاطمه سیاه چشم**

تاریخ و امضاء

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه مطعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

خرداد ماه ۱۳۹۲

تقدیم به:

آنان که فکر و اندیشه ی خود را در راه تعالی بشر بخشیده اند.

سپاسگزاری

اکنون که با استعانت ایزد منان برگ دیگری از تاریخ تحصیلی ام ورق می خورد، بر خود لازم می دانم از حمایت های بی شائبه و تلاش فداکارانه ی استاد گرانمایه جناب آقای پروفسور بهمن یوسفی که در طی دوره کارشناسی، کارشناسی ارشد و در تمام مراحل نگارش و تکمیل این پایان نامه مرا راهنمایی نموده اند، صمیمانه و متواضعانه قدردانی نمایم. خداوند را سپاس می گویم که موهبت شاگردی و درک محضر شریف این استاد فرزانه را بر من ارزانی فرمود.

از اساتید گرامی سرکار خانم دکتر رحمت سلطانی و سرکار خانم دکتر فریبا ارشاد که با دقت و حوصله زحمت خواندن این تالیف را تحمل نموده و از راهنمایی هایشان بهره برده ام، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

و درود بی پایان الهی بر پدر و مادر عزیزم، آنان که به فرزندشان آموختند بهترین راه تعالی، کسب علم و معرفت است.

و اما در اینجا شایسته است که صادقانه ترین سپاسگزاری خود را نثار همسر خوب و مهر بانم نمایم که بزرگوانه و دلسوزانه در طی این طریق مرا یاری نموده و همیشه از پشتیبانی ایشان در تمام لحضات زندگی بهره مند شده ام.

چکیده

در این رساله، به مطالعه و بررسی عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی وزندار $\mathcal{H}^2(\beta,\mathbb{D})$ و $H^p(\beta)$ روی گوی یکه ی باز $\mathbb{D}$ می پردازیم.

در فصل اول تعاریف و قضایایی را بیان می کنیم که در فصل های بعد مورد استفاده قرار مـی گیرنـد، از جمله قضیه ی تکرار دنجوی – ولف، قضیه ی مانتل و...

در فصل دوم ابتدا به معرفی فضاهای هاردی وزندار $\mathcal{H}^2(\beta,\mathbb{D})$ پرداخته و سپس رابطـه ی آنهـا را بـا فضاهای هاردی وزندار $H^2(\beta,\mathbb{D})$ و فضای برگمن $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ بررسی می کنیم. همچنـین در ایـن فصـل شرایط کافی برای کرانداری و فشردگی عملگرهای ترکیبی بر این فضا هـا را بیـان و اثبـات خـواهیم نمود.

در فصل سوم فضاهای هاردی وزندار $H^p(\beta)$ را معرفی نموده و خواص کرانداری و فشردگی عملگـر های ترکیبی بر این نوع فضاها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: فضای هاردی وزندار، عملگر ترکیبی، عملگر فشرده و تابعک محاسبه ی نقطه ای.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه

در مقدمه ابتدا برخی مفاهیم مقدماتی نظیر فضاهای هاردی، فضاهای هاردی وزندار، فضای برگمن و سپس عملگرهای ترکیبی و ضربی را معرفی نموده و قضایای مقدماتی پیرامون آنها را ارائه می دهیم.

در سر تا سر این رساله $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ را به عنوان گوی باز یکه، در صفحه ی اعداد مختلط و $\partial\mathbb{D}$ را دایره ی واحد در نظر می گیریم که

$$\partial\mathbb{D} = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

۱.۱ تعریف. برای $0 < p < \infty$، فضای هاردی $H^p(\mathbb{D})$ را مجموعه ای از توابع تحلیلی روی گوی باز یکه در نظر می گیریم به گونه ای که

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} \left|f_r(e^{i\theta})\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

جایی که $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ برای $0 < r < 1$.

فضای هاردی $H^\infty(\mathbb{D})$، مجموعه ای از توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ می باشد که با سوپریمم نرم $\|f\|_\infty$ کراندار هستند. در ضمن فضای $H^p(\mathbb{D})$ همراه با نرم فوق یک فضای باناخ تابعی است، که

$$d(f, g) = \|f - g\|_p$$

یک متر کامل روی آن تعریف می کند.

۲.۱ قضیه. فرض کنیم برای $p > 0$، f در $H^p(\mathbb{D})$ باشد. در این صورت برای هر θ، تابع

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}),$$

وجود دارد، که نگاشت $f \longrightarrow f^*$ یک یکریختی ایزومتری از $H^p(\mathbb{D})$ به زیرفضای بسته از $L^p(\partial\mathbb{D})$ می باشد.

اثبات. رجوع شود به [۸].

۳.۱ تعریف. تابع f^* را تابع مرزی f گوییم، هرگاه برای هر $z \in \partial\mathbb{D}$ بصورت

$$f^*(z) = \lim_{r\to 1^-} f(rz)$$

تعریف شود.

زیرفضای بسته در قضیه ی(۲.۱) یک فضای خطی بسته درمجموعه ی $L^P(\partial\mathbb{D})$ است که از مجموعه ی $\{1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \ldots\}$ پدید آمده و با توجه به این که این توابع، توابع مرزی از چند جمله ای ها در $L^p(\partial\mathbb{D})$ هستند، می گوییم فضای هاردی $H^p(\mathbb{D})$ بستاری از چند جمله ای های تحلیلی در $L^p(\partial\mathbb{D})$ است. بنابراین فضای $H^p(\mathbb{D})$ توسط مجموعه ی $\{1, z, z^2, \ldots\}$ پدید آمده و این مجموعه یک پایه ی استاندارد برای $H^p(\mathbb{D})$ می باشد. بنابراین برای هر تابع تحلیلی $f \in H^p(\mathbb{D})$، با توجه به بسط تیلور آن داریم:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j.$$

۴.۱ تعریف. اگر $H(\mathbb{D})$، مجموعه ای از تمام توابع تحلیلی روی گوی یکه ی باز $\mathbb{D}$، باشد. فضای هاردی کلاسیک $H^2(\mathbb{D})$، شامل توابعی از $H(\mathbb{D})$ می باشد که

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad \|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$$

و طریقه ی بدست آمدن نرم آن به صورت زیر می باشد:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \operatorname{Sup}_{\circ<r<1}\int_{\circ}^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\frac{d\theta}{d\pi}\\
&= \operatorname{Sup}_{\circ<r<1}\int_{\circ}^{2\pi}\sum_{j=\circ}^{\infty}\sum_{k=\circ}^{\infty}a_j\bar{a}_k r^{j+k}e^{i(j-k)\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \operatorname{Sup}_{0<r<1}\sum_{j=\circ}^{\infty}\sum_{k=\circ}^{\infty}a_j\bar{a}_k r^{j+k}e^{i(j-k)\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \operatorname{Sup}_{0<r<1}\sum_{j=\circ}^{\infty}\left|a_j\right|^2 r^{2j} = \sum_{j=\circ}^{\infty}\left|a_j\right|^2
\end{aligned}
$$

بنابراین با توجه به محاسبات بالا، بطور خلاصه می توان گفت:

$$
H^2(\mathbb{D}) = \left\{f \in H(\mathbb{D}):\ f(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j;\ \|f\|_2^2 = \sum_{j=\circ}^{\infty}\left|a_j\right|^2 < \infty\right\},
$$

که در آن a_j، ضریب j ام f در بسط تیلور حول مبداء می باشد. طبق قضیه قبل فضای هاردی کلاسیک با زیرفضای بسته ای ازفضای $L^2(\partial\mathbb{D})$ یکسان سازی شد، بنابراین فضای $H^2(\mathbb{D})$ یک فضای هیلبرت است همراه با ضرب داخلی که به صورت زیر معرفی می شود:

اگر برای هر $z \in \mathbb{D}$،

$$
g(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} c_j z^j\,, \qquad f(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j
$$

دو عضو واقع در$H^2(\mathbb{D})$ باشند، ضرب داخلی $< f,g >$ برابر است با:

$$< f,g > =< \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j , \sum_{j=\circ}^{\infty} c_j z^j >$$
$$= \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j \bar{c}_j.$$

۵.۱ تعریف ([۸]). فرض کنید$\{\beta(j)\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد مثبت باشد جایی که برای هر عدد صحیح غیر منفیj، $\beta(j) = \|z^j\|$ و $\beta(\circ) = \|1\| = 1$ باشد. فضای هاردی وزندار$H^2(\beta)$ را یک مجموعه از توابع تحلیلی روی$\mathbb{D}$ در نظر می گیریم به گونه ای که

$$\|f\|_\beta^2 = \left\|\sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j\right\|^2 = \sum_{j=\circ}^{\infty} |a_j|^2 \beta(j)^2 < \infty ,$$

که ضرب داخلی زیر را روی آن تعریف می کنیم:

$$< \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j , \sum_{j=\circ}^{\infty} c_j z^j >= \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j \bar{c}_j \, \beta(j)^2.$$

بنابراین داریم:

$$H^2(\beta) = \left\{ f: f(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j \, ; \; \|f\|_\beta^2 = \sum_{j=\circ}^{\infty} |a_j|^2 \beta(j)^2 < \infty \right\}.$$

$\{\beta(j)\}_{j=\circ}^{\infty}$ را دنباله ی وزنی فضای هاردی وزندار$H^2(\beta)$ می نامیم. بعضی از مواقع برای دقت بیشتر $H^2(\beta)$ را با$H^2(\beta,\mathbb{D})$ نیز نشان می دهیم.

۶.۱ تعریف. فضای $H^2(\beta_k)$ فضای هاردی وزندار است که دنباله ی وزن آن برای هر $k \geq 1$، به فرم $\{\beta_k^2(j)\}_{j=1}^{\infty} = \left\{\frac{(k-1)!\,j!}{(k-1+j)!}\right\}_{j=1}^{\infty}$ می باشد.

۷.۱ تعریف. تابع مولد برای فضای هاردی وزندار به صورت

$$k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\beta^2(j)}$$

تعریف می شود.

۸.۱ لم. اگر k یک تابع مولد برای فضای هاردی وزندار باشد، آنگاه k روی $\mathbb{D}$ تحلیلی است.

اثبات. رجوع شود به [۷]. □

واضح است که تابع مولد معرفی شده در تعریف (۶.۱) عضو فضای $H^2(\beta)$ می باشد.

زیرا با توجه به لم قبل این تابع تحلیلی است و همچنین داریم:

$$\|k(z)\|_\beta^2 = \left\|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\beta^2(j)}\right\|_\beta^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left|\frac{1}{\beta^2(j)}\right|^2 \beta(j)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^2(j)} < \infty.$$

۹.۱ تعریف. برای $0 < p < \infty$ فضای برگمن $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ را مجموعه ای از توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ در نظر می گیریم به گونه ای که

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \frac{dA(z)}{\pi} < \infty,$$

جایی که $dA(z)$ اندازه لبگ مساحت روی $\mathbb{D}$ می باشد.

فضای $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ همراه با نرم فوق یک فضای باناخ است و $d(f,g) = \|f-g\|_p$، یک متر کامل روی

آن تعریف می کند. به علاوه $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ فضای هیلبرت با ضرب داخلی تعریف شده به فرم

$$< f, g >= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\,\frac{dA(z)}{\pi}$$

می باشد، جایی که $z \in \mathbb{D}$ و $f, g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ باشند.

برای هر تابع تحلیلی

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

داریم:

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_j|^2}{j+1},$$

رجوع شود به ([۸]). بنابراین $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ که فضای برگمن کلاسیک نامیده می شود بصورت

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \, ; \|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_j|^2}{j+1} < \infty \right\},$$

می باشد.

۱۰.۱ نتیجه. فضای برگمن کلاسیک $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ با فضای هاردی وزندار $H^2(\beta)$ معادلند، جایی که دنبالهٔ وزن $\{\beta(j)\}_{j=0}^{\infty}$ به صورت $\beta^2(j) = \frac{1}{j+1}$ تعریف شود، که اثبات آن را در فصل دو رساله خواهیم دید.

۱۱.۱ تعریف. برای $\alpha > -1$ فضای برگمن وزندار $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ را مجموعه ای از توابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ در نظر می گیریم به گونه ای که

$$\|f\|^2 = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha} dA(z) < \infty,$$

وضرب داخلی روی این فضا به صورت

$$< f, g >= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, \frac{dA_{\alpha}(z)}{\pi}$$

می باشد، جایی که

$$dA_{\alpha}(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha} dA(z).$$

برای $k > 1$، فضای برگمن وزندار $\mathcal{A}^2_{k-2}$ شامل توابعی مشابه به توابع فضای هاردی وزندار $H^2(\beta_k)$ می باشد و نرم

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2(1-|z|^2)^{k-2}\frac{dA}{\pi},$$

نرم معادل برای این دو فضا می باشد.

۱۲.۱ تعریف. فضای دیریکله $\mathcal{D}$، مجموعه ی تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ می باشد به طوری که

$$\int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 \frac{dA(z)}{\pi} < \infty,$$

و با نرم زیر معرفی می شود:

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(\circ)|^2 + \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 \frac{dA(z)}{\pi},$$

و ضرب داخلی $< f, g >_{\mathcal{D}}$ بصورت

$$< f, g >_{\mathcal{D}} = f(\circ)\overline{g(\circ)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)}\frac{dA(z)}{\pi},$$

می باشد.

$\mathcal{D}$ یک فضای هیلبرت تابعی است که مجموعه ی$\{1, z, z^2, \dots\}$، پایه ای متعامد بر آن می باشد و می توان دید که تساوی

$$\mathcal{D} = \left\{ f(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j : \sum_{j=\circ}^{\infty} \left|a_j\right|^2 (j+1) < \infty \right\},$$

بر قرار است ([۸]).

۱۳.۱ تعریف. فضای هاردی کلی $\mathcal{H}$، را بصورت

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k, \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 4^k < \infty \right\},$$

تعریف می کنیم.

۱۴.۱ تعریف. اگرφ یک نگاشت تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشد، M_φ را عملگر ضربی با نماد φ روی$H^2(\mathbb{D})$ می نامیم، اگر برای هر$f \in H^2(\mathbb{D})$ داشته باشیم:

$$M_\varphi f = \varphi f \in H^2(\mathbb{D}).$$

فرض کنید نگاشت φ، معرفی شده در تعریف فوق متعلق به$H^\infty(\mathbb{D})$ (فضای توابع تحلیلی و کراندار بر$\mathbb{D}$) بوده و$f \in H^2(\mathbb{D})$. در این صورت داریم:

$$\|M_\varphi f\| = \|\varphi f\| \le \|\varphi\|_\infty \|f\|.$$

پس $\|M_\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty$. همچنین می توان نشان داد $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$، رجوع شود به ([۸]).

۱۵.۱ تعریف. اگر φ یک نگاشت غیرثابت تحلیلی از گوی یکه $\mathbb{D}$ به خودش باشد، عملگر ترکیبی با نماد φ روی $H^2(\mathbb{D})$ به صورت $C_\varphi f = f \circ \varphi$ برای هر $f \in H^2(\mathbb{D})$ تعریف می شود.

۱۶.۱ قضیه. اگر φ یک نگاشت تحلیلی از $\mathbb{D}$ به خودش باشد به قسمی که $\varphi(0) = 0$ و f عضوی از $H^p(\mathbb{D})$ باشد، آنگاه

$$\|f \circ \varphi\|_p \le \|f\|_p.$$

اثبات. رجوع شود به [۸]. □

حال به معرفی عملگر ترکیبی وزندار روی فضاهای هاردی وزندار می پردازیم.

۱۷.۱ تعریف. اگر f یک تابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ و φ یک نگاشت تحلیلی از $\mathbb{D}$ به خودش باشد، عملگر ترکیبی وزندار $W_{f,\varphi}$ روی $H^2(\beta)$ با نمادهای f و φ با ضابطه ی زیر می باشد:

$$\left(W_{f,\varphi}h\right)(z) = f(z)h\big(\varphi(z)\big),$$

برای هر $h \in H^2(\beta)$.

به عبارت دیگر $\left(W_{f,\varphi}h\right)(z) = T_f\left(C_\varphi(h)\right)(z)$، جایی که عملگر T_f یک عملگر ضربی با تعریف $T_f(h) = fh$ و C_φ یک عملگر ترکیبی با تعریف $C_\varphi(h) = h \circ \varphi$ برای هر $h \in H^2(\beta)$ می باشند.

اگر T_f و C_φ هر دو عملگرهای کراندار باشند، آنگاه $W_{f,\varphi}$ روی $H^2(\beta)$ کراندار است و

$$\left\|W_{f,\varphi}\right\| = \left\|T_f\, C_\varphi\right\| \le \|T_f\| \left\|C_\varphi\right\|.$$