*تقدیم به*

**پدر و مادر بزرگوار و همسر مهربانم**

***که داشتن شان بزرگترین دلیل شادی من است***

## تقدیر و تشکر

سپاس پروردگار را بر آن درها که از علم ربوبیّت خویش بر ما گشوده و با الطاف بیکـرانش مـا را بـا درستی به آن داخل و با درستی و راستی از آن خارج می نماید.

بر خود لازم می دانم از زحمات فراوان استاد عزیزم، دکتر سید کامران مؤیدی، تشکر نمایم. ایشـان که با راهنمایی های همه جانبه و ارزشمند شان در تمـام مراحـل ایـن دوره از تحصـیل و خصوصـاً انجام این اثر مرا یاری دادند.

## چکیده:

اخیراً مطالعه فضاهای ناجابه‌جایی، یعنی فضاهایی که توسط قواعد جابه‌جایی $\left[\hat{x}_i, \hat{x}_j\right] = i\hbar\theta_{ij}$ میان مختصات فضایی مشخص می‌گردند در فیزیک از جذابیت رو به رشدی برخوردار بوده است. اگر چه ایده آغازین فضاهای ناجابه‌جایی به روزهای اولیه پیدایش نظریه کوانتومی در زمان هایزنبرگ باز می‌گردد، اما فرمول‌بندی رسمی فضاهای ناجابه‌جایی برای نخستین بار در مقالات اشنایدر و یانگ مطرح گردیده‌اند. از آن پس مفهوم فضای ناجابه‌جایی برای سالیان طولانی به فراموشی سپرده شد. امروزه با ظهور نظریه ریسمان شاهد تولد دوباره مفهوم فضای ناجابه‌جایی هستیم و ایده فضای ناجابه‌جایی به صورت گسترده‌ای در شاخه‌های گوناگون فیزیک همانند نظریه میدان، نظریه ریسمان و ماده چگال مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پایان‌نامه ما به مطالعه یک مدل کیهان‌شناسی نیوتنی در چارچوب مکانیک کلاسیک ناجابه‌جایی می‌پردازیم. نخستین نتیجه‌ای که عاید ما می‌شود آن است که مفهوم فضای ناجابه‌جایی با اصل کیهان‌شناسی در تعارض است زیرا فرض ناجابه‌جایی بودن فضا به منزله وجود یک جهت ارجح می‌باشد. اگر در مدل کیهان‌شناسی ما ثابت کیهان‌شناسی منفی باشد مسیرهای حرکت یک ذره آزمون نوسانی بوده و فرکانس نوسان تابعی از پارامتر ناجابه‌جایی خواهد شد در حالی که برای مقادیر مثبت ثابت کیهان‌شناسی مسیرهای حرکت ذره آزمون بر روی صفحه ناجابه‌جایی مارپیچی بوده و تصحیحاتی بر روی ثابت هابل اعمال می‌گردد. سرانجام نشان می‌دهیم که در حدی که اثرات ناجابه‌جایی بودن بسیار قوی باشد معادلات حرکت برای یک ذره آزمون مشابه معادلات حرکت برای یک ذره باردار در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای محور z خواهد بود.

**واژه‌های کلیدی:** فضای ناجابه‌جایی، مکانیک کلاسیک، کیهان‌شناسی نیوتنی

## فهرست

# فصل اول

## قانون دوم نیوتن در یک فضای ناجابه‌جایی

## ۱-۱ مقدمه

اخیراً مطالعه فضاهای ناجابه‌جایی، یعنی فضاهایی که در آنها قواعد جابـه‌جـایی مـا بـین مختصات به صورت $\left[\hat{x}_i,\hat{x}_j\right]=i\hbar\theta_{ij}$ در نظر گرفته می‌شـوند بـه طـور فزاینـده‌ای در کانون توجه واقع شده است. ایده فضا زمان ناجابه‌جایی به روزهای آغازین پیدایش نظریه کوانتومی باز می‌گردد.

نخستین بار ایده فضا زمان ناجابه‌جایی توسط هایزنبرگ مطرح گردید و از میان کارهـای اولیه مطرح شده در فرمول بندی یک فضا زمان ناجابه‌جایی می‌تـوان بـه کارهـای انجـام شده توسط اشنایدر [۷] و یانگ[۸] اشاره نمود. آنگاه بـرای مـدت زمـانی طـولانی ایـده وجود یک فضا زمان ناجابه‌جایی به فراموشی سپرده شد تا آنکه با ظهور نظریـه ریسـمان مفهوم ناجابه‌جایی بودن مجدداً در کانون توجه فیزیکدانان نظری قـرار گرفـت. امـروزه از ایده فضا زمان ناجابه‌جایی در شاخه‌های متعددی از فیزیک نظری همانند نظریـه میـدان کوانتومی[۹]، نظریه ریسمان[۱۰] و ماده چگال[۱۱] اسـتفاده مـی‌شـود. در ایـن فصـل، نخست به فرمول‌بندی مکانیک کلاسیک در یک فضای فاز متعارف مـی‌پـردازیم و نشـان می‌دهیم که چگونه می‌توان با تعریف تابع هامیلتون و ساختار کروشه پوآسون به صورتی منطقی و سازگار قانون دوم نیوتن در مکانیک کلاسـیک را نتیجـه گرفـت. در ادامـه بـه معرفی یک ساختار کروشه پوآسون تعمیم یافته در یک فضای فاز دگرگون شده پرداخته و صورتی تعمیم یافته از قانون دوم نیوتن را به دست می‌آوریم. آنگـاه بـرای یـک میـدان نیروی مرکزی به کمک قانون دوم نیوتن تعمیم یافته معـادلات کلاسـیک حرکـت را در فضای فاز دگرگون شده ناجابه‌جایی بـه دسـت آورده و بـه عنـوان یـک مثـال معـادلات

کلاسیک به دست آمده را برای یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه بعدی به صورت اختلالی تا مرتبه اول بر حسب پارامتر ناجابه‌جایی حل می‌کنیم. در حالتی که پارامتر معرف ناجابه‌جایی بودن برابر صفر اختیار شود تمامی نتایج به دست آمده برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه بعدی ناجابه‌جایی تبدیل به نتایج مربوط به دینامیک کلاسیک یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه بعدی در فضای جابه‌جایی می‌گردند.

## ۱-۲ ساختار کلی یک فضای ناجابه‌جایی

یکی از موضوعاتی که در سالیان اخیر در فیزیک نظری توجه زیادی را به خود معطوف نموده است، مطالعهٔ قوانین فیزیک در فضای ناجابه‌جایی است[۱-۴].

در یک فضا - زمان ناجابه‌جایی مختصات فضا - زمانی با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند و خواهیم داشت:

$$\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\hbar\theta^{ij} \qquad (۱-۱)$$

که $\theta^{ij}$ یک تانسور مرتبهٔ دوم پادمتقارن است[۱].

با توجه به معادلهٔ (۱-۱) کمیت $\hbar\theta^{ij}$ دارای دیمانسیون مساحت می‌باشد. در حالتی که فضای ناجابه‌جایی ما دو بعدی باشد روابط جابه‌جایی میان مختصات خواهند شد:

$$\left[\hat{x}^1\ ,\ \hat{x}^2\right] = i\hbar\,\theta^{12} \qquad , \qquad \left[\hat{x}^1\ ,\ \hat{x}^1\right] = i\hbar\,\theta^{11}$$

$$\left[\hat{x}^2\ ,\ \hat{x}^1\right] = i\hbar\,\theta^{21} \qquad , \qquad \left[\hat{x}^2\ ,\ \hat{x}^2\right] = i\hbar\,\theta^{22} \quad ,$$

که با توجه به خصلت پادمتقارن بودن جابه جاگر $\left([B,A] = -[A,B]\right)$ خواهیم داشت:

$$,\ \theta^{11} = \theta^{22} = 0$$

$$\theta^{21} = -\theta^{12}\ . \qquad (۱-۲)$$

با توجه به معادلهٔ (۱-۲) و نیز تعریف $\theta^{12} = \theta$ تانسور پادمتقارن $\theta^{ij}$ در یک فضای ناجابه‌جایی دو بعدی دارای نمایش ماتریسی به شکل زیر خواهد بود:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta^{11} & \theta^{12} \\ \theta^{21} & \theta^{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} . \qquad (۱-۳)$$

یکی دیگر از راههای نمایش تانسور پادمتقارن مرتبهٔ دوم $\theta^{ij}$ در یک فضای ناجابه‌جایی دو بعدی استفاده از نماد تانسوری $\varepsilon^{ij}$ است. تانسور $\varepsilon^{ij}$ که مشابه دو بعدی نماد لوی-چیویتا در آنالیز تانسوری در فضای سه بعدی است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{11} &= 0 \\ \varepsilon^{22} &= 0 \\ \varepsilon^{12} &= +1 \\ \varepsilon^{21} &= -\varepsilon^{12} = -1 \ . \end{aligned} \qquad (۱-۴)$$

بر حسب نماد لوی- چیویتای دو بعدی $\varepsilon^{ij}$ تعریف شده در معادلهٔ (۱-۴) تانسور پادمتقارن مرتبهٔ دو $\theta^{ij}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\theta^{ij} = \theta\varepsilon^{ij} \ . \qquad (۱-۵)$$

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که فضای ناجابه‌جایی ما یک فضای سه بعدی با مختصات $\{\hat{x}^1 , \hat{x}^2 , \hat{x}^3\}$ باشد. در این حالت تانسور پادمتقارن مرتبهٔ دوم $\theta^{ij}$ را می‌توان توسط ماتریس مربعی مرتبهٔ سوم زیر نمایش داد:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta^{12} & \theta^{13} \\ \theta^{21} & 0 & \theta^{23} \\ \theta^{31} & \theta^{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \theta^{12} & -\theta^{31} \\ -\theta^{12} & 0 & \theta^{23} \\ \theta^{31} & -\theta^{23} & 0 \end{pmatrix} . \qquad (۱-۶)$$

همانطور که معادلهٔ (۱-۶) نشان می‌دهد تانسور $\theta^{ij}$ در یک فضای ناجابه‌جایی سه بعدی دارای سه مؤلفه مستقل $\{\theta^{12},\theta^{23},\theta^{31}\}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان تانسور $\theta^{ij}$ را با استفاده از نماد لوی- چیویتا چنین نوشت:

$$\theta^{ij} = \varepsilon_{ijk}\theta_k \quad , \qquad (۱-۷)$$

که $\theta^i$ها مؤلفه‌های بردار سه بعدی $\vec{\theta}$ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\theta} = \left(\theta^1 = \theta^{23}, \theta^2 = \theta^{31}, \theta^3 = \theta^{12}\right) . \qquad (۱-۸)$$

ماتریس $\Theta$ در معادلهٔ (۱-۶) بر حسب مؤلفه‌های بردار $\vec{\theta}$ تعریف شده در معادلهٔ (۱-۸) دارای نمایشی به شکل زیر خواهد بود:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (۱-۹)$$

در حالت کلی تانسور پادمتقارن مرتبهٔ دوم $\theta^{ij}$ در یک فضای ناجابه‌جایی $n$ بعدی را می‌توان به صورت یک ماتریس پادمتقارن مربعی مرتبهٔ $n$ با $\frac{n(n-1)}{2}$ درایهٔ مستقل نمایش داد.

## ۱-۳ ضرب ستاره یا مویال و ارتباط آن با یک فضای ناجابه‌جایی

در یک فضای ناجابه‌جایی دو بعدی با مختصات

$$\hat{x}^1 = \hat{x}$$
$$\hat{x}^2 = \hat{y} \quad ,$$

با توجه به معادلات (۱-۱) تا (۱-۵) خواهیم داشت:

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\hbar\theta \ . \qquad (۱-۱۰)$$

اینک نشان می‌دهیم که رابطهٔ جابه‌جایی(۱-۱۰) در یک فضـای ناجابـه‌جـایی دو بعـدی معادل با یک رابطهٔ جابه‌جایی تعمیم یافته در یک فضای دو بعدی متعارف است[۲و۳].

با تعریف براکت مویال به صورت[۲ و ۳]

$$[x, y] = x * y - y * x \ , \qquad (۱-۱۱)$$

که عمل * (ضرب مویال) دارای تعریفی به شکل زیر است:

$$* = \exp\left(\frac{i}{2}\hbar\theta(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x})\right) \ , \qquad (۱-۱۲)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
x * y &= x \ \exp\left(\frac{i}{2}\hbar\theta(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x})\right) y \\
&= x\left\{1 + \frac{i}{2}\hbar\theta\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}\right) + O(\theta^2)\right\} y \\
&= xy + \frac{i}{2}\hbar\theta(1-0) + \frac{1}{2!}\frac{i^2\hbar^2\theta^2}{4}(0) \\
&= xy + \frac{i}{2}\hbar\theta \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y * x &= y \ \exp\left(\frac{i}{2}\hbar\theta(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x})\right) x \\
&= y\left\{1 + \frac{i}{2}\hbar\theta\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}\right) + O(\theta^2)\right\} x \\
&= xy + \frac{i}{2}\hbar\theta(0-1) \\
&= xy - \frac{i}{2}\hbar\theta \ ,
\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
[x, y] &= x * y - y * x \\
&= xy + \frac{i}{2}\hbar\theta - xy + \frac{i}{2}\hbar\theta \\
&= i\hbar\theta \ . \qquad (۱۳-۱)
\end{aligned}
$$

مقایسه‌ای میان معادلات (۱-۱۰) و (۱-۱۳) نشان می‌دهد که رابطهٔ جابه‌جایی میان مختصات در یک فضای ناجابه‌جایی دو بعدی هم‌ارز با رابطهٔ جابه‌جایی مویال میان مختصات در یک فضای دو بعدی متعارف است.

## ۱-۴ فرمول‌بندی مکانیک کلاسیک در یک فضای ناجابه‌جایی

یکی از روش‌های فرمول‌بندی مکانیک کلاسیک منسوب به هامیلتون است. در فرمول‌بندی هامیلتونی مکانیک کلاسیک برای توصیف یک دستگاه فیزیکی با $n$ درجهٔ آزادی مستقل از تابع هامیلتون $H$ استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود [۵ و۶]:

$$
\begin{aligned}
H &= H(q_1, q_2, \dots, q_n \ ; \ p_1, p_2, \dots, p_n) \\
&= (q \, ; p) \ , \qquad (۱۴-۱)
\end{aligned}
$$

که به $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ها مختصات تعمیم یافته و به $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ها تکانهٔ تعمیم یافته گفته می‌شود.

معادلات بندادی هامیلتون برای هامیلتونی معرفی شده در معادلهٔ (۱-۱۴) چنین می‌باشند:

$$
\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \quad , \qquad \alpha = 1,2,\dots,n \qquad (۱۵-۱)
$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \qquad (۱-۱۶)$$

که دات نشان دهندهٔ مشتق نسبت به زمان است.

اینک به بیان شرح مختصری از فرمول‌بندی هامیلتونی مکانیک کلاسیک در فضای فاز می‌پردازیم. فضای فاز کلاسیک برای یک سیستم مکانیکی با $2n$ درجهٔ آزادی مستقل یک فضای اقلیدسی $2n$ بعدی خواهد بود که برای توصیف هر نقطه از این فضای $2n$ بعدی از یک بردار $2n$ مؤلفه ای $\vec{\xi}$ به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\vec{\xi} = \left(\xi^1 = q_1, \xi^2 = q_2, \ldots, \xi^n = q_n, \xi^{n+1} = p_1, \ldots, \xi^{2n} = p_n\right) . \qquad (۱-۱۷)$$

حال به معرفی کروشه پوآسون می‌پردازیم. فرض کنید که $F$ و $G$ توابعی از مختصات و تکانهٔ تعمیم یافته باشند، یعنی:

$$F = F(q;p)$$
$$G = G(q;p)$$

در این صورت کروشه پوآسون $\{F,G\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود[۵]:

$$\{F,G\} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\right) . \qquad (۱-۱۸)$$

با توجه به تعریف کروشه پوآسون در معادلهٔ(۱-۱۸) می‌توان نوشت:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0 \ , \qquad (۱-۱۹)$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \ , \qquad (۱-۲۰)$$

$$\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \ . \qquad (۱-۲۱)$$

با استفاده از تعریف کروشه پوآسون در معادلهٔ (۱-۱۸) معادلات بندادی هامیلتون، یعنی معادلات (۱-۱۵) و (۱-۱۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, H\} \ , \qquad (۱-۲۲)$$

$$\dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\} \ . \qquad (۲۳-۱)$$

معادلات (۱-۱۹) تا (۱-۲۳) در فضای فاز $2n$ بعدی با مختصهٔ $\vec{\xi}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\left\{\xi^\alpha, \xi^\beta\right\} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \alpha, \beta = 1,2,\dots,2n \qquad (۲۴-۱)$$

$$\dot{\xi}^\alpha = \left\{\xi^\alpha, H\right\} . \qquad (۲۵-۱)$$

اینک به فرمول‌بندی مکانیک کلاسیک در یک فضای فاز ناجابه‌جایی می‌پردازیم. در این فضای فاز ناجابه‌جایی $2n$ بعدی روابط مربوط به کروشه‌های پوآسون بندادی (۱-۱۹) تا (۱-۲۱) به صورت زیر در می‌آیند[۱]:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \theta^{\alpha\beta} \ , \qquad (۲۶-۱)$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \ , \qquad (۲۷-۱)$$

$$\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \alpha, \beta = 1,2,\dots,n \qquad (۲۸-۱)$$

که $\theta^{\alpha\beta}$ یک تانسور پادمتقارن مرتبهٔ دو بوده و کروشهٔ پوآسون تعمیم یافته دارای تعریفی به شکل زیر خواهد بود:

$$\{F, G\} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\beta} \ . \qquad (۲۹-۱)$$

لازم به یاد آوری است که در حد $\theta^{\alpha\beta} \to 0$ کروشه‌های پوآسون بندادی (۱-۲۶) تا (۱-۲۸) به همان کروشه‌های پوآسون بندادی (۱-۱۹) تا (۱-۲۱) تبدیل شده و ساختار پوآسون تعمیم یافتهٔ تعریف شده در معادلهٔ (۱-۲۹) به ساختار پوآسون متعارف، یعنی معادلهٔ (۱-۱۸) بدل می‌شود.

معادلات بندادی هامیلتون در ایـن فضـای فـاز کلاسـیک تعمـیم یافتـه شـکلی هماننـد معادلات (۱-۲۲) و (۱-۲۳) خـواهند داشت با این تفاوت که ساختـار پـوآسـون متعارف (۱-۱۸) با ساختار پوآسون تعمیم یافته (۱-۲۹) جایگزین شده است.

در حالتی که تابع هامیلتون توصیف کنندهٔ سیستم مکانیکی ما به شکل

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha^2 + V_{(q)} \ , \qquad (۱-۳۰)$$

باشد معادلات بندادی هامیلتون خواهند شد:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\
&= \frac{\partial q_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial q_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \theta^{\alpha\beta}\frac{\partial q_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\beta} \\
&= \delta_{i\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \theta^{\alpha\beta}\delta_{i\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\beta} \\
&= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \theta^{i\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\beta} \\
&= \frac{1}{m}p_i + \theta^{i\beta}\frac{\partial V}{\partial q_\beta} \ , \qquad (۱-۳۱)
\end{aligned}$$

که در محاسبات فوق از قاعدهٔ جمع استفاده کرده‌ایم. معادله مربوط به $\dot{p}_i$ عبـارت اسـت از:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= \{p_i, H\} \\
&= \frac{\partial p_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \theta^{\alpha\beta}\frac{\partial p_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\beta} \\
&= -\delta_{i\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial q_i} \ . \qquad (۱-۳۲)
\end{aligned}$$

معادلهٔ (۱-۳۱) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$m\dot{q}_i = p_i + m\theta^{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad ,$$

که اگر از طرفین معادلهٔ بالا نسبت به زمان مشتق گرفته و از معادلهٔ (۱-۳۲) استفاده کنیم به دست می‌آوریم:

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + m\theta^{ij}\,\dot{q}_k\,\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \quad . \qquad (۱-۳۳)$$

معادلهٔ (۱-۳۳) را می‌توان به عنوان قانون دوم نیوتن در یک فضای ناجابه‌جایی تعبیر کرد. در واقع جملهٔ دوم در سمت راست معادلهٔ (۱-۳۳) جملهٔ تصحیحی ناشی از ناجابه‌جایی بودن فضا است.

## ۱-۵ فرمول‌بندی قانون دوم نیوتن در یک فضای ناجابه‌جایی برای یک میدان نیروی مرکزی

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که پتانسیل V در معادلات (۱-۳۱) و (۱-۳۲) دارای تقارن کروی باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_i &= m\dot{q}_i - m\theta^{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j} \\ &= m\dot{q}_i - m\theta^{ij}\frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial q_j} \\ &= m\dot{q}_i - m\theta^{ij}\frac{dV(r)}{dr}\frac{q_j}{r} \quad . \qquad (۱-۳۴) \end{aligned}$$

از سوی دیگر همانطور که قبلاً اشاره گردید در حالت سه بعدی تانسور پادمتقارن مرتبـهٔ دوم $\theta^{ij}$ را می‌توان به صورت معادلهٔ (۱-۷) نمایش داد، از این رو معادلهٔ (۱-۳۴) خواهد شد:

$$\begin{aligned} p_i &= m\dot{q}_i - m\ \varepsilon_{ijk}\theta^k \frac{dV(r)}{dr}\frac{q_j}{r} \\ &= m\dot{q}_i - m\ \varepsilon_{ikj}\theta^j \frac{dV(r)}{dr}\frac{q_k}{r} \\ &= m\dot{q}_i + m\ \varepsilon_{ijk}\theta^j \frac{dV(r)}{dr}\frac{q_k}{r}\ . \end{aligned} \qquad (۱-۳۵)$$

با تعریف کمیت $\Omega_j$ به صورت

$$\Omega_j = \frac{1}{r}\ \frac{dV(r)}{dr}\ \theta^j\ , \qquad (۱-۳۶)$$

معادلهٔ (۱-۳۵) شکل ساده تر زیر را پیدا خواهد کرد:

$$p_i = m\dot{q}_i + m\varepsilon_{ijk}\Omega_j q_k\ . \qquad (۱-۳۷)$$

معادلهٔ (۱-۳۷) را می‌توان به شکل برداری زیر بازنویسی کرد:

$$\vec{p} = m\vec{v} + m\vec{\Omega}\times\vec{r}\ , \qquad (۱-۳۸)$$

که $\vec{r} = (q_1, q_2, q_3)$ و $\vec{v} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ به ترتیب بردارهای مکان و سرعت وابسـته به ذره می‌باشند.

معادلهٔ (۱-۳۲) برای پتانسیل مرکزی $V(r)$ چنین خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial V}{\partial q_i} \\ &= -\frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial q_i} \\ &= -\frac{q_i}{r}\frac{dV(r)}{dr}\ , \end{aligned} \qquad (۱-۳۹)$$

که صورت برداری آن چنین است:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\ \vec{r}\ . \qquad (۱-۴۰)$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادلهٔ (۱-۳۸) نسبت به زمان به معادلهٔ زیر خواهیم رسید:

$$\dot{\vec{p}} = m\vec{a} + m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + m\vec{\Omega} \times \vec{V}\ ,$$

که اگر مقدار $\dot{\vec{p}}$ را از معادلهٔ (۱-۴۰) در معادلهٔ بالا جایگزین کنیم به معادلهٔ زیر خواهیم رسید:

$$m\vec{a} = \frac{-1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\vec{r} + m\vec{v} \times \vec{\Omega} + m\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}\ . \qquad (۱-۴۱)$$

معادلهٔ (۱-۴۱) دارای نمایش مؤلفه‌ای به شکل زیر است:

$$m\ddot{q}_i = -\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}q_i + m\varepsilon_{ijk}\dot{q}_j\Omega_k$$
$$+ m\varepsilon_{ijk}q_j\dot{\Omega}_k\ , \qquad i,j,k = 1,2,3\ . \qquad (۱-۴۲)$$

در معادلهٔ (۱-۴۱) دومین جمله در سمت راست معادله، یعنی جملهٔ $m\vec{v} \times \vec{\Omega}$ مشابه با نیروی کوریولیس است، در حالیکه جملهٔ سوم سمت راست معادله،یعنی جمله $m\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}$ مشابه با نیروی اینرسی ایجاد شده توسط یک دوران غیر یکنواخت می‌باشد[۵و۶].

## ۱-۶ بررسی پاسخهای قانون دوم نیوتن در یک فضای ناجابه‌جایی برای یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه بعدی

به منظور سهولت در انجام محاسبات پارامتر ناجابه‌جایی را تنها در امتداد z، مخالف صفر در نظر می‌گیریم، یعنی:

$$\vec{\theta} = \left(\theta^1 = 0\ ,\ \ \theta^2 = 0\ ,\ \ \theta^3 = \theta\right) \qquad (۱-۴۳)$$

و یا

$$\theta^i = \theta\delta_{i3} \quad . \tag{۴۴-۱}$$

پتانسیل مربوط به یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه بعدی به شکل زیر است:

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \quad . \tag{۴۵-۱}$$

با توجه به معادلات (۱-۴۴) و (۱-۴۵) کمیت $\Omega_i$ در معادلهٔ (۱-۳۶) خواهد شد:

$$\Omega_i = m\omega^2\theta\delta_{i3} \quad , \tag{۴۶-۱}$$

و یا

$$\vec{\Omega} = (0,0,m\omega^2\theta) \quad . \tag{۴۷-۱}$$

با توجه به اینکه $\theta$ در معادلات (۱-۴۶) و (۱-۴۷) مقدار ثابتی می‌باشد جملهٔ $m\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}$ در معادلهٔ (۱-۴۱) و جملهٔ $m\,\varepsilon_{ijk}q_j\dot{\Omega}_k$ در معادلهٔ (۱-۴۲) برابر صفر بوده و خواهیم داشت:

$$m\ddot{q}_i = -m\omega^2 q_i + m^2\omega^2\theta\varepsilon_{ij3}\dot{q}_j \quad . \tag{۴۸-۱}$$

با تعریف

$$q_1 = x \quad ,$$
$$q_2 = y \quad ,$$
$$q_3 = z \quad , \tag{۴۹-۱}$$

معادلهٔ (۱-۴۸) را می‌توان چنین نوشت:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + m\omega^2\theta\dot{y} \quad , \tag{۵۰-۱}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - m\omega^2\theta\dot{x} \quad , \tag{۵۱-۱}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \quad . \tag{۵۲-۱}$$

معادلهٔ (۱-۵۲) یک حرکت نوسانی ساده در راستای محورzها را توصیف می‌کند.