بسمه تعالی

دانشگاه پیام نور

دانشکده: علوم

گروه: ریاضی

عنوان پایان نامه:

روشهای شبه SOR برای حل دستگاههای بلوکی خطی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما:

دکتر هاشم صابری نجفی

تهیه و تنظیم:

جواد عزیزی طالمی

ماه و سال انتشار:

بهمن ۱۳۸۵

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

باسمه تعالی

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: روشهای شبه SOR برای حل دستگاههای خطی بلوکی.

که توسط جواد عزیزی طالمی **تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأئید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۱/۱۵ **نمره :** ۱۹ نوزده **درجه ارزشیابی:** عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر هاشم صابری نجفی	استاد راهنما	دانشیار	
۲- --	استاد راهنمای همکار یا مشاور	--	
۳- دکتر میرکمال میرنیا	استاد ممتحن (داور)	دانشیار	
۴- دکتر مهدی صحت خواه	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

(نمونه تصویب نامه پایان نامه)

تقدیم به پدر و مادر فداکارم

در تدوین این پایان نامه تنی چند شایسته سپاس اند. بیش از همه مایلم مراتب امتنان و تشکر خود را نسبت به جناب آقای دکتر هاشم صابری نجفی به عنوان استاد راهنما و همچنین جناب آقای دکتر میرکمال میرنیا به عنوان استاد داور ابراز کنم، که قبول زحمت فرمودند و پایان نامه اینجانب را با دقت فراوان مطالعه نمودند و برای اصلاح آن پیشنهادها و رهنمودهای بسیار با ارزشی ارائه کردند.

دو

فهرست مطالب

سه

فهرست جداول

فهرست اشکال

نام خانوادگی دانشجو : عزیزی طالمی **نام :** جواد

عنوان پایان نامه : روشهای شبه SOR برای حل دستگاههای بلوکی خطی

استاد راهنما : دکتر هاشم صابری نجفی

استاد مشاور : ---------------------

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی کاربردی **گرایش :** آنالیز عددی

دانشگاه : پیام نور

دانشکده : تبریز **تاریخ فارغ التحصیلی : ۸۵/۱۱/۱۵** **تعداد صفحه : ۷۹**

چکیده :

در این پایان نامه چند روش شبه SOR برای حل دستگاههای افزوده پیشنهاد می شود. این روشها کاربردهای متفاوتی در علوم محاسباتی دارند. همگرایی و انتخاب پارامتر بهینه برای این الگوریتم ها مورد مطالعه قرار می گیرند. همگرایی و ناحیهٔ واگرایی برای این الگوریتم ها داده می شود. در ادامه روش را با دو پارامتر ارائه می کنیم و مشخصهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس تکرار از روش شبه SOR تعمیم یافته را تحلیل می کنیم. قضیه همگرایی این روش تکراری جدید را با محدودیت اعمال شده بر پارامتر بیان می کنیم. در نهایت دستگاه افزوده ای که منجر به حل مسئله کمترین مربعات خطی تنک می شود را مطالعه می کنیم. واضح است که این روش دارای خصوصیات عددی بهتری نسبت به روشهایی است که بر پایه معادلات نرمال تشکیل می شود و در آن کرانهای خطا و تخمین مولفه های جواب در دستگاه افزوده معرفی می شود. همچنین ثابت می کنیم که تخمین خطایمان از مقیاس بندی سطری در دستگاه افزوده مستقل است.

کلید واژه ها : روش SOR، روشهای شبهSOR، دستگاه افزوده، همگرایی، پارامتر شتا ب دهنده،...

مقدمه:

روش های مناسب برای حل دستگاه های خطی شامل ماتریس های تنک اغلب متضمن تکنیک های تکراری بجای مستقیم هستند. از بین روشهای تکراری استاندارد برای حل دستگاه های خطی بلوکی روش SOR به خاطر شتاب یا سرعت همگرایی بیشتر، کاربردهای بیشتری دارد. برای دستگاهی که در این پایان نامه آمده و به بررسی آن می پردازیم، به خاطر داشتن ماتریس ضرایبی به فرم کلی $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ یعنی داشتن بلوک صفر روی قطر آن امکان استفاده از روش SOR معمولی وجود ندارد, بنابراین روش شبه SOR را پیشنهاد می کنیم. در این پایان نامه سعی شده است که کاربردهای فراوان این دستگاه را در ریاضیات محاسباتی و کاربردی بیان کنیم ، اما به دلیل وسعت زیاد فقط به کاربردهای آن در مسائل کمترین مربعات تعمیم یافته و مسائل کمترین مربعات رتبه ناقص می پردازیم و از کاربردهای دیگر این دستگاه در حل معا دلات نویر– استوکس با روش عناصر متناهی و بهینه سازی مقید، صرفنظر کرده ایم.

البته در کاربردهایی که بیان کرده ایم از روش SOR بلوکی و همچنین روشهای گرادیان مزدوج پیش حالت ساز با A=I و رتبه ناقص بودن B با فرض اینکه B دارای زیر ماتریسی رتبه کامل است، رابه عنوان پیش حالت ساز در مسائل کمترین مربعات رتبه ناقص در نظر گرفته ایم.

در مسائل کمترین مربعات تعمیم یافته از این اندیشه که A متقارن و نیم معین مثبت و B رتبه ناقص است می توان برای تبدیل دستگاه افزوده مورد بررسی به دستگاه متقارن کوچکتر و معین مثبت استفاده کرد.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم را قرار داده ایم و در فصل دوم روش های تکراری استاندارد و بیان ماتریسی آنها را برای حل دستگاه خطی AX=b ، با مثال بیان می کنیم. در فصل سوم نشان می دهیم چگونه در حل مسائل کمترین مربعات رتبه ناقص به روش SOR بلوکی و مسائل کمترین مربعات تعمیم یافته به روش گرادیان مزدوج پیش حالت ساز، دستگاه مورد بررسی ظاهر می شود و الگوریتم این روش ها نیز بیان می شود. در فصل چهارم روش شبه SOR را برای حل دستگاه مورد بررسی بیان می کنیم و ناحیه همگرایی و پارامتر بهینه این روش را مورد بررسی قرار می دهیم و آزمایش عددی را در انتهای فصل مد نظر داریم. در فصل بعدی روش بیان شده را تعمیم می دهیم و در فصل ششم به تحلیل خطای دستگاه و نحوه تراز بندی آن می پردازیم و هدف در این فصل رسیدن به مسئله کمترین مربعات تنک در دستگاه افزوده است.

فصل اول

تعاریف ومفاهیم

۱-۱ تعاریف مورد نیاز

تعریف ۱.۱: یک ماتریس n×m، عبارت است از آرایه ای مستطیلی از عناصر که درn سطر و m ستون مرتب شده باشد که در آن نه تنها مقدار یک عنصر، بلکه محل آن نیز حائز اهمیت است.

تعریف ۱.۲: ماتریس $D_{n\times n}$ را قطری گویند هر گاه همهٔ عناصر غیر قطر اصلی آن صفر باشد.

تعریف ۱.۳: ماتریس $L_{n\times n}$ را پایین مثلثی گویند هر گاه همهٔ عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشند.

یعنی $$a_{ij}=0 \quad (i<j)\ , i=1,2,\dots,n \quad , j=1,2,\dots,n$$

تعریف ۱.۴: ماتریس $U_{n\times n}$ را بالا مثلثی گویند هر گاه همهٔ عناصر پایین قطر اصلی صفر باشند.

یعنی $$a_{ij}=0 \quad (i>j)\ , i=1,2,\dots,n \quad , j=1,2,\dots,n$$

تعریف ۱.۵: یک ماتریس n در(n+۱) را می توان برای نمایش دستگاه خطی زیر بکار برد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

با در نظر گرفتن Aوb به شکل زیر می توان دستگاه بالا را به صورت Ax=b در آورد که در آن

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \quad , \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

با افرودن بردار b به ماتریس A ماتریسی به فرم $[A \mid b]$ تشکیل می شود که به آن ماتریس افزوده گویند.

می توان A را به مجموع سه ماتریس A = D-L-U، تفکیک کرد که در آن

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ و } -L=\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & 0 & \\ a_{n1} & & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \text{ و } -U=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ & & 0 & & \\ & & & \cdot & a_{n,n-1} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

تعریف ۶.۱: معکوس ماتریس $A_{n\times n}$ ماتریسی n×n است که با A^{-1} نمایش داده می شود و در خاصیت $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ صدق می کند.

ماتریسی که دارای معکوس باشد نامنفرد و ماتریس بدون معکوس را منفرد گویند.

تعریف ۷.۱: ترانهاده یک ماتریس $A_{n\times n}$ که با A^T نموده می شود، ماتریسی n×n است که درایه های آن در ویژگی $(A_{ij})^T = A_{ji}$ صدق می کنند. ماتریسی که ترانهاده آن برابر خودش باشد متقارن نامیده می شود.

تعریف ۸.۱: ماتریسی که درایه های صفر آن زیاد باشد، ماتریس تنک* گویند.

تعریف ۹.۱: ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ را معین مثبت گوییم اگر به ازای هر بردار ستونی n بعدی $x \neq 0$ داشته باشیم $x^T Ax > 0$.

اگر در این تعریف نامساوی $>$ تبدیل به $\geq$ شود، ماتریس A را نیمه معین مثبت گوییم.

قضیه ۱.۱: هر گاه A یک ماتریس n×n معین مثبت باشد آنگاه A نامنفرد است.

قضیه ۲.۱: فرض کنیم A وB ماتریسهای حقیقی n×n دلخواه باشند. گوییم B با A متشابه است هر گاه یک ماتریس n×n معکوس پذیر P یافت شود بطوریکه $B=P^{-1}AP$.

تعریف ۱۰.۱: حداقل تعداد سطرها یا ستون های مستقل خطی ماتریس را رتبه آن گویند.

قضیه ۳.۱: فرض کنید A یک ماتریس مربعی n×n باشد. می گوییم A هم ارز سطری ماتریس همانی n×n است یا رتبه کامل است اگر وتنها اگر دستگاه معادلات $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی باشد.

تعریف ۱۱.۱: ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را اکیداً قطر غالب سطری گویند هر گاه:

---

* sparse

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,\ldots, n$$

اگر علامت $>$ به $\geq$ تبدیل شود آنگاه کلمه اکید از تعریف برداشته می شود.

تعریف ۱.۱۲: هرگاه A یک ماتریس n×n حقیقی باشد چندجمله ای تعریف شده با $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ را چندجمله ای مشخصهٔ A می نامند. صفرهای $p(\lambda)$ رامقادیر ویژه A گویند.

هر گاه λ یک مقدارویژه ازA باشد و $x \neq 0$ دارای این خاصیت باشد که $(A - \lambda I)x = 0$ آنگاه x یک بردار ویژهٔ A نظیر مقدار ویژه λ نامیده می شود.

تعریف ۱.۱۳: اگر λ_i , $1 \leq i \leq n$ مقدار ویژه A باشد، آنگاه طیف A برابر است با $\sigma(A) = \{\lambda_i \mid i = 1,2,\ldots,n\}$.

تعریف ۱.۱۴: شعاع طیفی ماتریس $A_{n\times n}$ را که با $\rho(A)$ نشان می دهند به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| .$$

تعریف ۱.۱۵: هر گاه $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ تقریبی از جواب دستگاه خطی Ax=b باشد، بردار مانده نظیر $\overline{x}$ نسبت به این دستگاه با $\overline{r} = b - A\overline{x}$ تعریف می شود.

تعریف ۱.۱۶: یک نرم برداری روی $\mathbb{R}^n$، (مجموعه تمام بردارهای n بعدی با مولفه های حقیقی)، تابعی مانند $\|.\|$ از $\mathbb{R}^n$ بتوی $\mathbb{R}$ که در خواص زیر صدق می کند:

الف) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $\|x\| \geq 0$.

ب) $\|x\| = 0$، اگر و فقط اگر $x = (0,0,\ldots,0)^T$.

پ) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

ت) به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۱.۱۷: دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارها در $\mathbb{R}^n$ را نسبت به نرم $\|.\|$ همگرا به x گویند، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $N(\varepsilon)$ یافت شود بطوریکه به ازای هر $k \geq N(\varepsilon)$ داشته باشیم $\|x^{(k)} - x\| \leq \varepsilon$.

تعریف ۱.۱۸: یک نرم وابسته ماتریسی بر مجموعه تمام ماتریسهای حقیقی n×n ، یک تابع مانند $\|.\|$ است که بر این مجموعه تعریف شده است و در شرایط زیر صدق می کند که در این شرایط AوB ماتریسهای حقیقی n×n هستند و α یک عدد حقیقی است.

الف) $\|A\| \geq 0$.

ب) $\|A\| = 0$ اگر وتنها اگر A صفر باشد.

پ) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

ت) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$.

ث) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$(شرط سازگاری).

تعریف ۱۹.۱: تابع $\|.\|$ را یک نرم وابسته برداری روی $\mathbb{R}^n$ گویند، هرگاه $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

یک نرم ماتریسی که برمجموعه تمام ماتریسهای حقیقی n×n تعریف می شود، نرم طبیعی نامیده می شود.

تعریف ۲۰.۱: عدد حالت k(A) از ماتریس نامنفرد A نسبت به نرم $\|.\|$ برابر است با $\kappa(A) = \|A\| \; \|A^{-1}\|$.

تعریف ۲۱.۱: ماتریس بلوکی A را می توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{bmatrix}$$

که در آن A_{ij} نشان دهندهٔ یک ماتریس است. ماتریس های A_{ip} و A_{iq} در تعداد سطرها یکسان اند و ماتریس های A_{pj} و A_{qj} در تعداد ستون ها با هم یکسان هستند

تعریف ۲۲.۱: ماتریس بلوکی $A \in R^{n\times n}$ را یک ماتریس p-دور مرتب سازگار گوییم، اگر $\sigma\left(D^{-1}\left(\alpha L + \left(\frac{1}{\alpha^{p-1}}\right)U\right)\right)$ مستقل از انتخاب $\alpha \in R \setminus \{0\}$ باشد، که L وU در آن همانند تعریف ۳.۱ و ۴.۱ هستند.

۱-۲ تجزیه LU

اگر بتوان A را مستقیماً به حاصلضرب ماتریسهای پایین مثلثی L و بالا مثلثی U تجزیه کرد یعنی A=LU، آنگاه به تجزیه LU ماتریس A دست یافته ایم، که در این صورت جواب دستگاه AX=b ساده تر به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdot & \cdot & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{bmatrix}$$

لذا قرار می دهیم:

$$(LU)x = b$$

و فرض کنیم حاصلضرب برداری UX برابر Y باشد، پس داریم LY=b وچون L پایین مثلثی است پس بردار Y با

جایگذاری پیشرو براحتی قابل محاسبه است و پس از جایگذاری Y در دستگاه بالا مثلثی $UX=Y$ بردار مجهول X با جایگذاری پسرو بدست می آید.

در اینجا هدف تعیین مقادیر مجهول l_{ij}, u_{ij} است بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \quad , \quad i = 1,2,\ldots, n \;, \quad j = 1,2,\ldots, n \; .$$

چون تعداد مجهولات یعنی l_{ij} و u_{ij} برابر n^2+n و تعداد معلومات یعنی a_{ij} برابر n^2 است لذا n مجهول از مجهولات فوق را می توانیم به دلخواه انتخاب کنیم. یکی از راهها انتخاب مقدار یک برای اعضاء قطری ماتریس L است که به تجزیه دولیتل[1] معروف است. راه دیگر انتخاب مقدار یک برای اعضاء قطری ماتریس U است که به تجزیه کروت[2] معروف است. راه سوم تجزیه چولسکی[3] است که در آن مقادیر قطری UوL با هم برابرند.

۱-۳ تجزیه مقادیر نامنفرد (SVD)

تمام مطالب این بخش از منبع [۸] استخراج شده است.

قضیه ۱.۵: اگر A یک ماتریس m×n دلخواه با فرض $m \ge n$ باشد، آنگاه می توانیم A را به صورت $A = U\Sigma V^T$ بنویسیم که U، m×n است و در شرط $UU^T=I$ صدق می کند و V، n×n است و در شرط $VV^T=I$ صدق می کند که در آن $\sum = daig(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ و $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots. \ge \sigma_n \ge 0$.

ستون های $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ از U بردارهای منفرد چپ، ستون های $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ از Vبردارهای منفرد راست، و σ_i ها مقادیر منفرد خوانده می شوند. (اگر m < n می توان SVD را برای A^T در نظر گرفت.)

برای اثبات به [۸] رجوع کنید.

قضیه ۱.۶: فرض کنید A یک ماتریس m×n باشد که در آن $m \ge n$ و SVD آن به صورت $A = U\Sigma V^T$ با شرایط $\sum = daig(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ و $U = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ و $UU^T=I$ باشد.

I. اگر A متقارن با مقادیرویژه λ_i و بردارهای ویژهٔ متعامد یکهٔ u_i باشد، آنگاه یک SVD از A به صورت $A = U\Sigma V^T$ هست که $\sigma_i = |\lambda_i|$, $v_i = sign(\lambda_i) u_i$ که در آن $sign(0) = 1$.

II. مقادیر ویژهٔ ماتریس متقارن$A^T A$ برابر σ_i^2 است. بردارهای منفرد راست v_i برابر بردارهای ویژهٔ متعامد یکه است.

III. مقادیر ویژهٔ ماتریس متقارن $A A^T$ برابر σ_i^2 و m-n مولفهٔ صفر است. بردارهای منفرد چپ u_i نظیر با بردارهای ویژهٔ متعامد یکه، برای مقادیر ویژهٔ σ_i^2 هستند. می توانیم m-n بردار متعامد یکه باقیمانده را به عنوان بردارهای ویژهٔ برای مقادیر ویژهٔ صفر در نظر بگیریم.

---
[1] Doolittle
[2] Croute
[3] Choleski

IV. فرض کنید $H=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}$ و A ماتریس مربعی که $A = U\Sigma V^T$ تجزیه SVD آن است. اگر $\sum = daig(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ و $U = (u_1,u_2,...u_n)$ و $V = (v_1,v_2,...,v_n)$ ، آنگاه ۲n مقدار ویژهٔ H برابر $\pm\sigma_i$ نظیر با بردارهای ویژهٔ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}v_i\\ u_i\end{bmatrix}$ خواهند بود.

V. اگر A رتبه کامل باشد ، جواب با مینیمم نرم $\|Ax-b\|_2$ به صورت $x = V\Sigma^{-1}U^Tb$ است.

VI. $\|A\|_2 = \sigma_1$. اگر A مربعی و نا منفرد باشد، آنگاه $\|A^{-1}\|_2^{-1} = \sigma_n$ ، $\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

VII. اگر $\sigma_1 \ge ... \ge \sigma_r > \sigma_{r+1} = ... = \sigma_n$ ، آنگاه رتبه A برابر r است. فضای پوچ A عبارت است از زیر فضایی از بردارهای v به قسمیکه $Av = 0$. این زیر فضا، فضای تولید شده بوسیلهٔ ستونهای r+1 تا n ام v است یعنی $span(v_{r+1},...,v_n)$. فضای برد A برای هر ω، زیر فضای تولید شده بوسیلهٔ بردارهای به فرم Aω است و این فضا، فضای تولید شده بوسیلهٔ ستونهای ۱ تا r ام U است، یعنی $span(u_1,...,u_n)$.

VIII. اگر $U = (u_1,u_2,...u_n)$ و $V = (v_1,v_2,...,v_n)$ طـوری باشنـد کـه $A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i u_i v_i^T$ ، آنگاه ماتریس A_k از رتبهٔ $k < n$ را که برابر $A_k = \sum_{i=1}^{k}\sigma_i u_i v_i^T$ است، نزدیک به A (از نظر $\|.\|_2$) گویند. همچنین داریـم $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. لـذا می تـوانیـم بنـویـسیـم $A_k = U\Sigma_k V^T$ که در آن $\Sigma_k = daig(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k,0,...,0)$.

اثبات در [۸].

تعریف ۱.۲۳: فرض کنید A یک ماتریس m×n با فرض m ≥ n و رتبه کامل باشد. اگر A در ویژگی $A = U\Sigma V^T$ صدق کند یا دارای تجزیه SVD باشد، آنگاه $A^+ \equiv \left(A^TA\right)^{-1}A^T = U\Sigma^{-1}V^T$ شبه معکوس از ماتریس A خوانده می شود. اگر m < n آنگاه $A^+ \equiv A^T\left(A^TA\right)^{-1}$.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}0.96 & 1.72\\ 2.28 & 0.96\end{bmatrix}=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}0.6 & -0.8\\ 0.8 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8 & 0.6\\ 0.6 & -0.8\end{bmatrix}$$

فصل دوم

روشهای تکراری استاندارد

۲-۱ تولید روش های تکراری

شکل کلی یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات Ax=b به صورت دنباله ای از نگاشت های

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(A,b)\\
&\Phi_1(x^{(0)}:A,b)\\
&\Phi_2(x^{(0)},x^{(1)}:A,b)\\
&\quad\vdots\\
&\Phi_k(x^{(0)},x^{(1)},\cdots x^{(k-1)}:A,b)
\end{aligned}$$

است که درآن دنبالهٔ $\{x^{(n)}\}$ برای هر $n \geq 1$ به شکل زیرتعریف می شود:

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= \theta_0(A,b)\\
x^{(1)} &= \theta_1(x^{(0)}:A,b)\\
x^{(2)} &= \theta_2(x^{(0)},x^{(1)}:A,b)\\
&\vdots\\
x^{(k)} &= \theta_k(x^{(0)},x^{(1)},\cdots x^{(k-1)}:A,b)
\end{aligned}$$

به ازای $S \geq 0$، مقادیر $x^{(0)}$، $x^{(1)}$،...و $x^{(n)}$ بطور دلخواه انتخاب می گردند و $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_S$ توابع دلخواهی از **A** و **b** می باشند.

اگر به ازای هر $s > 0$ تابع θ_n برای تمامی $n \geq s$ مستقل از **n** باشد آنگاه روش تکراری را ایستا و در غیر اینصورت آن را غیر ایستا می نامند.

در حالت ایستا قرارمی دهیم $\cdots = \theta = \theta_S = \theta_{S+1}$ و درنتیجه $x^{(n+1)}$ فقط به آخرین S بردار $x^{(n)}$، $x^{(n-1)}$،... و $x^{(n-S+1)}$، وابسته است.

در حالت S=1 داریم: (روش تکراری ایستای درجه یک)

$$x^{(0)} = \theta(A,b)$$
$$x^{(1)} = \theta(x^{(0)} : A,b)$$
$$x^{(2)} = \theta(x^{(1)} : A,b) \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$
$$\vdots$$
$$x^{(n+1)} = \theta(x^{(n)} : A,b)$$

درحالت S=۲ داریم:(روش تکراری ایستای درجه دو)

$$x^{(0)} = \theta_0(A,b)$$
$$x^{(1)} = \theta_1(x^{(0)} : A,b)$$
$$x^{(2)} = \theta\ (x^{(0)},x^{(1)} : A,b) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$
$$\vdots$$
$$x^{(n+1)} = \theta\ (x^{(n-1)},x^{(n)} : A,b)$$

اگر برای هر n تابع θ_n یک تابع خطی از $x^{(0)}$، $x^{(1)}$،... و $x^{(n)}$ باشد آنگاه روش خطی است، در غیر اینصورت روش را غیر خطی گویند.

سه روش تکراری که برای حل دستگاه خطی Ax=b شرح داده می شود با تقریب اولیه $x^{(0)}$ شروع می شوند. در این روش ها ابتدا دستگاه Ax=b به صورت

$$x = Mx + c \tag{۱.۲}$$

باز نویسی می شود ودنباله بردارها، از رابطهٔ تکراری

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c \tag{۲.۲}$$

به ازای $k = 1,2,\ldots$ تولید می شود، و اگر این دنباله همگرا باشد، حد آن جواب یکتای دستگاه Ax=b خواهد بود.

تقریب اول را با $x^{(1)}$ و مولفهٔ i ام آنرا با $x_i^{(1)}$ و تقریب دوم را با $x^{(2)}$ و مولفهٔ i ام آنرا با $x_i^{(2)}$ و به همین ترتیب تقریب n ام را با $x^{(n)}$ و مولفه i ام آنرا با $x_i^{(n)}$ نمایش می دهیم.

۲-۲ همگرایی روش های تکراری

قضیه ۱.۲: دنبالهٔ $\{x^{(k)}\}$ که به ازای هر $k \geq 1$ با $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$ تولید می شود و در آن $c \neq 0$، به ازای هر $x^{(0)} \in R^n$ به بردار x همگراست اگر و فقط اگر $\rho(M)<1$.

اثبات: اگر خطای $e^{(n)}$ در n امین تقریب نسبت به جواب واقعی به صورت $e^{(n)} = x - x^{(n)}$ باشد از روابط (۱.۲) و (۲.۲) خواهیم داشت:

$$e^{(n+1)} = Me^{(n)}$$