بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

روش عناصر مرزی گالرکین بر پایه درونیابی موجک‌های مثلثاتی هرمیتی

نگارش :

یونس اسماعیل زاده اقدم

استاد راهنما: دکتر حمید صفدری

استاد مشاور: دکتر رضا ملاپور اصل

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مهر ۱۳۹۲

باسمه تعالی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب **یونس اسماعیل زاده اقدم** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات، ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف(در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

نام و نام خانوادگی : **یونس اسماعیل زاده اقدم**
امضاء

تهران-لویزان-کدپستی۱۶۷۸۸-صندوق پستی۱۶۳-۱۶۷۸۵تلفن۹-۲۲۹۷۰۰۶۰نمابر۲۲۹۷۰۰۰۳پست الکترونیکی sru@sru.ac.ir

شماره: ۳۶۲/۱۴
تاریخ: ۹۲/۷/۱۴
پیوست: ندارد

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای یونس اسماعیل زاده اقدم رشته ریاضی کاربردی تحت عنوان «روش عناصر مرزی گالرکین بر پایه درونیابی موجک های مثلثاتی هرمیتی» در تاریخ ۱۳۹۲/۰۷/۱۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

☒ قبول (با درجه بسیار خوب امتیاز ۱۸/۷۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱. عالی (۲۰-۱۹)
۲. بسیار خوب (۱۸،۹۹-۱۸)
۳. خوب (۱۷،۹۹-۱۶)
۴. قابل قبول (۱۵،۹۹-۱۴)
۵. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر حمید صفدری	استادیار	
استاد مشاور	دکتر رضا ملاپور	استادیار	
داور داخلی	دکتر حمید مسگرانی	دانشیار	
داور خارجی	دکتر مجید کرمی	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر حمید مسگرانی	دانشیار	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران، لویزان، کد پستی: ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به

مادر عزیز و مهربانم ؛

شمع پرفروغی که اشک و دعای سحرگاهی خویش را پشتوانه توفیق فرزندان خود قرار داد.

پدر بزرگوار و گرانقدرم؛

که پیوسته ارتقاء اخلاقی و فرهنگی فرزندان خویش را آرزو می کند.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

تقدیر و تشکر

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت.

با تقدیم به تو که به سطح تفکرم عمق بخشیدی و به احتیاج آموختنم ثانیه هایت را. برای تو که باید تمام ثانیه‌هایم را سجده شکر بگذارم. تقدیم به تو که دیگر توصیف و استعاره نمی‌خواهی، به خدایت که به عشق وبی شک موهبت آفریدیم. به تمام لحظه‌هایی که بودی؛ نزدیکم، بسیار نزدیک، آنقدر که تشبیه رگ گردن برای آن همه نزدیکیت ناچیز است.

دستبوسی دستانی‌ام که پینه بسته رسیدنم هستند. پدر و مادر مهربانم؛ که دل به دلم دادید و دست به بازوان ناتوانم و حالا از آنچه ارزانیم داشتید همین می‌ماند، شرمساری و تشکری نه در خور بی حدی مهربانیت.

تقدیم به استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر حمید صفدری که به سراب آگاهی‌ام آب داد. تقدیم با تقدیر از فروتنی استادانه‌اتان که هر فصل این نوشته‌ها حاکی از شوقی است که شما در من نهادید. و تقدیری دگر از آقای دکتر رضا ملاپوراصل استاد مشاورم که مرا در زیر و بم رسیدن یاری نمودند.

از آقای دکتر حمید مسگرانی که با توصیه بجا و مهربانشان در به سر انجام رسیدن این نوشته یار و راهنمای بنده بودند خاضعانه تقدیر می‌نمایم و همچنین از اساتید ممتحن که قضاوت خویش را همراه این پایان نامه کردند بیش از همه سپاسگذارم. برای هر رسیدنی مسیری است و پیمودن هر مسیری را هزار دریچه ناامیدی و صدها بن بست که جز با همدلی و همدردی دوستانی همراه، امکان پیمودن به آسانی میسر نیست که در پایان از کلیه‌ی اعضای هیئت علمی دانشگاه شهید رجایی تهران که از محضرشان در طی دوره تحصیلاتم کسب فیض نمودم و همچنین دوستان مهربانم ورودی سال ۹۰، آنقدر که برای تمامیتان آرزوی موفقیت می‌نمایم، بی نهایت متشکرم. همواره ازخداوند متعال سلامتی و توفیق روز افزون تمامی این عزیزان را خواهانم...

یونس اسماعیل زاده اقدم
مهر ۱۳۹۲

چکیده:

در این پایان نامه روش اجزا مرزی گالرکین بر پایه‌ی درونیابی موجک هرمیتی مثلثاتی برای حل مسایل پتانسیل دو بعدی ارایه شده است. مقالات زیادی در مورد روش‌هایی مانند روش اجزاء محدود[۱]، روش گالرکین آزاد[۲] و روش گره مرزی گالرکین[۳] وجود دارد. اما روش‌های فوق به دلیل پیچیدگی فرمول‌ها و محاسبه درایه‌های ماتریس، سخت و زمانبر است. در این پایان‌نامه سعی شده ابتدا معادله‌ی پتانسیل دوبعدی را به کمک روش عناصر مرزی گالرکین[۴] حل کنیم سپس به کمک پایه‌های موجک هرمیتی مثلثاتی تابع بدست آمده را تقریب بزنیم و عملگر ماتریسی برای تقریب آن بدست آوریم.

استفاده از موجک‌ها به عنوان پایه‌ی متعامد از آن جهت حائز اهمیت است که سبب می‌شود دستگاه حاصل از گسسته‌سازی معادلات پتانسیل دستگاهی با ماتریس ضرایب تنک تشکیل شود که سهم عمده‌ای در تسریع و کاهش هزینه‌ی محاسبات حل عددی معادلات خواهد داشت. دقت جواب، میزان خطا دستگاه حاصل از گسسته‌سازی این معادلات به‌وسیله‌ی موجک هرمیتی مثلثاتی گزارش شده است که نتایج حاصل، کارایی روش را به اثبات می‌رساند.

واژه‌های کلیدی: مسائل پتانسیل، معادلات انتگرال مرزی، موجک هرمیتی مثلثاتی، روش عناصر مرزی گالرکین، تحلیل خطا.

[۱] FEM(Finite Element Methode)
[۲] EFGM(Element Free Galerkin Method)
[۳] GBNM(Galerkin Boundary Node Methode)
[۴] GBEM(Galerkin Boundary Element Method)

پیش گفتار

ایده‌ی اصلی نمایش یک تابع بر حسب خانواده‌ای از توابع به عنوان توابع پایه‌ای، نخستین بار توسط ژوزف فوریه [۵] در سال ۱۸۰۷ ارائه شد که این ایده منجر به شکل‌گیری یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات به عنوان آنالیز فوریه شد. اما روش‌های مبتنی بر آنالیز فوریه خالی از ایراد نبود و در بعضی موارد از کارایی مناسبی برخوردار نبودند. از جمله‌ی این موارد زمانی بود که تابع مورد نظر شامل نقاط پرش، یا تیزی و سایر ناهمواری‌ها می‌شد. لذا همواره نیاز به جایگزین کردن ابزار مناسب تر احساس می‌شد. محققین بسیاری در این راستا تلاش کردند که حاصل تلاش آنها در طول سالیان، پیدایش نظریه‌ی موجک‌ها بود.

تابع هار ساده‌ترین نمونه از موجک‌ها بود که نخستین بار توسط آلفرد هار [۶] در سال ۱۹۱۰ معرفی شد. بعدها پل لوی [۷] شیمیدان و فیزیکدان برجسته‌ی فرانسوی، از پایه‌ی هار برای مطالعه‌ی حرکت براونی استفاده نمود و مشاهده کرد که استفاده از این توابع به علت چندمقیاسی بودن آن منجر به نتایج بهتری نسبت به پایه‌ی فوریه می‌شود. مشاهده‌ی وی منجر به قوت گرفتن ایده نمایش یک تابع بر حسب توابع پایه‌ی چند مقیاسی گردید. گلدرون [۸]، کویفمن [۹]، و... از جمله محققانی بودند که در سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۷۵ برای شناساندن نظریه‌ی موجک‌ها تلاش بسیاری نمودند. اما بیشترین سهم مربوط به مورلت [۱۰]و گراسمن [۱۱] است که در سال ۱۹۷۵ الی ۱۹۸۵ پایه‌های نظریه‌ی موجک‌ها را بنا نهادند و نخستین بار از واژه‌ی $Wavelet$ (موجک) استفاده کردند. ژان مورلت ژئوفیزیک‌دان فرانسوی بود که در جریان اکتشافات زیر زمینی به ناکارآمدی پایه‌های فوریه پی برد و به عنوان جایگزین از تبدیل موجک برای پردازش سیگنال استفاده کرد. چند سال بعد گراسمن به کمک وی مفهوم موجک را در فیزیک کوانتوم بیان کرد. در این سال‌ها میر [۱۲]، فرانسوی دیگری بود که تحقیقات گسترده‌ای در زمینه‌ی پایه‌های موجکی متعامد انجام می‌داد. در نتیجه این همکاری وی

[۵] Joseph Fourier
[۶] Alferd Haar
[۷] Paul Levy
[۸] Galderon
[۹] Coifman
[۱۰] Jan Morlet
[۱۱] Alex Grossman
[۱۲] Meyer

با مالات [۱۳] آنالیز تجزیه‌ی چندگانه معرفی شد که چهار چوب مناسبی برای مطالعه و ساخت موجک ارائه می‌کرد. این تعریف گام مهمی در مطالعات موجک بشمار می‌آمد.

خانم اینگیرید دابیشیز[۱۴] نیز از جمله افرادی بود که در سال‌های بعد نقش عمده‌ای در تکمیل نظریه‌ی موجک ایفا کرد. وی ساختار آنالیز تجزیه‌ی چندگانه را برای ساخت خانواده‌ای از موجک‌ها موسوم به موجک دابیشیز به کار برد. این موجک‌ها دارای خواص مطلوبی همچون محمل فشرده، تعامد و مشتقات پیوسته هستند و می‌توان از این خانواده موجک‌هایی با تعداد ممان‌های صفر دلخواه ساخت.

با تکمیل نظریه‌ی اساسی موجک در سال‌های اخیر، راه برای تعمیم دادن مفاهیم آن باز شد و موجک‌های دو- متعامد و موجک‌های چندگانه به‌منظور برطرف کردن نقاط ضعف و کمبودهای موجک‌های کلاسیک معرفی شدند. در این میان بردلی کی آلپرت [15] نقش عمده‌ای در معرفی موجک‌های قطعه‌ای چندجمله‌ای و کاربرد آنها در آنالیز عددی ایفا کرد. وی به جای استفاده از یک تابع مقیاس و یک تابع موجک از r تابع مقیاس و r موجک، موسوم به توابع مقیاس چندگانه استفاده کرد. علاوه بر این در سال ۱۹۹۳ شکل عددی و گسسته‌ای از موجک‌هایی موسوم به شبه موجک [۱۶] ارائه کرد. اما استفاده از موجک‌ها در آنالیز عددی سابقه‌ای در حد دو دهه‌ی اخیر دارد. موجک‌ها نظیر چندجمله‌ای‌های متعامد و فوریه برای فضای $L_۲(\mathbb{R})$ یک پایه محسوب می‌شوند. لذا از این دیدگاه می‌توان موجک‌ها را به‌عنوان توابع پایه‌ای و وزنی در روش‌های عددی مانند روش‌های طیفی و روش عناصر متناهی مورد استفاده قرار داد. از طرفی به تنوع سیستم‌های موجکی در نوع و خواص می‌توان یک پایه‌ی مناسب را طوری انتخاب نمود که برای یک مسئله‌ی خاص منجر به سادگی مراحل وبالا رفتن مرتبه‌ی همگرایی شود. گلاوینسکی [۱۷]و همکارانش از اولین افرادی بودند که از موجک‌ها در روش عناصر متناهی بهره جستند. در سال ۱۹۹۱ آلپرت موجک‌ها را به منظور ایجاد الگوریتم‌های سریع برای حل مسائل عددی بکار برد. وی الگوریتمی با پیچیدگی $o(nlogn)$ برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ارائه نمود که n پارامتر گسسته‌سازی روش است. استفاده از ماتریس تنک

[۱۳] Jean Mallat
[۱۴] Ingrid Daubechies
[۱۵] Bradly K.Alpert
[۱۶] Wavelet Like
[۱۷] Glawiniski

منجر به دستگاه‌های تنک می‌شود که هزینه‌ی حل و نگهداری آن در مقایسه با دستگاه‌های غیر تنک بسیار کمتر است.

در سال ۱۹۹۳ شبه موجک‌ها به واسطه‌ی ساختار گسسته‌ی خود در روش گسسته‌سازی نیشتروم و تفاضلات متناهی برای معادلات انتگرال استفاده شد. در ابتدا به نظر می‌رسد که بین مبحث موجک‌ها و روش تفاضلات متناهی فاصله‌ی زیادی وجود دارد ولی جیمسن [۱۸] در سال ۱۹۹۴ جنبه‌ی جدیدی از کاربرد موجک‌ها را بیان کرد. او از موجک برای تعیین جاههایی که لازم است شبکه‌بندی [۱۹]ریز شود استفاده کرد. همچنین استفاده از موجک‌ها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به خصوص در موارد غیر خطی که دارای جواب با تغییرات موضعی هستند منجر به نتایج مطلوبی گردیده است.

عمدتاً دو رویکرد مهم در استفاده از موجک‌ها در حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال موجود است. یکی از این رویکردها مبتنی بر استفاده از بسط تابع مقیاس و دیگری استفاده از بسط تابع موجک است. در این پایان نامه سعی بر آن شده است که از هر دو رویکرد هم تابع مقیاس هرمیتی و هم موجک هرمیتی مثلثاتی برای حل عددی معادله پتانسیل دو بعدی درون و بیرون دایره‌ی واحد مورد استفاده قرار گیرد.

در فصل اول، تعریف و مفاهیم اساسی نظریه‌ی موجک‌های اسکالر از دیدگاه عددی مورد بررسی قرار گرفته اند. در فصل دوم موجک هرمیتی مثلثاتی به طور کامل معرفی شده است. در فصل سوم به معرفی معادلات پتانسیل دو بعدی و حل آن به کمک روش اجزاء مرزی گالرکین پرداخته شده است. و در نهایت در فصل چهارم با استفاده از موجک هرمیتی مثلثاتی معادله پتانسیل دو بعدی را تقریب زده و آنرا به روش عددی بیان می‌کنیم که این روش در مقاله‌ی $JianZhu, MaojunLi$ در سال ۲۰۱۲ چاپ شده است و در فصل پایانی نتایج عددی حاصل از روش همراه با حل چند مثال ارایه شده است.

[۱۸] L.Jameson
[۱۹] Grid

فهرست مطالب

فهرست مطالب ه

لیست جداول ز

لیست تصاویر ح

۱ معرفی موجک‌ها ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ تعاریف اولیه ۳

۳.۱ تابع تظریف‌پذیر ۴

۴.۱ الگوریتم آبشاری ۶

۵.۱ آنالیز تجزیه‌ی چندگانه ۸

۶.۱ موجک ۱۱

۷.۱ خواص مطلوب موجک‌ها ۱۶

۸.۱ بسط توابع بر حسب موجک‌ها ۱۷

۹.۱ الگوریتم تجزیه و بازسازی ۲۱

۱۰.۱ معرفی چند موجک خاص ۲۳

۱.۱۰.۱ سیستم موجک هار ۲۴

۲.۱۰.۱ موجک‌های دابیشز و کویفلت ۳۰

۲ موجک هرمیتی مثلثاتی **۳۶**

۱.۲ مقدمه ۳۷
۲.۲ تابع مقیاس ۳۷
۳.۲ عملگر ماتریسی مشتق تابع مقیاس هرمیتی برای تقریب یک تابع ۴۴
۴.۲ موجک هرمیتی ۴۷
۵.۲ خطای درونیابی هرمیتی ۴۹

۳ روش عناصر مرزی گالرکین برای حل معادله پتانسیل دو بعدی ۵۱
۱.۳ معادله پتانسیل ۵۲
۲.۳ ساختمان تابع گرین ۵۴
۱.۲.۳ تابع گرین برای معادلات دیفرانسیل معمولی ۵۵
۲.۲.۳ تابع گرین برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۵۷
۳.۳ حل مسأله دیریکله به کمک معادله انتگرال فردهلم ۶۲
۱.۳.۳ معادله انتگرال فردهلم نوع اول برای حل مسألهی دیریکله ۶۲

٤ عناصر مرزی گالرکین موجک هرمیتی ٦٤
۱.۴ روش عناصر مرزی گالرکین موجک هرمیتی مثلثاتی ۶۵
۲.۴ تخمین خطا ۶۹

۵ تحلیلهای عددی و نتایج ۷۲
۱.۵ حل مثالهای عددی ۷۳
۲.۵ نتیجهگیری ۸۲

واژهنامه فارسی به انگلیسی ۸۳

کتابنامه ۸۸

لیست جداول

۱.۵ ماکسیمم خطای مطلق در سطح $J = ۱$ تا $J = ۵$ ، برای مثال ۱ . . . . . . ۷۵
۲.۵ ماکسیمم خطای مطلق در همسایگی مرز برای مثال ۱ . . . . ۷۵
۳.۵ ماکسیمم خطای مطلق در سطح $J = ۱$ تا $J = ۵$ ، برای مثال ۲ . . . . . . ۷۷
۴.۵ ماکسیمم خطای مطلق در همسایگی مرز برای مثال ۲ . . . . ۷۷
۵.۵ ماکسیمم خطای مطلق در سطح $J = ۱$ تا $J = ۵$ ، برای مثال ۳ . . . . . . ۷۹
۶.۵ ماکسیمم خطای مطلق در همسایگی مرز برای مثال ۳ . . . . ۷۹
۷.۵ ماکسیمم خطای مطلق در سطح $J = ۱$ تا $J = ۵$ ، برای مثال ۴ . . . . . . ۸۱
۸.۵ ماکسیمم خطای مطلق در همسایگی مرز برای مثال ۴ . . . . ۸۱

لیست تصاویر

۱.۱ $h(x) = h(\text{۲}x) + h(\text{۲}x - \text{۱})$ ۵

۲.۱ $\varphi(x) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\varphi(\text{۲}x) + \varphi(\text{۲}x-\text{۱}) + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\varphi(\text{۲}x - \text{۲})$ ۶

۳.۱ توصیف ساختاری زیرفضاهای W_j و V_j ۱۲

۴.۱ نمودار معادله تظریف موجک هار ۱۴

۵.۱ نمودار معادله تظریف موجک کلاه ۱۵

۶.۱ $f(x) = sin(x)$ و تقریبهای $P_{\text{۰}}f$ و $P_{\text{۱}}f$ و $P_{\text{۲}}f$ به وسیله موجک هار ۱۹

۷.۱ $P_{\text{۰}}f + Q_{\text{۰}}f + Q_{\text{۱}}f = P_{\text{۲}}f$ ۲۱

۸.۱ شمای الگوریتم تجزیه ۲۳

۹.۱ شمای الگوریتم بازسازی ۲۴

۱۰.۱ $f(x) = e^{x^{\text{۲}}}$ وتقریب آن به ازای $k = \text{۴}$ ۳۰

۱۱.۱ $f(x) = e^{x^{\text{۲}}}$ وتقریب آن به ازای $k = \text{۱۶}$ ۳۰

۱۲.۱ موجک وتابع مقیاس $D_{\text{۶}}$ ۳۵

۱۳.۱ موجک وتابع مقیاس کویفلت برای $N = \text{۶}$ ۳۵

۱.۵ تابع u و مشتق آن در نقطه‌ی $x_{\text{۲}} = \text{۰}$ ۷۴

۲.۵ رابطه بین خطای مطلق و مدت زمان CPU برای مثال ۱ . . . . ۷۴

۳.۵ تابع u و مشتق آن در نقطه‌ی $x_{\text{۲}} = \text{۰}$ ۷۶

۴.۵ رابطه بین خطای مطلق و مدت زمان CPU برای مثال ۲ . . . . ۷۶

۵.۵ تابع u و مشتق آن در نقطه‌ی $x_{\text{۱}} = \text{۲}$ ۷۸

۶.۵ رابطه بین خطای مطلق و مدت زمان CPU برای مثال ۳ . . . . ۷۸

۷.۵ تابع u و مشتق آن در نقطه‌ی $x_۱ = ۲$ ۸۰
۸.۵ رابطه بین خطای مطلق و مدت زمان CPU برای مثال ۴ . . . . ۸۰

فصل ۱

معرفی موجک‌ها

۱.۱ مقدمه

از جدیدترین تحول در ریاضیات کاربردی، استفاده از نظریه موجک‌هاست. امروزه نظریه جدید موجک‌ها و مدول‌های موجکی تقریب، جایگزین نظریه‌های کلاسیک از جمله روش کلاسیک نظریه فوریه برای حل مسائل مختلف کاربردی در زلزله‌شناسی، پردازش سیگنال‌ها در سیستم‌ها، مخابرات، پردازش تصویر و بینایی کامپیوتر، ذرات بنیادی و کوانتوم مکانیک، نظریه تقریب و مکان‌یابی، جرم‌شناسی، ژنتیک و پزشکی، مهندسی و فیزیک شده است و مراکز صنعتی و آزمایشگاهی تحقیقاتی سعی در بکارگیری روش‌های مؤثر تقریب موجکی برای بالا بردن کیفیت محصولات و دقت آزمایش‌های خود را دارند. این نظریه جدید ریاضیات کاربردی مؤثرترین پل ارتباط علم ریاضیات نظری به عملی است که بکارگیری نتایج این علم در مراکز صنعتی و دانشگاهی و آزمایشگاه‌های تکنولوژی پیشرفته از جمله نانوتکنولوژی برای سرعت بخشیدن به پیشرفت سریع صنعتی کشور و حل مشکلات بخش‌های مختلف کشور مثلاً مخابرات و زلزله‌شناسی و همچنین تربیت پژوهشگران ارشد مورد نیاز، شدیداً احساس می‌شود.

موجک، تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط برحسب انتقال‌ها و اتساع‌های این تابع انجام می‌گیرد، بر خلاف چندجمله‌ای‌های مثلثاتی، موجک‌ها در فضا به‌صورت موضعی بررسی می‌شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیکتری بین بعضی توابع و ضرایب آنها امکان‌پذیر می‌شود و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می‌گردد. هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می‌توان با استفاده از موجک‌ها فرمول‌بندی کرد و اطلاعات فضایی (یا زمانی) موضعی بیشتری بدست آورد. بطور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم‌های عددی سریع برای محاسبه‌ی عملگرهای انتگرالی اثر می‌گذارد.

ما در این بخش ابتدا به معرفی توابع تظریف‌پذیر وساختار آنالیز آن می‌پردازیم و از این رهگذر وارد عرصه‌ی مفاهیم موجک می‌شویم. لازم به ذکر است، در این مبحث تنها به ذکر مطالب اساسی

از نظریه موجک‌ها اکتفا شده است و از پرداختن به موضوعات غیر ضروری و نامرتبط با کاربرد مورد نظر، پرهیز شده است. تمامی این مطالب در منابع [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۲۱] آمده شده است.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی همه‌ی توابع f که برای آنها $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dt$ موجود و متناهی است، یک فضای برداری تشکیل می‌دهد که آن را با $L^p(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. در این میان $L^2(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{1.1}$$

یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۲.۲.۱. محمل [۱] یک تابع عبارت است از بستار مجموعه نقاطی از دامنه‌ی تابع که مقدار تابع در آن نقاط، غیر صفر باشد. به عبارت دیگر، اگر محمل تابع f با $supp(f)$ نشان داده شود، آنگاه:

$$supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \tag{2.1}$$

تعریف ۳.۲.۱. اگر a و b اعداد حقیق باشند و $b > 0$، عملگرهای انتقال [۲] و اتساع [۳] را روی $L^2(\mathbb{R})$ به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \qquad (T_a f)(x) = f(x-a) \tag{3.1}$$

$$D_b : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \qquad (D_b f)(x) = \sqrt{b} f(bx) \tag{4.1}$$

از این پس برای هر تابع f روی $\mathbb{R}$، $f_{m,n}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f_{m,n}(x) = T_n D_m f(x) = \sqrt{2^m} f(2^m x - n) \quad x \in \mathbb{R} \;\; \text{و} \;\; m, n \in \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

در اینجا ذکر این نکته لازم است که مثلاً برای $m = 1$ داریم $f_{1,n} = \sqrt{2} f(2x - n)$ و این یعنی $f_{1,n} = T_n(D_1(f(x)))$ که این با $D_1(T_n(f(x))) = \sqrt{2} f(2x - 2n)$، کاملاً متفاوت است.

[۱] Support
[۲] Translation
[۳] Dilotion

تعریف ۴.۲.۱. یک زیرمجموعه‌ی شمارش‌پذیر f_k از فضای هیلبرت، یک پایه‌ی ریس [۴] نامیده می‌شود؛ هرگاه هر عضو دلخواه f، در این فضا را بتوان به‌صورت ترکیب خطی منحصر بفردی از اعضای f_k نوشت، یعنی:

$$f = \sum_k c_k f_k \tag{۶.۱}$$

و اعداد ثابت و مثبت Aو B وجود داشته باشند طوری‌که

$$A \parallel f \parallel^{۲} \leq \sum_k | c_k |^{۲} \leq B \parallel f \parallel^{۲} \tag{۷.۱}$$

در صورتی که f_k یک پایه‌ی متعامد [۵] برای فضای هیلبرت مورد نظر باشد آنگاه $A = B = ۱$.

تعریف ۵.۲.۱. اگر $f \in L^{۲}(\mathbb{R})$ آنگاه تبدیل فوریه‌ی پیوسته f رابه‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \tag{۸.۱}$$

همچنین تبدیل فوریه‌ی معکوس $\hat{f}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{iwx} dw \tag{۹.۱}$$

و تبدیل فوریه‌ی گسسته برای دنباله ی$h(n)$ به‌صورت زیر است:

$$H(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-iwn} \tag{۱۰.۱}$$

۳.۱ تابع تظریف‌پذیر

تعریف ۱.۳.۱. تابع $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ که در معادله‌ی تظریف دو مقیاسی

$$\varphi(x) = \sqrt{۲} \sum_k h_k \varphi(۲x - k) \tag{۱۱.۱}$$

با ضرایب $h_k \in \mathbb{C}$ صدق کند، تابع تظریف‌پذیر [۶] می‌گوییم. تابع تظریف‌پذیر φ را متعامد یکه [۷]گوییم اگر

$$< \varphi(x), \varphi(x-k) >= \delta_{۰ k} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{۱۲.۱}$$

[۴] Ries Base
[۵] Orthogonal Base
[۶] Refinable Function
[۷] Orthonormal