بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

گرایش جبر

عنوان :

مدولهای تصویری روی حلقه چند جمله ایها

استاد راهنما :

دکتر مسعود طوسی

پژوهشگر :

حسین عتیق پور

خرداد ۱۳۸۷

۱۳۸۷/۱۰/۱۳

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد حسین عتیق پور
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

مدولهای تصویری روی حلقه چندجمله ایها

On projective modules over polynomial rings

به ارزش۴ واحد در روز شنبه مورخ۸۷/۳/۲۲ ساعت ۱۲-۱۰ در محل آمفی تئاتر (۱) و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره .....۱۷.....درجه.....بسیار خوب..... ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
۱.	استاد راهنما	دکتر مسعود طوسی	دانشیار- ریاضی- دانشکده علوم شهید بهشتی تهران	طوسی
۲.	استاد مدعو	دکتر عبدالرحمان ساجدی	استادیار- ریاضی- دانشکده علوم-رازی کرمانشاه	
۳.	داور داخلی	دکتر کریم سامعی	دانشیار- ریاضی- دانشکده علوم- بوعلی سینا همدان	
۴.				
۵.				
۶.				
۷.				

نام خانوادگی : **عتیق پور**	نام : **حسین**

عنوان پایان نامه : **مدولهای تصویری روی حلقه چندجمله ایها.**

استاد راهنما : دکتر مسعود طوسی

مقطع تحصیلی : **کارشناسی ارشد**	رشته : **ریاضی**	گرایش : **جبر**	دانشگاه : **بوعلی سینا**
دانشکده : **علوم پایه**	تاریخ دفاعیه : ۱۳۸۷/۳/۲۲		تعداد صفحات : ۹۸

واژه‌های کلیدی : مدول تصویری، رتبه مدولهای تصویری، حاصلضرب تاری، مدولهای توسیع یافته، مدولهای به طور پایدار آزاد.

چکیده :

فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی یکدار باشد و هر مدول تصویری، جمعوند یک مدول آزاد باشد. همچنین فرض کنیم هر مدول تصویری، متناهی‌مولد باشد که در نتیجه به روشنی دیده می‌شود جمعوند مستقیم یک مدول متناهی مولد است. یک سوال طبیعی در اینجا مطرح می‌شود که آیا همهٔ چنین مدولهایی، آزاد هستند؟ در حالت کلی پاسخ، منفی است اما برای انواع خاصی از حلقه‌ها مانند میدانها و حلقهٔ ایده‌آل اصلی، پاسخ مثبت است. بنابراین سوال مناسبتری به این صورت مطرح می‌شود که کدام حلقه‌های R دارای این خاصیت که همهٔ R ـ مدولهای تصویری متناهی‌مولد، آزاد هستند، می‌باشد؟

مشهورترین مساله در این زمینه، توسط سر مطرح شده است:

مسالهٔ سر. فرض کنیم $R = K[x_1, x_2, ..., x_n]$ یک حلقهٔ چندجمله‌ای روی میدان K باشد. آیا هر R ـ مدول تصویری متناهی‌مولد، آزاد است؟

برای $n = 0$ و $n = 1$ جواب به روشنی مثبت است. اما برای nهای بزرگتر، پاسخ بسیار مشکل است و حدود ۲۳ سال طول کشید تا مساله توسط کوئیلن و سوزلین حل شد. در این پایان‌نامه، ما این اثبات را مطالعه می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۳. مدولهای تصویری روی حلقه چندجمله‌ایها

مقدمه

ژان پیر سر[۱] ریاضیدانان بزرگ فرانسوی و دارندهٔ مدال فیلتز[۲] ریاضیات، در سال ۱۹۵۵ میلادی ادعای خود را بدین صورت مطرح کرد که:

«هر مدول تصویری متناهی‌مولد روی حلقه چندجمله‌ایها بصورت $K[X_1,\ldots,X_n]$ که K میدان می‌باشد، آزاد است».

بعدها این مسأله بین ریاضیدانان به عنوان حدس سر[۳] معروف شد. بعد از طرح این مسأله ریاضیدانان متعددی روی این موضوع به تحقیق و مطالعه پرداختند که اثرات بسیار مثبتی در پیشبرد شاخه‌های مختلف ریاضی بخصوص هندسه جبری داشت.

در اواخر دهه هفتاد میلادی تقریباً در یک مقطع زمانی اثباتهای گوناگونی برای این مسأله بدست آمد که معروفترین آنها اثبات دو ریاضیدان آلمانی و روسی بنامهای کوئیلن[۴] و سوزلین[۵] می‌باشد.

در این پایان‌نامه سعی شده است جزئیات اثبات این مسأله که توسط کوئیلن و سوزلین بدست آمده است بیان شود.

برای این منظور به اطلاعات جامعی در مورد موضعی سازی و مدولهای تصویری و حاصلضرب تاری نیاز داریم که سعی شده در این پایان‌نامه به آنها پرداخته شود. همچنین تکنیکهای اثبات در مورد مدولهای روی حلقه چندجمله‌ای نیز به آن توجه شده است.

این پایان‌نامه در ۳ فصل و ۱۱ بخش تنظیم شده است.

در فصل اول با عنوان پیش نیاز به معرفی ابزارهای کارمان می‌پردازیم که در شش بخش آورده شده

[۱] J.P.serre
[۲] Filtz
[۳] Serre's Conjecture
[۴] Quillen
[۵] Soslin

است.

با توجه به اهمیتی که موضعی سازی در روند کارمان دارد در بخش اول به بیان قضایایی در این مورد می‌پردازیم.

در بخش دوم به معرفی مدولهای یکدست و مدولهای متناهی نمایش می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم اگر M $R-$ مدول متناهی نمایش و $i : R \to A$ همریختی یکدست باشد در اینصورت داریم:

$$Hom_R(M,N) \otimes_R A \simeq Hom(M \otimes_R A, N \otimes_R A).$$

و از آنجا که $S^{-1}R$ و $R[X]$ یکدست می‌باشند از این یکریختی نتایج جالبی حاصل می‌شود.

در بخش سوم به تعریف مدولهای تصویری پرداخته و به اثبات چند قضیه مقدماتی از آن اکتفا کرده‌ایم.

در بخش چهارم اثبات می‌کنیم مدولهای تصویری متناهی مولد روی حلقه موضعی آزاد می‌باشد و از آن نتیجه می‌گیریم که: P یک $R-$ مدول تصویری متناهی مولد است اگر و تنها اگر P_Q به ازای هر $Q \in Spec(R)$ آزاد باشد.

در بخش پنجم با معرفی مدول آزاد از تاب ثابت می‌کنیم که مدولهای آزاد از تاب متناهی مولد روی دامنه ایده آل اصلی آزاد می‌باشد و از آن نتیجه می‌گیریم مدولهای تصویری متناهی مولد روی دامنه ایده‌آل اصلی آزاد می‌باشد.

در بخش ششم به معرفی رتبه مدولهای تصویری پرداخته و شرایطی که بر طبق آن یک مدول تصویری دارای رتبه ثابت می‌باشد را بررسی می‌کنیم.

در فصل دوم که آن را حاصلضرب تاری و ساختن مدولهای تصویری نام نهاده‌ایم به معرفی مفهوم حاصلضرب تاری مدولها و حلقه‌های جابجایی پرداخته و قضایای بسیار مهم و جالبی را در مورد آن بیان می‌کنیم که ابزار بسیار قوی در کارمان محسوب می‌شود و نتایجی که از آن بدست می‌آید بعضاً

شگفت‌انگیز است مانند قضیه «Patching local Isomorphism» که در اثبات قضایای اصلی نقش کلیدی ایفا می‌کند. این موارد را در بخش هفتم می آوریم.

در بخش هشتم به معرفی تک‌مدول[٦] سطری و مدولهای بطور پایدار آزاد می‌پردازیم و با استفاده از این مفاهیم و همچنین مفهوم حاصلضرب تاری به ساختن مدولهای تصویری جدید می‌پردازیم.

فصل سوم را مدولهای تصویری روی حلقه چندجمله‌ایها نامگذاری کرده و به ۳ بخش تقسیم می‌کنیم.

در بخش نهم با استفاده از مفهوم مدولهای توسیع یافته و لم‌های متعدد به اثبات قضیه کوئیلن می‌پردازیم که بیان می‌کند:

فرض کنیم A یک حلقه جابجایی نوتری و $R = A[X]$ باشد. فرض کنید M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال m از A داشته باشیم $M_m = (A-m)^{-1}M$ توسیع یافته از A_m می‌باشد آنگاه M توسیع یافته از A می‌باشد.

در بخش دهم به اثبات قضیه اساسی هاروک می‌پردازیم که برای اثبات آن به مفاهیم و لم‌های متعددی نیاز داریم و همچنین در اثبات آن تکنیک بسیار زیبایی به کار گرفته شده است که حیرت انگیز است.

این قضیه بیان می‌دارد:

فرض کنید A یک حلقه موضعی و $R = A[X]$ باشد. فرض کنید P یک $R-$ مدول متناهی مولد تصویری باشد. فرض کنید S مجموعه چندجمله‌ایهای تکین R باشد اگر $S^{-1}P$ یک $S^{-1}R-$ مدول آزاد از مرتبه n باشد آنگاه P یک $R-$ مدول آزاد از مرتبه n خواهد بود.

در بخش یازدهم با استفاده از نتیجه قضیه هاروک‌س به اثبات قضیه کوئیلن — سوزلین که همان قضیه اصلی است می‌پردازیم.

همچنین تمام نمادگذاری و علائم مقدماتی را منطبق بر کتاب گامهایی در جبر تعویضپذیر نوشته رودنی

[٦] Unimodular

شارپ با ترجمه دکتر محمد مهدی ابراهیمی انتخاب کرده‌ایم.

فصل ۱

پیش‌نیاز

۱. موضعی سازی

۱.۱ قضیه، اصطلاح و نمادگذاری: فرض کنید S زیرمجموعهٔ ضربی بسته از حلقه تعویضپذیر R باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای $(a,s),(b,t) \in R \times S$

$$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow \exists u \in S; u(ta - sb) = \circ$$

رابطه $\sim$ یک هم‌ارزی روی $R \times S$ است. به ازای $(a,s) \in R \times S$ رده هم‌ارزی شامل (a,s) را با $\frac{a}{s}$ و مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-۱}R$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت $S^{-۱}R$ تحت عملهای

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \ , \ \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st}$$

به ازای a و b های متعلق به R و t و s های متعلق به S، حلقه‌ای تعویضپذیر است.

این حلقه را حلقه کسرهای R نسبت به S می‌نامیم و با $S^{-۱}R$ نمایش می‌دهیم.

عضو صفر آن $\frac{\circ}{۱}$ و همانی ضربی آن $\frac{۱}{۱}$ است.

اثبات: [۱, ۵ – ۲]. □

۲.۱ قضیه، اصطلاح و نمادگذاری: فرض کنید S زیرمجموعهٔ ضربی بسته از حلقه تعویضپذیر R و M، $R-$ مدول باشد. رابطه $\sim$ روی $M \times S$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای $(m,s),(n,t) \in M \times S$

$$(m,s) \sim (n,t) \Leftrightarrow \exists u \in S; u(tm-sn)=\circ$$

رابطه $\sim$ یک هم‌ارزی روی $M \times S$ است. به ازای $(m,s) \in M \times S$ رده هم‌ارزی شامل (m,s) را با $\frac{m}{s}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه $S^{-1}M$ متشکل از رده‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$ تحت اعمال $\frac{m}{s}+\frac{n}{t}=\frac{tm+sn}{st}$ و $\frac{r}{s}\frac{n}{t}=\frac{rn}{st}$ که در آن $m,n \in M$ و $s,t \in S$ و $r \in R$ مدولی روی حلقه $S^{-1}R$ می‌باشد که متشکل از کسرهای R نسبت به S است.

$S^{-1}R-$ مدول $S^{-1}M$ مدول کسرهای M نسبت به S نامیده می‌شود. عضو صفر این مدول $\frac{\circ_M}{1}$ است که به ازای هر $s \in S$ با $\frac{\circ_M}{S}$ برابر است.

اثبات: [۱, ۹ − ۴]. $\square$

۳.۱ تذکر الف) توجه کنید که به ازای $m \in M$ و $s \in S$ داریم $\frac{m}{s}=\circ_{S^{-1}M}$ اگر و تنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $tm=\circ$.

ب) نگاشت $g: M \to S^{-1}M$ با تعریف به ازای هر $m \in M$، $g(m)=\frac{m}{1}$ همریختی $R-$ مدولها است.

ج) $S^{-1}M$ با تحدید اسکالرها با استفاده از همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to S^{-1}R$ به عنوان $R-$ مدول در نظر گرفته می‌شود. در این‌صورت به‌راحتی می‌توان دید که

$$Ker g=\{m \in M : sm=\circ \text{ وجود دارد که } s \in S\}$$

د) هرگاه به ازای عضو ثابتی چون $t \in R$، $S = \{t^n : n \in \mathbb{N}\}$ مدول $S^{-1}M$ را با M_t نمایش می‌دهیم و در حالت خاصی که به ازای ایده‌آل اولی چون P از R داریم $S = R - P$، مدول $S^{-1}M$ را با M_P نمایش می‌دهیم.

۴.۱ لم و نمادگذاری: فرض کنیم $f : L \to M$ همریختی مدولهای روی حلقه تعویضپذیر R و S زیرمجموعه ضربی بسته از R باشد در این‌صورت از f یک $S^{-1}R-$ همریختی چون $S^{-1}f : S^{-1}L \to S^{-1}M$ بدست می‌آید که به ازای هر $a \in L$ و $s \in S$، $S^{-1}f(\frac{a}{s}) = \frac{f(a)}{s}$.
هرگاه $S = R - P$. که P ایده‌آل اول R می‌باشد آنگاه $S^{-1}f$ را با f_P نمایش می‌دهیم.

اثبات: [۱, ۹ − ۷]. □

۵.۱ قضیه: فرض کنیم L و M و N مدولهایی روی حلقه تعویضپذیر R و S زیرمجموعهٔ ضربی بسته از R باشد. فرض کنید $f, f' : L \to M$ و $g : M \to N$، $R-$ همریختی باشد در این‌صورت

الف) $S^{-1}(f + f') = S^{-1}f + S^{-1}f'$

ب) $S^{-1}(gof) = S^{-1}goS^{-1}f$

ج) $S^{-1}(Id_M) = Id_{S^{-1}M}$

د) اگر f $R-$ یکریختی باشد آنگاه $S^{-1}f$، $S^{-1}R-$ یکریختی است.

اثبات: [۱, ۹ − ۸]. □

۶.۱ قضیه: فرض کنید $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ دنباله‌ای کامل از مدولهای روی حلقه تعویضپذیر R و $R-$ همریختیهاو S زیرمجموعهٔ ضربی بسته از R باشد. در این‌صورت دنباله

$$S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$$

نیز کامل است.

اثبات: [۱, ۹ − ۹]. $\square$

۷.۱ قضیه: فرض کنید L_1 و L_2 زیرمدولهایی از مدول M روی حلقه تعویضپذیر R و S زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از R باشد، فرض کنید I ایده‌آل R باشد و $r \in R$. نماد توسیع را در مورد همریختی طبیعی $R \to S^{-1}R$ بکار می‌بریم. در این‌صورت داریم:

الف) $S^{-1}(IM) = I^e S^{-1}M$

ب) $S^{-1}(rM) = \frac{r}{1} S^{-1}M$

ج) $S^{-1}(L_1 + L_2) = S^{-1}L_1 + S^{-1}L_2$

د) $S^{-1}(L_1 \cap L_2) = S^{-1}L_1 \cap S^{-1}L_2$

ه) اگر M $R-$ مدول نوتری باشد آنگاه $S^{-1}M$، $S^{-1}R-$ مدول نوتری است.

و) اگر I ایده‌آل متناهی مولد R باشد در این‌صورت $S^{-1}(L :_M I) = (S^{-1}L :_{S^{-1}M} I^e)$.

اثبات: [۱, ۹ − ۱۱]. $\square$

۸.۱ قضیه: فرض کنید L و N زیرمدولهایی از مدول M روی حلقه تعویضپذیر R و S زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از R باشد. نماد توسیع را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to S^{-1}R$ بکار می‌بریم.

در این‌صورت

الف) نگاشت $\begin{array}{l} \frac{S^{-1}M}{S^{-1}L} \to S^{-1}(\frac{M}{L}) \\ \frac{m}{s} + S^{-1}L \mapsto \frac{m+L}{s} \end{array}$ یکریختی $S^{-1}R-$ مدولهاست.

ب) اگر N متناهی مولد باشد آنگاه $(L :_R N)^e = (S^{-1}L :_{S^{-1}R} S^{-1}N)$.

ج) اگر M متناهی مولد باشد آنگاه $(Ann_R(M))^e = Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

اثبات: [۱, ۹ − ۱۲]. $\square$

۹.۱ **تعریف:** فرض کنید G مدولی روی حلقه تعویضپذیر R باشد. مقصود از محمل G مجموعهٔ $\{P \in Spec(R) : G_P \neq \circ\}$ است این مجموعه را با نماد $Supp(G)$ نمایش می‌دهیم. □

۱۰.۱ فرض کنیم G مدولی روی حلقه تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت احکام زیر معادلند:

الف) $G = \circ$

ب) به ازای هر $P \in Spec(R)$، $G_P = \circ$، یعنی $Supp(G) = \emptyset$.

ج) به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $G_M = \circ$.

اثبات: [۱, ۹ − ۱۵]. □

۱۱.۱ **نتیجه:** فرض کنید $f : L \to G$ همریختی مدولها روی حلقه تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت احکام زیر معادلند:

الف) f یک‌به‌یک (پوشا) است.

ب) به ازای هر $P \in Spec(R)$، $f_P : L_P \to G_P$ یک‌به‌یک (پوشا) است.

ج) به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $f_M : L_M \to G_M$ یک‌به‌یک (پوشا) است.

اثبات: [۱, ۹ − ۱٦, ۹ − ۱۷]. □

۱۲.۱ **قضیه:** فرض کنید G مدولی روی حلقه تعویضپذیر R و S زیرمجموعهٔ بسته ضربی از R و P ایده‌آل اول R باشد بطوریکه $P \cap S = \emptyset$ توجه کنید که $PS^{-1}R \in SPec(S^{-1}R)$ در این‌صورت اگر $S^{-1}G_{PS^{-1}R}$ با استفاده از یکریختی مناسبی چون $R_P \to S^{-1}R_{PS^{-1}R}$ به عنوان R_P- مدول در نظر گرفته شود آنگاه یکریختی $S^{-1}G_{PS^{-1}R} \xrightarrow{\sim} G_P$ از R_P- مدولها وجود دارد.

اثبات: [۱, ۹ − ۲۴]. □

۱۳.۱ **قضیه:** فرض کنیم M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد در این‌صورت

$Supp(M) = Var(Ann_R(M))$.

اثبات: [۱, ۹ − ۲۰]. □

۱۴.۱ قضیه: نگاشت طبیعی $i : M \to S^{-1}M$ در خاصیت جهانی زیر صدق می‌کند:

اگر N یک $S^{-1}R$− مدول و نگاشت R− همریختی $f : M \to N$ وجود داشته باشد در این‌صورت یک $S^{-1}R$− همریختی یکتایی مانند $F : S^{-1}M \to N$ وجود دارد بطوریکه نمودار

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & S^{-1}M \\ & f \searrow & \downarrow F \\ & & N \end{array}$$

جابجایی باشد.

اثبات: تعریف می‌کنیم: $\begin{array}{l} F : S^{-1}M \to N \\ \frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s}f(m) \end{array}$. که در این‌صورت به‌راحتی می‌توان دید که F یک $S^{-1}R$− همریختی است و به ازای $m \in M$ داریم: $Foi(m) = F(\frac{m}{1}) = \frac{1}{1}f(m) = f(m)$.

برای اثبات یکتایی F فرض می‌کنیم $F' : S^{-1}M \to N$ یک $S^{-1}R$− همریختی باشد که $F'oi = f$.

در این‌صورت به ازای $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ داریم:

$$F'(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}F'(\frac{m}{1}) = \frac{1}{s}f(m) = F(\frac{m}{s})$$

□

۱۵.۱ قضیه: هرگاه M یک R− مدول و S یک مجموعه ضربی بسته از R باشد آنگاه

$$S^{-1}M \simeq S^{-1}R \otimes_R M$$

اثبات: [۲, ۵ − ۳]. □

۱۶.۱ قضیه: فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S \subseteq T$ دو مجموعهٔ ضربی بسته R باشند. همریختی حلقه‌ای طبیعی از R به $S^{-1}R$ را با i_S نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ ضربی بسته $i_S(T)$ را با $\tilde{T}$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت یکریختی حلقه‌ای بین R_T و $(R_S)_{\tilde{T}}$ وجود دارد.

اثبات: [۱, ۵ – ۱۲]. □

۱۷.۱ قضیه: فرض کنیم R حلقه جابجایی و M یک R– مدول باشد. برای هر زیرمدول M مانند M' و M'' داریم $M' = M''$ اگر و تنها اگر $M'_m = M''_m$ به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R.

اثبات: فرض کنیم $M' = M''$ پس به آسانی خواهیم داشت $M'_m = M''_m$ به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R.

فرض کنیم به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R داریم $M'_m = M''_m$. فرض کنید n یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد. در این‌صورت داریم: $(\frac{M'+M''}{M'})_n = \frac{M'_n+M''_n}{M'_n}$ و $(\frac{M'+M''}{M''})_n = \frac{M'_n+M''_n}{M''_n}$ چون $M'_n = M''_n$ پس از رابطه اولی خواهیم داشت $\frac{M'_n+M''_n}{M'_n} = 0$ لذا $(\frac{M'+M''}{M'})_n = 0$ بنابراین $\frac{M'+M''}{M'} = 0$ لذا $M'+M'' = M'$ پس $M'' \subseteq M'$.

به‌همین ترتیب با تعویض جای M' و M'' خواهیم داشت $\frac{M'_n+M''_n}{M''_n} = 0$ پس $M' \subseteq M''$ که در نتیجه بدست می آید $M' = M''$. □

۱۸.۱ نتیجه: فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و M یک R– مدول باشد. فرض کنید $S = \{m_i\}_{i\in I}$ یک زیرمجموعه از M باشد. مجموعهٔ $\{m_i\}_{i\in I}$، M را تولید می‌کند اگر و فقط اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R مجموعه $\{\frac{m_i}{1}\}_{i\in I}$ (تصویر S در M_m) مدول M_m را تولید کند.

اثبات: فرض کنید N زیرمدول تولید شده توسط S باشد. طبق گزاره قبل داریم $N_m = M_m$ اگر و تنها اگر $N = M$. حکم از این مطلب بدست می آید که $\{\frac{m_i}{1}\}$ مولد R_m– مدول N_m است. □

۱۹.۱ **تعریف:** فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه R باشد مجموعه $D(I)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(I) = \{P \in Spec(R) : I \nsubseteq P\}$$

برای $f \in R$ مجموعهٔ $D(fR)$ را با $D(f)$ نمایش می‌دهیم. و احکام زیر به آسانی به‌دست می‌آید.

۱) برای f و g متعلق به R، $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

۲) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $D(f) = D(f^n)$.

۳) $D(f) = \emptyset$ اگر و تنها اگر f پوچتوان باشد.

۲۰.۱ **قضیه:** فرض کنید $I_1, \ldots, I_r$ ایده‌آلهایی از حلقه R باشند در این‌صورت

الف) $D(I_1) \cup \ldots \cup D(I_r) = D(I_1 + \ldots + I_r)$.

ب) $D(I_1) \cup \ldots \cup D(I_r) = Spec(R)$ اگر و تنها اگر $I_1 + \ldots + I_r = R$.

اثبات: الف) فرض کنید $P \in D(I_1) \cup \ldots \cup D(I_r)$ پس وجود دارد $1 \leq j \leq r$ به‌طوریکه $P \in D(I_j)$ پس $I_j \nsubseteq P$ بنابراین $I_1 + \ldots + I_r \nsubseteq P$ پس $P \in D(I_1 + \ldots + I_r)$. برعکس فرض کنیم $P \in D(I_1 + \ldots + I_r)$ در این‌صورت $I_1 + \ldots + I_r \nsubseteq P$ پس $1 \leq j \leq r$ وجود دارد که $I_j \nsubseteq P$ بنابراین $P \in D(I_j)$ در نتیجه $P \in D(I_1) \cup \ldots \cup D(I_r)$. که حکم را کامل می‌کند.

ب) فرض کنیم $D(I_1) \cup \ldots \cup D(I_r) = Spec(R)$ طبق الف داریم:

$D(I_1 + \ldots + I_r) = Spec(R)$ قرار می‌دهیم $I_1 + \ldots + I_r = J$ فرض کنیم $J \neq R$ پس $P \in Spec(R)$ وجود دارد که $J \subseteq P$ که با فرض $D(J) = Spec(R)$ در تناقض می‌باشد. پس $J = R$.

عکس حکم با توجه به رابطه $D(R) = Spec(R)$ واضح می‌باشد. $\square$

۲۱.۱ **لم:** فرض کنیم I و J ایده‌آلهای حلقه تعویض‌پذیر R باشند به‌طوریکه $I + J = R$ در این‌صورت به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت: $I^m + J^n = R$.