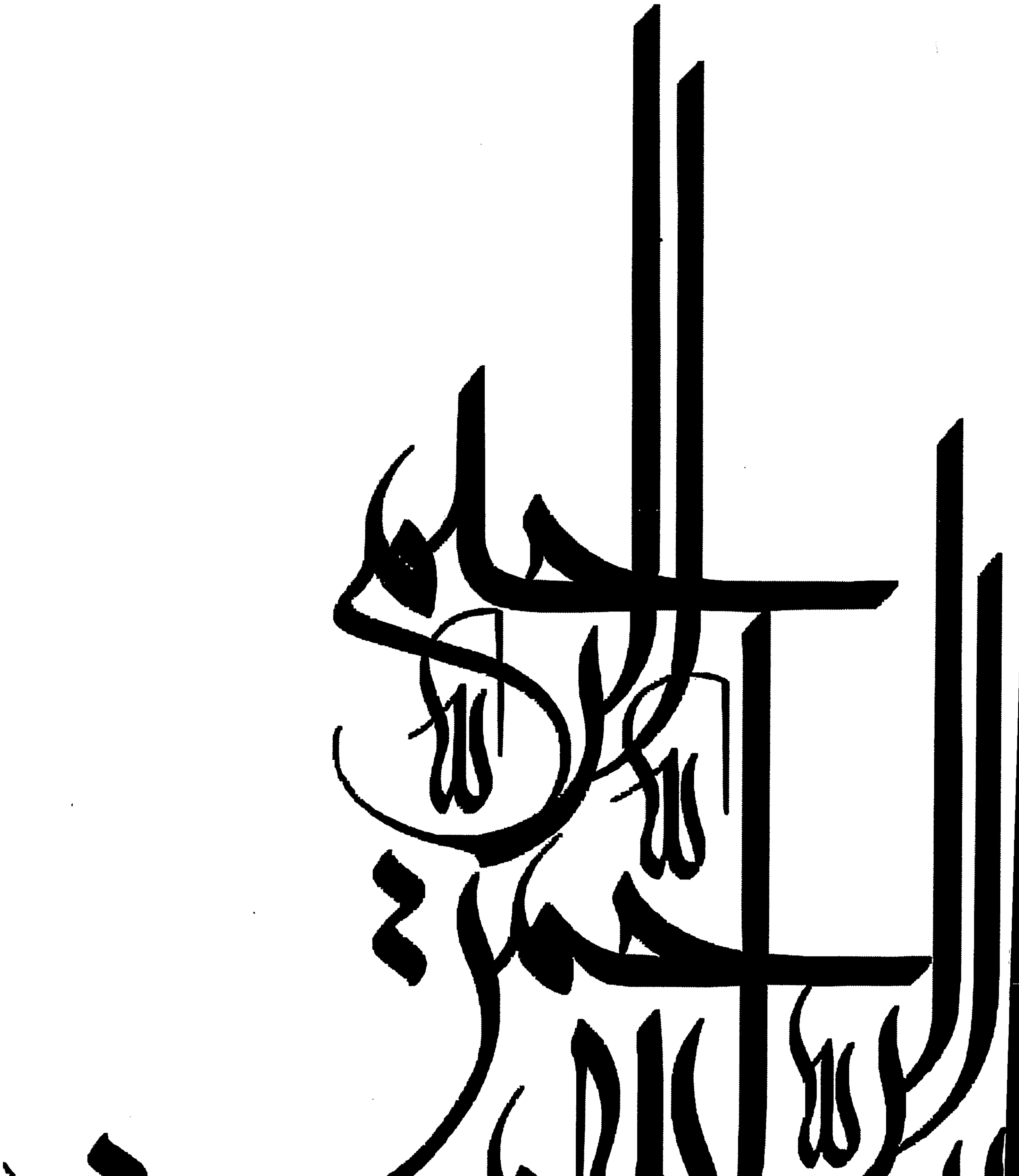


۰۱۱۲۳۱۵

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد آمار بیمه (آکچواری)

فرایند پواسون ناهمگن متناوب بتای دوگانه در نظریهٔ مخاطره

توسط

ایل‌ناز قهرمان بامدادی

استاد راهنما

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

استاد مشاور

دکتر مجتبی گنجعلی

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر دلسوز و مادر مهربانم که در تمام مراحل در کنار من بودند.

قدردانی

سپاس خداوند متعال را که فرصت بهره‌مندی از الطاف بی‌پایانش را به من عطا کرد. باشد که با استفاده درست از نعماتش قدردان و سپاس‌گزار او باشم.

از استاد گرانقدر و فرهیخته جناب آقای دکتر وحیدی‌اصل که به عنوان استاد راهنما، با نکته سنجی‌ها و راهنمایی‌های ارزندهٔ خود مرا در انجام این تحقیق یاری رساندند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد مشاور، جناب آقای دکتر گنجعلی که با رهنمودها و یاری ایشان این تحقیق به انجام رسید، سپاس‌گزاری می‌نمایم.

از اساتید داور آقای دکتر فرید روحانی و آقای دکتر امیر پاینده که زحمت مطالعه و داوری رساله را به عهده گرفتند نیز کمال تشکر را دارم.

همچنین از خانم‌ها پریسا نیلوفر، عاطفه عابدی، مریم تیموریان، فاطمه آرزومند و سایر دوستان نیز به خاطر مساعدت‌های علمی و کمک‌هایشان قدردانی می‌نمایم.

پیشگفتار

در نظریهٔ مخاطره معمولاً از فرایندهای پواسون همگن برای مدل‌بندی فراوانی ادعاها استفاده می‌شوند که گاهی به دلیل ثابت بودن نرخ شدت ادعای آن منجر به یک‌سری نتایج دور از ذهن می‌شود. یک مدل جامع‌تر وابسته به زمان، فرایند پواسون ناهمگن است که نرخ شدت آن تابعی از زمان است. در مدلی که در این وضعیت به کارمی‌رود باید یک تابع وابسته به زمان مناسب یا فرایندی تصادفی مانند $\{\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ را جایگزین پارامتر ثابت λ کنیم.

فرایندهای پواسون ناهمگن با تابع‌های شدت وابسته به زمان برای توصیف نوسانات مخاطرهٔ پدیده‌هایی مناسب‌اند که تغییرات شدت رخدادهای آنها به صورت فصلی است. بسیاری از پدیده‌های طبیعی در یک محیط متناوب و یا تحت شرایط فصلی ظاهر می‌شوند. در نتیجه این پیشامدها ادعاهای بیمه‌ای تولید می‌کنند. برای مثال، عوامل جوی ادعاهای بیمهٔ آتش‌سوزی و یا اتومبیل را تحت تأثیر قرار می‌دهند. همچنین کولاک برف در شمال و توفان و یا سیل در جنوب آمریکا صنعت بیمه را تحت تأثیر قرار می‌هند. مدل‌هایی با نرخ شدت متناوب وابسته به زمان برای مدل‌بندی فراوانی رخدادها در چنین وضعیت‌هایی مناسب‌اند. نشان می‌دهیم که چنین مدل‌هایی حتی برای مجموع رخدادهای متناظر با چنین وضعیت‌هایی نیز قابل‌استفاده است.

تشابه بین تابع‌های نرخ شدت و نرخ شکست به ما کمک می‌کنند که کاربردهای متفاوت فرایندهای پواسون ناهمگن را بیابیم. بعضی از ویژگی‌های فرایندهای پواسون ناهمگن با نرخ شکست (تک) دوره‌ای توسط چوکوا و همکاران [۱۹۹۳] استخراج شده است. این ویژگی‌ها توسط گاریدو و همکاران [۱۹۹۶] در نظریهٔ مخاطره به کار گرفته شده است. برگ و هابرمن [۱۹۹۴] از یک فرایند زاد مارکوف ناهمگن به منظور

پیش‌بینی روند ادعاهای بیمه عمر استفاده کرده‌اند که فرایند پواسون ناهمگن حالت خاصی از آن است. بعضی از مسائل مربوط به ورشکستگی در فضاهای تناوبی نیز توسط آسمیوسن و رولسکی [۱۹۹۴] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

یک مورد تجربی زمانی است که تناوب موجود دقیقاً سال به سال تکرار نشود بلکه قلهٔ دورهٔ کوتاه‌مدت در طی یک دورهٔ نسبتاً طولانی با سطوح مختلف در هر سال تغییر می‌کند. این یک محیط متناوب دوگانه نامیده می‌شود که بیشتر برای مدل‌بندی بلایای طبیعی همچون توفان، که دارای قلهٔ فصلی در وسط هر سال است، در عین حال سطح شدت آن تحت تأثیر بلایای درازمدت دیگری مثل النینو و لانینا قرار دارد، به کار می‌رود.

این مطلب در مورد پدیده‌هایی که روند تغییرات آنها آرام و درازمدت است و در عین حال تغییرات کوتاه‌مدتی وجود دارد که بر تعداد رخدادها تاثیرگذارند، صدق می‌کند.

در این پایان نامه در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و خواص فرایند پواسون ناهمگن و تأثیر تناوب بر آن پرداخته شده است. در فصل دوم چند مدل عملی برای شدت ادعا و استنباط آماری برای پارامترهای مدل نشان داده شده است. در فصل سوم دو مثال از داده‌های اقیانوس اطلس و شهر زاهدان مورد بررسی قرارگرفته است.

چکیده

فرایند پواسون ناهمگن باتابع شدت متناوب در نظریهٔ مخاطره به عنوان فرایند شمارندهٔ ادعاها به کار گرفته می‌شود. در این پایان‌نامه به بررسی مدل پواسون متناوب دوگانه با دوره‌های تناوب کوتاه‌مدت و درازمدت که تابع شدت بتای دوگانه نامیده شده است، پرداخته شده است. این مدل زمانی مناسب است که تناوب کوتاه‌مدت مشابهی هر ساله به‌طور دقیق تکرار نشود؛ ولی سطوح قلهٔ شدت تحت شرایطی متناوب در یک دورهٔ طولانی‌تری تغییر کنند. این مدل تحت فضای متناوبی چون النینو و لانینا که موجب شکل‌گیری وقایعی چون توفان می‌شود، کاربرد دارد. کاربرد این مدل برای مجموعهٔ داده‌های توفان اقیانوس اطلس که ایالات متحده را تحت تأثیر قرار می‌دهد و تعداد روزهای برفی ماهانه در زاهدان مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: فرایند پواسون ناهمگن، تابع شدت، تناوب، مدل پواسون متناوب دوگانه، فرایند ادعای جمعی، برآورد ماکسیمم درستنمایی، توفان، النینو و لانینا.

فهرست مندرجات

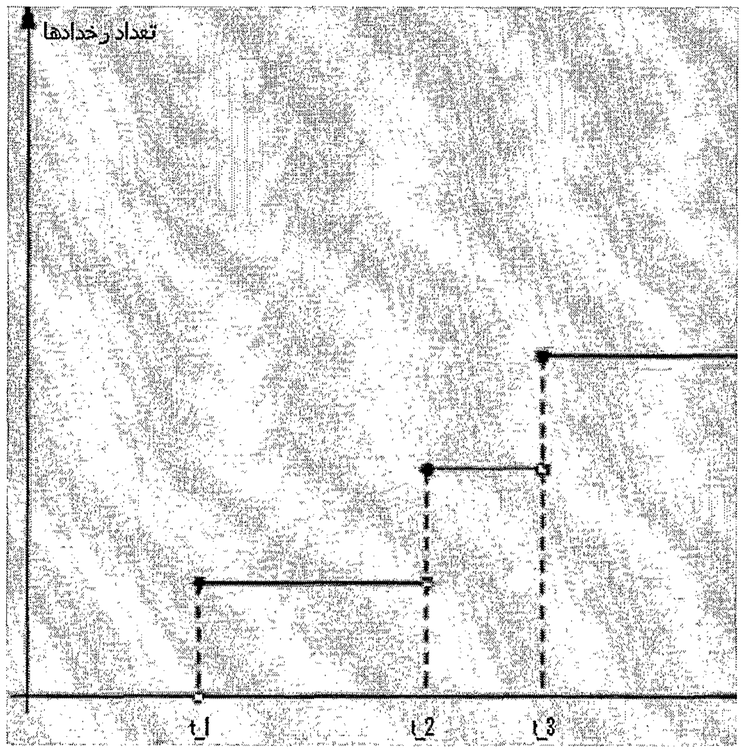
فصل ۱

مقدمه

۱.۱ فرایند شمارشی

فرض کنید نمودار (۱) نشان‌دهندهٔ تعداد مشتری‌هایی باشد که وارد یک بانک می‌شوند. هر گاه یک مشتری وارد بانک می‌شود به شمارندهٔ تعداد مشتری‌ها یک واحد افزوده می‌شود. زمان ورود i امین مشتری را با t_i نمایش می‌دهیم. چون مشتری‌ها به صورت تصادفی وارد می‌شوند، دنبالهٔ t_1،t_2،...،t_m،... که به صورت اختصاری با $\{t_i\}$ نمایش می‌دهیم، یک دنبالهٔ تصادفی است. در نتیجه تعداد مشتری‌هایی که در بازهٔ $[t_0, t)$ وارد می‌شوند یک متغیر تصادفی است.

همانطور که در نظریهٔ فرایند های تصادفی متداول است مجموعهٔ اندیس را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که مقادیر t_i از بازهٔ $T = [0, \infty)$ انتخاب شوند. به این ترتیب زمانی که $m \to \infty$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی صعودی $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m$ داریم که در آن $t_m \to \infty$.



نمودار ۱ : فرایند ورود مشتری‌ها

فرض کنید $t_{\circ} = \circ$ و $N_{\circ} = \circ$. دراین صورت $N_t = max\{n; t_n \leq t\}$ یک فرایند شمارشی نامیده می‌شود و با نماد $\{N_t; t \geq \circ\}$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنید $T_n = t_n - t_{n-۱}$ زمان بین دو ورود متوالی باشد. در این صورت $\{T_n, n \geq ۱\}$ نیز یک فرایند تصادفی است. همچنین بین t_n و T_n رابطهٔ زیر برقرار است:

$$t_n = T_۱ + ... + T_n.$$

اگر تعداد پیشامدهایی که در بازه‌های زمانی جدا از هم رخ می‌دهند، مستقل باشند، آنگاه فرایند شمارشی دارای نموهای مستقل است. این بدان معناست که به‌ازای هر $t \geq \circ$ و $s > \circ$ تعداد پیشامدهایی که تا لحظهٔ t رخ داده‌اند، N_t، از تعداد پیشامدهایی که در بازهٔ زمانی $[s, t+s)$ رخ داده‌اند، $N_{t+s} - N_s$، مستقل است. فرایند

شمارشی دارای نموهای ماناست، اگرتوزیع تعداد پیشامدهایی که در یک بازهٔ زمانی دلخواه رخ می‌دهند، تنها به طول این بازهٔ زمانی بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر فرایند دارای نموهای ماناست اگر تعداد پیشامدهایی که در بازهٔ زمانی $[0, t)$ رخ می‌دهند، N_t، دارای همان توزیع تعداد پیشامدهایی باشد که در بازهٔ $[s, t+s)$ رخ داده‌اند؛ یعنی، $N_{t+s} - N_s$. یکی از مهمترین انواع فرایندهای شمارشی فرایند پواسون است.

تعریف ۱.۱ فرایند نقطه‌ای $\{N_t, t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون نامیده می‌شود اگر $N_0 = 0$ و $\{N_t\}$ دارای شرایط زیر باشد:

i) دارای نموهای مانا و مستقل باشد ؛

ii) به ازای هر $h \geq 0$، $P\{N_{t+h} - N_t = 1\} = \lambda h + o(h)$ ؛

iii) به ازای هر $h \geq 0$، $P\{N_{t+h} - N_t \geq 2\} = o(h)$ ؛

که در آن $o(h)$ به‌این معنی است که $\lim_{h\downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

فرایند پواسون تعریف شده در بالا به عنوان فرایند پواسون همگن شناخته شده است. به طور کلی λ می‌تواند تابعی وابسته به زمان، یعنی $\lambda(t)$، باشد؛ که در این حالت به فرایند پواسون ناهمگن [1] معروف است. در هر حال پارامتر λ ی فرایند پواسون نرخ و یا شدت فرایند نامیده می‌شود.

حال فرض کنید $\lambda(t)$ یک تابع نامنفی (اندازه پذیر و موضعاً انتگرال پذیر[2]) معین باشد و تعداد رخدادهای مطرح شده در بازهٔ زمانی $[s, t)$ با نماد $N_{[s,t)}$ (و N_t اگر $s = 0$) نمایش داده شود که در آن $0 \leq s < t$. در این صورت یک فرایند پواسون ناهمگن چنین تعریف می‌شود:

---

[1] non-homogeneous poisson که به اختصار با نماد NHP نمایش داده می‌شود.

[2] به تابعی موضعاً انتگرال پذیر گفته می شود که بازای هر نقطه از دامنه یک همسایگی موجود باشد که تابع در آن همسایگی انتگرال‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۱ یک فرایند شمارشی مانند $\{N_t; t \geq o\}$ را یک فرایند پواسون ناهمگن (NHP) با تابع شدت λ نامند، که به ازای هر $t \geq ۰$ داریم $\lambda(t) \geq ۰$، اگر دارای شرایط زیر باشد:

i) به ازای $t = ۰$، $N_t = ۰$ ؛

ii) $\{N_t; t \geq o\}$ دارای نموهای مستقل است؛

iii) به ازای هر $h \geq ۰$ ، $P\{N_{t+h} - N_t = ۱\} = \lambda(t)h + o(h)$ ؛

iv) به ازای هر $h \geq ۰$ ، $P\{N_{t+h} - N_t \geq ۲\} = o(h)$ ؛

اهمیت فرایند پواسون ناهمگن بر این واقعیت استوار است که در آن مانایی نمو ها ضروری نیست.

تابع $\Lambda(t)$ که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Lambda(t) = \int_{\circ}^{t} \lambda(v)dv,$$

تابع خطر و یا تابع شدت تجمعی فرایند نامیده می‌شود.

عدد $N_{[\tau,\tau+t)}$ را در بازهٔ زمانی $[\tau, \tau + t)$ در نظر بگیرید که $\tau, t \geq ۰$. پارامتر زمانی τ سن آغازین فرایند پواسون ناهمگن نامیده می‌شود که نشان‌دهندهٔ شروع دورهٔ زمانی است که شمارش رخدادها آغاز می‌شود.

همچنین از چینلار، [۱۹۷۴] می‌دانیم در یک فرایند شمارشی پواسون ناهمگن، $\{N_t; t \geq o\}$، با تابع شدت $\lambda(t)$ فراوانی رخدادها در بازهٔ زمانی $[\tau, \tau + t)$ دارای توزیع پواسون با میانگین $\int_{\tau}^{\tau+t} \lambda(v)dv = \Lambda(\tau + t) - \Lambda(\tau)$ است. پس برای هر $\tau, t \geq ۰$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$P\{N_{[\tau,\tau+t)} = n\} = \frac{\exp(-[\Lambda(\tau + t) - \Lambda(\tau))[\Lambda(\tau + t) - \Lambda(\tau)]^n}{n!}. \qquad (۱.۱)$$

برای توصیف دو فرایند همگن و ناهمگن، مثال ورود مشتریان به رستوران یا هتل را در نظر بگیرید که در زمانهای مختلف روز شدت ثابتی ندارد. در اینجا فرایند

پواسون ناهمگن که λ در آن تابعی از زمان است نمود پیدا می کند. در این فرایند همان‌طور که گفتیم مانایی نموها ضروری نیست و بنابراین پیشامدهایی که امکان رخ دادن آنها در اوقات معینی بیشتر یا کمتر از سایر اوقات است، از این فرایند تبعیت می کنند. فرایندهای پواسون همگن عموماً در نظریهٔ مخاطره برای مدل‌بندی تعداد ادعاها به کار می‌رود. از آنجاکه نرخ شدت وقوع حوادث دراین فرایند برابر با مقدار ثابت λ است، قادر به توصیف حالت‌هایی که رخداد ادعاها به زمانی از سال یا هفته بستگی دارد، نیست و اطلاعات ناقصی به‌دست می‌دهد. فرایندهای پواسون ناهمگن به عنوان جایگزین واقع گرایانه‌تری برای فرایندهای پواسون کلاسیک درنظر گرفته می‌شوند که از آنها برای مدل‌بندی تعداد رخدادها در نظریهٔ مخاطره استفاده می‌شود.

۲.۱ فرایند پواسون ناهمگن با تابع شدت متناوب

اگر فرایند مخاطره در یک محیط متناوب قرار داشته باشد مثلاً زمانی که میزان رخداد ادعاها در بیمه با تغییر فصول سال تغییر کند؛ آنگاه تابع شدت یک فرایند شمارشی ادعای پواسون ناهمگن ، $\{N_t; t \geq 0\}$، یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $c > 0$ ساله است که $t - \lfloor \frac{t}{c} \rfloor c \in [0, c)$ زمان فصلی است، زیرا به‌ازای هر $t > 0$ دلخواهی عدد صحیح مثبت k ای موجود است به‌طوری که $t \in [kc, (k+1)c)$. به عبارت دیگر $kc \leq t < (k+1)c$ که از آن نتیجه می‌شود که $0 \leq t - kc < c$ یا $k \leq \frac{t}{c} < k+1$، بنابراین $k = \lfloor \frac{t}{c} \rfloor$، که در اینجا $\lfloor t \rfloor$ را جزء صحیح عدد حقیقی t در نظر گرفته‌ایم.

در ابتدا تعاریف زیر را ارائه می‌دهیم و سپس به اثبات چند قضیه در این خصوص می‌پردازیم:

تعریف ۳.۱ گوییم متغیر تصادفی T دارای تابع توزیع خطر متناوب با دورهٔ تناوب c است هرگاه تابع توزیع خطر آن، یعنی $\Lambda_T(t)$، نسبت به t متناوب باشد؛ یعنی زمانی که به‌ازای cی مثبتی برابری زیر را داشته باشیم:

$$\Lambda_T(t+c) = \Lambda_T(t), \qquad t \geq 0.$$

تعریف ۴.۱ گوییم متغیر تصادفی T دارای تابع نرخ شدت متناوب با دورهٔ تناوب $c > \circ$ است اگر و تنها اگر

$$\lambda_T(t+c) = \lambda_T(t), \quad t \geq \circ.$$

با استقرا به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$\Lambda_T(t+nc) = \Lambda_T(t), \quad t \geq \circ, n = \circ, ۱, ۲, ... \qquad (۲.۱)$$

همچنین از تعریف (۴.۱) داریم

$$\lambda_T(t+nc) = \lambda_T(t), \quad t \geq \circ, \quad n = \circ, ۱, ۲, ... \qquad (۳.۱)$$

برابری‌های (۲.۱) و (۳.۱) نشان‌دهندهٔ نتیجهٔ تأثیر یک محیط‌تصادفی متناوب بر خواص متغیر تصادفی متناظر T است.

زمانی که نرخ شدت را در یک محیط‌تصادفی متناوب بررسی می کنیم، از آن به عنوان شدت وقوع تمام پیشامدهای تصادفی تعبیر می‌شود که مسبب آن شرایط محیط بوده است. مشاهدهٔ وقوع یک پیشامد شانس وقوع سایر پیشامدها و همچنین شکل تابع شدت موجود را نیز تغییر نمی‌دهد.

حال یک فرایند پواسون ناهمگن با تابع شدت متناوب را در نظر می گیریم و چند خصوصیت این فرایند را که توسط لو و گاریدو [۲۰۰۴] ارائه شده است را بیان و اثبات می کنیم:

قضیه ۱.۱ یک تابع شدت متناوب $\lambda(t)$ با دورهٔ تناوب c را در نظر بگیرید. در این صورت

a) تابع خطر $\Lambda(t)$ دارای خاصیت تقریباً خطی زیر است :

$$\Lambda(t) = \lfloor\frac{t}{c}\rfloor\Lambda(c) + \Lambda(t - \lfloor\frac{t}{c}\rfloor c), \quad t \geq \circ.$$

b) برای هر $n \geq \circ$ و $t \geq \circ$،

$$P\{N_{[nc,nc+t)} = k\} = P\{N_t = k\}, \quad k = \circ, ۱, ...$$

علاوه بر این متغیرهای تصادفی N_{nc} و $N_{[nc,nc+t)}$ از هم مستقلند.

c) فرایند پواسون ناهمگن دارای یک تابع شدت متناوب $\lambda(t)$ با دورهٔ تناوب $c > \circ$ است اگر و تنها اگر متغیرهای تصادفی $N_{[\circ,c)}$ و$N_{[c,c+t)}$ از هم مستقل و به ترتیب هم توزیع با N_c و N_t باشند.

d) برای هر $t \geq \circ$ متغیر تصادفی N_t را می توان به صورت زیر تجزیه نمود:

$$N_t = \begin{cases} N_{[\circ,t)}, & t \leq c \\ M_۱ + M_۲ + ... + M_{\lfloor \frac{t}{c} \rfloor} + N_{[\circ,t-\lfloor \frac{t}{c} \rfloor c)}, & t > c \end{cases} \qquad (۴.۱)$$

که در آن $\{M_i\}_{i\geq ۱}$ متغیرهای تصادفی پواسون $i.i.d.$ هم‌توزیع با$N_{[\circ,c)}$ و مستقل از $N_{[\circ,t-\lfloor \frac{t}{c} \rfloor c)}$ هستند،$M_{\lfloor \frac{t}{c} \rfloor}$ یک متغیر تصادفی هم توزیع با$N_{t-\lfloor \frac{t}{c} \rfloor c}$ برای $t - \lfloor \frac{t}{c} \rfloor c \in [\circ, c)$ است.

برهان.

a) برای اثبات نشان می‌دهیم که به‌ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ ،

$$\Lambda(kc) = k\Lambda(c).$$

در ابتدا درستی رابطه را برای $k = ۲$ نشان می‌دهیم،

$$\begin{aligned} \Lambda(۲c) &= \int_\circ^{۲c} \lambda(v)dv = \int_\circ^c \lambda(v)dv + \int_c^{۲c} \lambda(v)dv \\ &= \Lambda(c) + \int_\circ^c \lambda(v-c)dv = \Lambda(c) + \int_\circ^c \lambda(v)dv = ۲\Lambda(c). \end{aligned}$$

برای سایر مقادیر k نیز مشابه بالا اثبات می‌شود. پس برای $k = \lfloor \frac{t}{c} \rfloor$ داریم

$$\Lambda(\lfloor \frac{t}{c} \rfloor c) = \lfloor \frac{t}{c} \rfloor \Lambda(c).$$

حال با استفاده از رابطهٔ اخیر و خواص انتگرال خواهیم داشت:

$$\Lambda(t)=\int_{\circ}^{t}\lambda(v)dv=\int_{\circ}^{\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c}\lambda(v)dv+\int_{\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c}^{t}\lambda(v)dv$$

با توجه به تناوب تابع $\lambda(t)$ داریم

$$\Lambda(t)=\Lambda(\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c)+\int_{\circ}^{t-\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c}\lambda(v)dv=\lfloor\frac{t}{c}\rfloor\Lambda(c)+\Lambda(t-\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c)\qquad t\geq\circ.$$

لذا حکم برقرار است.

b) با این فرض که $\lambda(t)$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب c است؛ از قسمت (a) نتیجه می‌گیریم که

$$\Lambda(nc+t)=\Lambda(nc)+\Lambda(t)=n\Lambda(c)+\Lambda(t),\qquad n=\circ,۱,۲,\ldots\quad(۵.۱)$$

با استفاده از برابری بالا داریم

$$\begin{aligned}P\{N_{[nc,nc+t)}=k\}&=\frac{\{\Lambda(nc+t)-\Lambda(nc)\}^k}{k!}exp\{-(\Lambda(nc+t)-\Lambda(nc))\}\\&=\frac{\{\Lambda(t)\}^k}{k!}exp\{-\Lambda(t)\}=P\{N_{[\circ,t)}=k\},\qquad k=\circ,۱,۲,\ldots\end{aligned}$$

در ادامه، تابع مولد احتمال $N_{[\circ,nc+t)}$ را با استفاده از رابطهٔ (۵.۱) محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}P_{N_{[\circ,nc+t)}}(z)&=E(z^{N_{[\circ,nc+t)}})\\&=\sum_{k=\circ}^{\infty}P\{N_{[\circ,nc+t)}=k\}z^k\\&=exp\{\Lambda(nc+t)(z-۱)\}\\&=exp\{\Lambda(nc)(z-۱)\}exp\{[\Lambda(nc+t)-\Lambda(nc)](z-۱)\}\\&=P_{N_{[\circ,nc)}}(z)P_{N_{[nc,nc+t)}}(z).\end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود رابطهٔ اخیر حاصلضرب دو تابع مولد احتمال N_{nc} و $N_{[nc,nc+t)}$ است، بنابراین این دو متغیر تصادفی از هم مستقلند.

c) شرط لازم: این قسمت حالت خاصی از قسمت قبلی است که با جایگزینی $n = 1$ در مراحل اثبات آن به سادگی نتیجه حاصل می‌گردد.

شرط کافی: با این فرض که $N_{[0,c)}$ و $N_{[c,c+t)}$ از هم مستقل و به‌ترتیب با N_c و N_t هم‌توزیعند، برای $k = 0$ داریم

$$\begin{aligned} P\{N_{[0,c+t)} = 0\} &= P\{N_{[0,c)} + N_{[c,c+t)} = 0\} \\ &= P\{N_{[0,c)} = 0, N_{[c,c+t)} = 0\} \\ &= P\{N_{[0,c)} = 0\}P\{N_{[c,c+t)} = 0\} \\ &= P\{N_{[0,c)} = 0\}P\{N_{[0,t)} = 0\}. \end{aligned}$$

اولین و آخرین عبارت برابری را می‌توان با کمک تعریف توزیع پواسون ناهمگن، برحسب تابع شدت به شکل زیر نوشت؛

$$exp\Big\{ - \int_0^{c+t} \lambda(v)dv\Big\} = exp\Big\{ - \Big(\int_0^{c} \lambda(v)dv + \int_0^{t} \lambda(v)dv\Big)\Big\}.$$

پس از عملیات جبری داریم

$$\int_0^{c+t} \lambda(v)dv = \int_0^{t} \lambda(v)dv + \int_0^{c} \lambda(v)dv, \qquad t \geq 0.$$

با مشتق‌گیری از طرفین می‌توان نشان داد که برابری اخیر معادل با متناوب بودن تابع شدت $\lambda(t)$ با دورهٔ تناوب $c > 0$ است.

d) برای اثبات متغیر تصادفی $N_{[(k-1)c,kc)}$ را به‌ازای هر k، $k = 1, 2, 3, \ldots$، با M_k مشخص می‌کنیم که (با توجه به‌قسمت b) از هم مستقل و هم‌توزیعند. N_t برای $t > c$ به شکل زیر قابل تجزیه است،

$$N_t = N_{[0,t)} = N_{[0,c)} + N_{[c,2c)} + \ldots + N_{[(k-2)c,\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c)} + N_{[\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c,t)}$$

حال با توجه به خاصیت متناوبی بودن $\lambda(t)$ و قسمت b داریم

$$N_t = M_1 + M_2 + \ldots + M_{\lfloor\frac{t}{c}\rfloor} + N_{t-\lfloor\frac{t}{c}\rfloor c}.$$

■

۳.۱ توزیع احتمال با نرخ شدت متناوب

در اینجا تعاریف دیگری را که توسط دمیتروف و همکارانش [۱۹۹۷] بر حسب تابع توزیع برای تابع شدت و تابع خطر ارائه داده‌اند را مطرح می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی نامنفی T، زمان انتظار برای وقوع یک پیشامد با تابع توزیع تجمعی $F_X(t) = P\{X < t\}$ [۳] (CDF) [۴] و، در صورت وجود، با تابع چگالی احتمال (PDF) [۵] $f_T(t)$ باشد.

تابع توزیع خطر (HDF) [۶] $\Lambda_T(t,u)$ به‌عنوان تابع توزیع شرطی برای زمان انتظار تا وقوع یک پیشامد، به شرط $T \geq t$، تعریف می‌شود؛ یعنی

$$\Lambda_T(t,u) = P\{T - t < u \mid T \geq t\} = \frac{F_T(t+u) - F_T(t)}{۱ - F_T(t)}. \qquad (۶.۱)$$

در تعریف بالا $F_T(t) < ۱$ فرض می‌شود. اگر $f_T(t)$ موجود باشد، برای تابع شدت و یا تابع شکست [۷] $\lambda(t)$ داریم

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{۱ - F(t)}. \qquad (۷.۱)$$

با ضرب طرفین در dt داریم

$$\lambda(t)dt = P\{T \in [t, t+dt) \mid T \geq t\}.$$

رابطهٔ اخیر به صورت زیر قابل تفسیر است:

$$\lambda(t)dt \cong P\{T \in [t, t+dt) \mid T \geq t\}$$

$=P\{$پیشامد در یک همسایگی لحظه t رخ دهد | پیشامدی رخ ندهد قبل زمان t$\}$.

[۳] در تمام این متن $F_X(t)$ برابر با $P\{X < t\}$ در نظر گرفته شده است.

[۴] Cumulatvie Distribution Function که به اختصار با نماد CDF نمایش داده می‌شود.

[۵] Probability Density Function که به اختصار با نماد PDF نمایش داده می‌شود.

[۶] Hazard Distribution Function که به اختصار با نماد HDF نمایش داده می‌شود.

[۷] در نظریهٔ مخاطره آن را تابع شدت و در نظریهٔ قابلیت اعتماد تابع شکست می‌نامند.