دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده **علوم ریاضی**

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (کاربردی)

پایداری میانگین مربعی روشهای رونگه-کوتا برای

معادلات دیفرانسیل تصادفی

توسط

محمود باردل

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

بهمن ۱۳۸۸

پایداری میانگین مربعی روشهای رونگه-کوتا برای

معادلات دیفرانسیل تصادفی

چکیده

به عنوان تعمیم بسطهای برشی تیلور غیر تصادفی، بسطهای برشی مرتبهٔ دوم در حالت اسکالر و چند بعدی بر حسب توانهای نمو متغیرها برای یک تابع به اندازهٔ کافی هموار از جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی آورده شده است. روند کلی ساخت روشهای ضعیف برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز ضربی نشان داده شده است. همانند حالت غیرتصادفی، این روند عبارت است از مقایسهٔ بسط تصادفی تقریب با روش تیلور متناظر. به این طریق شرایط مرتبهٔ لازم برای اینکه روش رونگه-کوتای تصادفی دارای مرتبه دوم ضعیف باشد بدست آورده شده است و مثالهای صریح از تعمیم‌های خانوادهٔ کلاسیک روشهای رونگه-کوتای صریح دو مرحله‌ای مرتبه دوم نشان داده شده است.

پایداری عددی روشهای رونگه-کوتای معرفی شده بررسی گردیده است. مطالعه، بر روی پایداری نسبت به گشتاور دوم (پایداری میانگین مربعی) متمرکز شده است. شکلهای مربوط به دامنهٔ پایداری روشهای عددی نشان داده شده است. همچنین مثالهای عددی برای تأیید مباحث نظری آورده شده است.

واژه‌های کلیدی : معادلات دیفرانسیل تصادفی، تقریب ضعیف، بسط ایتو-تیلور، روش رونگه-کوتا، روش صریح، پایداری میانگین مربعی

فهرست مندرجات

لیست اشکال

مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی بدلیل وارد کردن عامل پریشندگی (نویز) به معادلات دیفرانسیل معمولی، مدلهای واقعی‌تری ارائه می‌کنند و به ابزاری مهم در بسیاری از زمینه‌های علمی تبدیل شده‌اند. در گذشته به دلیل عدم وجود روشهای کارآمد و همچنین فقدان کامپیوترهای به اندازهٔ کافی توانمند، از عوامل تصادفی صرفنظر می‌شد ولی با بوجود آمدن کامپیوترهایی با توانایی بالا توجه به این معادلات و روشهای حل آنها گسترش یافته است.

همانند حالت غیر تصادفی، روشهای تیلور تصادفی از برش بسطهای تیلور تصادفی حاصل می‌گردند. یکی از اشکالات مهم بکارگیری تقریبهای تیلور این است که محاسبه مشتقات زیادی نیاز است لذا به روشهای رونگه-کوتا که از مشتق استفاده نمی‌کنند یا خیلی کم استفاده می‌کنند علاقه‌مندیم.

در روشهای رونگه-کوتای کلاسیک، تکنیک بدست آوردن شرایط مرتبه شامل یکی کردن بسط جواب تولید شده توسط روش رونگه-کوتا با بسط تیلور بود. این یکسان سازی روی نموهای متغیرهای مستقل انجام می‌شد. این روند به شرایط مرتبه منجر می‌شد و برای هر مرتبه، خانواده‌ای از روشها بدست می‌آمد. ساده ترین خانواده بدست آمده از این راه، خانواده یک پارامتری مرتبه دوم دو مرحله‌ای از روشهای رونگه-کوتاست. برای ساختن تئوری مشابه برای حالت تصادفی، بوضوح گام اول بدست آوردن تعمیم این خانواده از روشهای مرتبه دوم از روشهای رونگه-کوتاست. این عمل به دو وظیفه تقسیم می‌شود: یکی بدست آوردن تعمیم شرایط مرتبه، و دومی پیدا کردن

مثالهایی از خانواده‌هایی که در شرایط بدست آمده صدق کنند.

بسطهای ایتو–تیلور بر پایهٔ انتگرالهای تصادفی چندگانه می‌باشند و با انتخاب انتگرالهای چندگانه که در این بسطها ظاهر می‌شوند، مشخص می‌گردند. بنابراین انواع مختلفی از تقریبهای تابعی فرایندهای انتشار را فراهم می‌سازند. با برش بسطهای ایتو–تیلور به یک ترکیب خطی از انتگرالهای چندگانه می‌رسیم. در بسیاری از موارد کار با چنین بسطهای برشی دشوار است چرا که انتگرالهای تصادفی چندگانه بر حسب فرایندهای تصادفی ساده‌تر قابل بیان نیستند. برای دوری از این مشکل بیان جدیدی برای بسطهای ایتو–تیلور که اصطلاحاً بسطهای ایتو–تیلور ضعیف نامیده می‌شوند آورده می‌شود. این بسطها که برای یک تابع $f(t, X_t)$ در یک نقطهٔ $(t_\circ, X_{t_\circ})$ بیان می‌شوند، همانند بسطهای معمولی ترکیبی از حاصلضربهای نموهای $\Delta t = t - t_\circ$ و $\Delta X = X_t - X_{t_\circ}$ می‌باشد. مهمترین کاربرد بسطهای ایتو–تیلور ساخت تقریبهای زمان گسسته از فرایندهای ایتو می‌باشد. حال اگر فقط محاسبهٔ گشتاورها و یا دیگر توابع فرایند ایتو مد نظر باشد بسطهای ایتو–تیلور ضعیف را بکار خواهیم گرفت. بنابراین از این طریق روشهای رونگه–کوتا از مقایسهٔ بسط تصادفی تقریب با روش تیلور متناظر بدست می‌آید یعنی همان روند حالت غیر تصادفی.

شرایط مرتبه بدست آمده تصادفی هستند به این معنی که شامل متغیرهای تصادفی‌اند. برای هر انتخاب از این متغیرهای تصادفی، تعمیمی متفاوت از خانواده مرتبه دوم کلاسیک داریم.

راه‌های مختلفی برای اندازه‌گیری دقت یک روش حل عددی SDE وجود دارد یا به عبارت دیگر، انواع مختلفی از همگرایی برای روشهای تصادفی موجود است. در این پایان‌نامه تنها همگرایی ضعیف مد نظر می‌باشد. مفهوم همگرایی به دقت روش عددی بر بازه متناهی $[t_\circ, T]$ برای طول گام کوچک Δ مربوط می شود. با این حال در بسیاری از کاربردها رفتار SDE وقتی $t \to \infty$ مورد توجه می باشد که به بررسی پایداری روش عددی منجر می‌شود. همانند همگرایی روشهای عددی تصادفی مفاهیم مختلفی از پایداری برای این روشها وجود دارد. ما به پایداری نسبت به گشتاورها و به ویژه گشتاور دوم (پایداری میانگین مربعی) می‌پردازیم.

در این پایاننامه که بر پایهٔ مرجع [۱۷] انجام شده است، ابتدا مقدمات لازم از نظریهٔ احتمال، ویژگیهای فرایند وینر و انتگرالهای تصادفی نسبت به این فرایند در فصل اول تحت عنوان مفاهیم اولیه آورده می‌شود. کلیات معادلات دیفرانسیل تصادفی، انتگرالهای ایتوی چندگانه، روشهای ضعیف و بسطهای برشی ایتو-تیلور ضعیف موضوع فصل دوم است. در فصل سوم به روشهای رونگه-کوتا برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پرداخته می‌شود. روند کلی ساخت چنین روشهایی آورده می‌شود و شرایط مرتبهٔ لازم برای اینکه روش دارای مرتبهٔ دوم ضعیف باشد بدست آورده می‌شود. سپس با تعمیم این روشها به شرایط مرتبهٔ جدید می‌رسیم. برای هر خانواده از روشها مثالهایی از روشهای رونگه-کوتای تصادفی صریح می‌آوریم که در شرایط مرتبه صدق می‌کنند. در انتهای فصل با ذکر مثالهای عددی متنوع روشهای ذکر شده را به چالش می‌کشیم. پایداری معادلات دیفرانسیل تصادفی و روشهای حل عددی آنها در فصل آخر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در این فصل به پایداری میانگین مربعی روشهای ذکر شده و مقایسهٔ آنها می‌پردازیم. این مقایسه از طریق رسم نواحی پایداری روشها و همچنین پیاده سازی عددی حاصل می‌گردد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل پیش زمینه لازم برای مطالبی که در پایان‌نامه مطرح می‌شوند آورده می‌شود، هر چند جزئیات بیشتری در مورد نظریهٔ احتمال و حسابان تصادفی را به ترتیب می‌توان در مراجعی از جمله[۲۲] و [۱۰] یافت.

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه احتمال

تعاریف لازم از نظریهٔ احتمال، شامل اندازهٔ احتمال، توابع توزیع و چگالی، متغیر تصادفی، گشتاورها، و همگرایی دنبالهٔ متغیرهای تصادفی در این بخش آورده می‌شوند.

تعریف ۱.۱.۱ (σ-جبر) $\mathcal{A}$ را یک σ-جبر از زیر مجموعه‌های Ω گویند هرگاه:

۱)اگر $A, B \in \mathcal{A}$ آنگاه $A \cap B \in \mathcal{A}$،

۲) اگر $A \in \mathcal{A}$ آنگاه $A^c = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\} \in \mathcal{A}$،

۳) برای هر دنبالهٔ $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$، داشته باشیم $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

برای σ-جبر $\mathcal{A}$ ثابت می‌شود که $\phi, \Omega \in \mathcal{A}$.

تعریف ۲.۱.۱ (اندازه) تابع مجموعه‌ای $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ را یک اندازه روی σ-جبر $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های Ω گویند هرگاه:

۱) $\mu(\phi) = 0$،

۲) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعضای دوبدو جدا از هم $\mathcal{A}$ باشد آنگاه $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

تعریف ۳.۱.۱ (مجموعهٔ اندازه پذیر) زیر مجموعهٔ $E \subseteq \Omega$ را اندازه پذیر (نسبت به μ) می‌نامیم هر گاه به ازای هر $A \subseteq \Omega$ داسته باشیم:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c).$$

تعریف ۴.۱.۱ (تابع اندازه پذیر) تابع $f : \Omega \to \mathbb{R}$، Ω-اندازه پذیر است هرگاه به ازای هر زیر مجموعهٔ باز $O \subseteq \mathbb{R}$، $f^{(-1)}(O)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۵.۱.۱ (اندازهٔ احتمال) تابع $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ را یک اندازهٔ احتمال گویند هرگاه P یک اندازه روی $\mathcal{A}$ باشد.

تعریف ۶.۱.۱ (فضای احتمال) سه تایی $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ که شامل فضای نمونهٔ Ω (که مجموعهٔ تمام حالات ممکن است)، σ-جبر $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های Ω و یک اندازهٔ احتمال P روی $\mathcal{A}$ می‌باشد، فضای احتمال نامیده می‌شود. نقاط $\omega \in \Omega$ نقاط نمونه‌ای[1] هستند، مجموعهٔ $A \in \mathcal{A}$ یک پیشامد[2] است و $P(A)$ احتمال این پیشامد می‌باشد. پیشامد Ω را پیشامد حتمی و پیشامد ϕ را پیشامد محال گویند.

انتخاب فضای احتمال بایستی بدقت انجام شود چرا که فضاهای احتمال مختلف منجر به جواب‌های متفاوتی برای یک مسئله می‌گردد. به عنوان مثال پارادوکس برتراند[3] گویای این موضوع

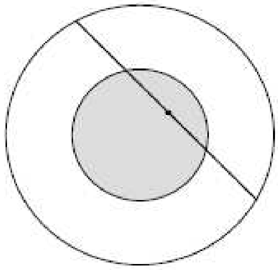
[1] Sample points

[2] Event

[3] Bertrand's paradox

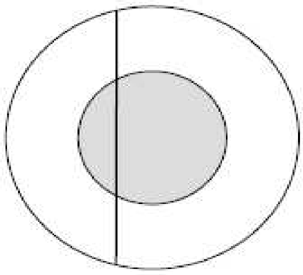
است: دایره‌ای با شعاع ۲ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. به طور تصادفی وتری از این دایره را رسم می‌کنیم. احتمال اینکه این وتر دایرهٔ هم‌مرکز داخلی به شعاع ۱ سانتی‌متر را قطع کند چقدر است؟

حالت اول: هر وتر را به طور منحصر بفرد می‌توان با نقطهٔ میانی‌اش مشخص کرد. بنابراین



$$\text{احتمال اینکه وتر دایره داخلی را قطع کند} = \frac{\text{مساحت دایره داخلی}}{\text{مساحت دایره بزرگتر}} = \frac{۱}{۴}$$

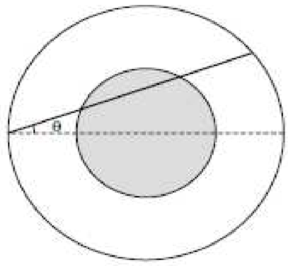
حالت دوم: فرض کنیم وتر به صورت عمودی باشد. در این صورت دایرهٔ داخلی را قطع می‌کند اگر قطر آنرا که ۲ سانتی‌متر است قطع کند. از این رو



$$\text{احتمال اینکه وتر دایره داخلی را قطع کند} = \frac{\text{۲ سانتی متر}}{\text{۴ سانتی متر}} = \frac{۱}{۲}$$

حالت سوم: فرض کنیم یک انتهای وتر، سمت چپ دایرهٔ بزرگ باشد. زاویهٔ θ مابین $\pm\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند و دایرهٔ داخلی را قطع می‌کند اگر بین $\pm\frac{\pi}{6}$ تغییر کند. لذا

$$\text{احتمال اینکه وتر دایره داخلی را قطع کند} = \frac{\frac{2\pi}{6}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{۱}{۳}$$



تعریف ۷.۱.۱ (متغیر تصادفی) تابع حقیقی مقدار $X : \Omega \to \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی است هرگاه برای هر $a \in \mathbb{R}$، $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$.

تعریف ۸.۱.۱ (تابع توزیع) تابع $F_X : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ که برای هر $x \in \mathbb{R}$ بوسیلهٔ

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$$

تعریف می‌شود، تابع توزیع متغیر تصادفی X نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱ (متغیر تصادفی پیوسته) متغیر تصادفی X متغیر پیوسته نامیده می‌شود هرگاه تابع نامنفی و حقیقی مقدار f موجود باشد بطوریکه

$$\forall A \subset \mathbb{R} : P[X \in A] = \int_A f(x)dx$$

و اگر $A = \mathbb{R}$ آنگاه

$$P[X \in \mathbb{R}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۱$$

تابع f را تابع چگالی متغیر تصادفی X نامند.

فرض کنیم X یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار باشد. در این صورت رابطهٔ تابع توزیع و تابع چگالیِ آن بصورت زیر است:

$$F_X(x) = P[\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x)] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

یا به عبارتی

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱ (تابع توزیع توأم) تابع توزیع احتمال توأم یک بردار تصادفی n - بعدی است که رابطهٔ بین متغیرهای تصادفی را مشخص می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(\omega \in \Omega : X_1(\omega) < x_1, \dots, X_n(\omega) < x_n).$$

تعریف ۱۱.۱.۱ (تابع چگالی توأم) تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ بصورت زیر داده می‌شود:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ (امید ریاضی) اگر X یک متغیر تصادفی تعریف شده روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشد، آنگاه مقدار میانگین یا امید ریاضی X عبارتست از

$$E(X) = \int_\Omega X dP,$$

برای متغیر تصادفی پیوسته داریم

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

اغلب از نماد $\mu = E(X)$ برای امید ریاضی متغیر تصادفی X استفاده می‌شود.

فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی هستند. برخی از خواص امید ریاضی به قرار زیر است:

۱) برای اعداد ثابت a و b داریم: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

۲) اگر $X \leq Y$ آنگاه $E(X) \leq E(Y)$.

۳) (نامساوی جنسن[۴]) اگر g تابعی محدب باشد (یعنی برای $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$)، آنگاه $g(E(X)) \leq E(g(X))$.
در حالت خاص برای $g(x) = |x|$ و $g(x) = x^2$ داریم :

$$|E(X)| \leq E(|X|), \quad |E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}.$$

۴) (نامساوی مارکف[۵]) اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد و $a > 0$ آنگاه $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.
۵) (نامساوی چبیشف[۶]) اگر $\mu = E(X)$ و $\sigma^2 = Var(X)$ متناهی باشند، آنگاه

$$P((X-\mu)^2 \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a}.$$

تعریف ۱.۱.۱۳ (واریانس و انحراف معیار) واریانس متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2,$$

انحراف معیار متغیر تصادفی X نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

تعریف ۱.۱.۱۴ (کواریانس و همبستگی) کواریانس دو متغیر تصادفی X_1, X_2 بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))] = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2),$$

[۴] Jensen's inequality
[۵] Markov's inequality
[۶] Chebyshev's inequality

که در آن $\mu_1 = E(X_1),\ \mu_2 = E(X_2)$. ضریب همبستگی دو متغیر X_1 و X_2 کواریانس نرمال شده است:

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_1\sigma_2},$$

همواره داریم $-1 \leq \rho_{X_1,X_2} \leq 1$. اگر ضریب همبستگی ناصفر باشد آنگاه X_1 و X_2 همبسته‌اند.

تعریف ۱.۱.۱۵ (گشتاور) گشتاور مرتبهٔ kام یک متغیر تصادفی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

تعریف ۱.۱.۱۶ (متغیر استاندارد) اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، متغیر تصادفی $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ که دارای میانگین صفر و واریانس یک است را متغیر تصادفی استاندارد می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۷ (متغیر نرمال) متغیر تصادفی $X : \Omega \to \mathbb{R}$ را گاوسی (نرمال) گویند اگر تابع چگالی آن بصورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

که در آن $\mu = E(X)$ و $\sigma^2 = Var(X)$ و می‌نویسیم $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

اگر $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ توزیع گاوسی استاندارد بدست می‌آید که با $N(0, 1)$ نمایش می‌دهند. می‌توان نشان داد گشتاور متغیر تصادفی نرمال بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \mu_{2k+1} = 0 \\ \mu_{2k} = \prod_{j=1}^{k} (2j-1)\sigma^{2k}. \end{cases}$$

لم زیر شامل نتیجهٔ مفیدی برای محاسبهٔ گشتاورهای جواب است:

لم ۱.۱.۱ [۱۷] اگر X یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار با توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. اگر $\alpha \in \mathbb{C}$ آنگاه $E[e^{\alpha X}] = e^{\alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}$.

تعریف ۱۸.۱.۱ (بردار گاوسی) بردار تصادفی $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ را گاوسی (چند متغیره) گویند هرگاه تابع چگالی آن بصورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{((2\pi)^n detC)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m).C^{-1}(x-m)^T} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

برای یک $m \in \mathbb{R}^n$ (که میانگین گفته می‌شود) و یک ماتریس متقارن مثبت معین C (که ماتریس کواریانس است). در این حالت می‌نویسیم $X \sim N(m, C)$.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیهٔ حد مرکزی) فرض کنیم $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ متغیرهای تصادفی حقیقی مستقل و هم‌توزیع باشند طوریکه

$$E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

اگر قرار دهیم $S_n = X_1 + \ldots + X_n$، آنگاه برای هر $-\infty < a < b < +\infty$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی دانستن چگونگی همگرایی حائز اهمیت می‌باشد. حالت‌های همگرایی مختلفی وجود دارد که در زیر به معمول‌ترین آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ (همگرایی قریب به یقین) دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\{X_n(\omega)\}$ با احتمال یک $(W.P.1)$ به $X(\omega)$ همگراست اگر :

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\}) = 1$$

این همگرایی را همگرایی تقریباً مطمئن $(a.s)$[۷] نیز گویند.

تعریف ۲۰.۱.۱ (همگرایی در میانگین مربعات) دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ با $E(X^2) < \infty$ و $E(X_n^2) < \infty$ در میانگین مربعات به X همگراست اگر:

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n(\omega) - X(\omega)|^2) = 0.$$

[۷] Almost sure

تعریف ۲۱.۱.۱ (همگرایی در احتمال) دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ در احتمال به X همگراست اگر برای هر $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) = 0$$

این تعریف همگرایی در بین سه تعریف دیگر همگرایی ضعیف‌ترین است و می‌توان آنرا بصورت زیر نیز نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} E(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}) = 0.$$

تعریف ۲۲.۱.۱ (همگرایی در توزیع) دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ در توزیع به X همگراست اگر در تمام نقاط پیوستهٔ F_X داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

همگرایی با احتمال یک و همگرایی در میانگین مربعات، همگرایی در احتمال و همگرایی در توزیع را نتیجه می‌دهند، همگرایی در احتمال تنها همگرایی در توزیع را نتیجه می‌دهد و همگرایی در توزیع هیچ یک از دیگر همگرایی‌ها رانتیجه نمی‌دهد[۴].

۲.۱ فرایندهای تصادفی

تعریف ۱.۲.۱ (فرایند تصادفی) یک فرایند تصادفی، خانواده‌ای است از متغیرهای تصادفی $X(t,\omega)$ از دو متغیر $t \in T$ و $\omega \in \Omega$ روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ که مقادیر حقیقی فرض می‌شوند و به عنوان تابعی از ω برای هر t ی ثابت $P-$ اندازه‌پذیر است. پارامتر t به عنوان زمان در بازهٔ زمانی T تعبیر می‌شود. $X(t,.)$ یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال Ω می‌باشد و $X(.,\omega)$ نیز مسیر نمونه نامیده می‌شود.

همانند متغیرهای تصادفی، فرایندهای تصادفی می‌توانند دارای توابع گشتاور و کواریانس باشند. تابع میانگین و کواریانس یک فرایند تصادفی اسکالر $X(t,\omega)$ بصورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(X(t,\omega)), \\ K_X(t_1,t_2) &= E\{(X(t_1,\omega)-m_X(t_1))(X(t_2,\omega)-m_X(t_2))\}. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۲.۱ (متغیرهای مستقل و هم‌توزیع) دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $X_1,\ldots,X_n$ رامستقل و هم‌توزیع گویند هرگاه

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \ldots = F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \text{و} \quad F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i).$$

تعریف ۳.۲.۱ (فرایند گاوسی) فرایند تصادفی حقیقی $X(t)$ را گاوسی (نرمال) گوییم هرگاه برای هر عدد طبیعی n، توزیع توأم n ‐بعدی آن نرمال n ‐ متغیره باشد.

تعریف ۴.۲.۱ (فرایند مارکف[۸]) فرایند تصادفی $X(t)$ را یک فرایند مارکف گوئیم اگر توزیع شرطی آینده با فرض معلوم بودن حالت فعلی و تمام حالات گذشته فقط به حالت فعلی بستگی داشته باشد، یعنی برای هر $t > s_n > \ldots > s_2 > s_1$ داشته باشیم

$$P[X(t) \in A | X(s_1) = x_1, \ldots, X(s_n) = x_n] = P[X(t) \in A | X(s_n) = x_n].$$

۳.۱ فرایند وینر

حرکت براونی واژه‌ای است برای توصیف پدیدهٔ رفتار غیرقابل پیش‌بینی یک ذره درون مایع که به وسیلهٔ محرک تصادفی در غیاب اصطکاک اعمال می‌شود. رابرت براون گیاه‌شناس اسکاتلندی برای

[۸] Markov process