دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان

جدا سازی کلاس‌های عملگرهای جزئاً نرمال بوسیله عملگرهای ترکیبی

اساتید راهنما

دکتر محمد رضا جبارزاده

دکتر حمید واعظی

استاد مشاور

دکتر اصغر رنجبری

پژوهشگر

سجاد رحیمی تابیه

بهمن ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر بزرگوارم

مادر عزیزم

خواهران و برادرنم

که تا پایان عمر خود نخواهم توانست ذره‌ای از محبتهایشان را جبران کنم.

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند منّان که دورهٔ کارشناسی ارشد را به لطف و یاری او به اتمام رساندم. در طول دوران تحصیلاتم اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. می‌دانم که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر جبارزاده و آقای دکتر واعظی همچنین آقای دکتر رنجبری را جبران نماید.

اما بر خود لازم می‌دانم که از اساتید گرانقدرم آقایان دکتر جبارزاده و دکتر واعظی به خاطر زحمات بی‌شائبه و حمایت‌هایشان از صمیم قلب تشکر نمایم. همچنین از آقای دکتر رنجبری به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و مساعدت‌هایشان که همیشه مرا مورد لطف خود قرار داده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم .

از اساتید دیگرم که افتخار شاگردیشان را داشتم از جمله جناب آقای دکتر فاروقی، آقای دکتر فرزدی و آقای دکتر مهدیزاده و آقای دکتر عبادیان که در طول دوران تحصیل مشوق من بوده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که همواره یار و حامی من بوده‌اند و با تحمل مشکلات راه تحصیل را بر من هموار نموده‌اند، نهایت تشکر را دارم.

سجاد رحیمی تابیه

نام خانوادگی دانشجو: رحیمی تابیه   نام: سجاد

عنوان: جدا سازی کلاس‌های عملگرهای جزئاً نرمال بوسیله عملگرهای ترکیبی

اساتید راهنما :   دکتر محمد رضا جبارزاده ، دکتر حمید واعظی

استاد مشاور: دکتر اصغر رنجبری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: آنالیز   دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸   تعداد صفحه: ۸۸

کلید واژه‌ها: عملگرهای ترکیبی، عملگرهای p–هیپونرمال، عملگرهای بطور ضعیف هیپونرمال، امید شرطی

چکیده

در این پایاننامه ابتدا تئوری اندازه را بطور کامل برای عملگرهای ترکیبی معین ∞، p و ضعیف –هیپونرمال توصیف می کنیم و سپس مثالهایی ارائه می کنیم که تمایز بین این کلاسها را بخوبی نشان می دهند. همچنین عملگرهای معین در نظر گرفته شده روی فضای L^2 را در شرایطی که عضو کلاسهای جزئاً نرمال مختلف هستند، توصیف خواهیم کرد. در ادامه روابط بین این کلاسها را بررسی کرده و چگونگی توسیع عملگر امید شرطی یعنی E به فضای L^p را توضیح می‌دهیم و با در نظر گرفتن عملگرهای تعریف شده توسط تبدیلات خطی در محیط فضای اندازه، عملگرهای

مذکور را به کلاسهای جزئاً نرمال مختلف ارتباط خواهیم داد و بالاخره در خاتمه با ارائه مثالهایی چگونگی تفکیک کلاسهای فوق را توسط عملگرهای ترکیبی روشن خواهیم ساخت.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه در سه فصل تهیه شده است. فصل اول شامل چهار بخش است که در بخش اول ساختاری کلی از موضوعات پایان‌نامه ارائه شده است و در بخش دوم مفاهیم مقدماتی و تعریف عملگرهای جزئاً نرمال آورده شده است. در بخش سوم به بررسی ویژگی‌های عملگر امید شرطی پرداخته‌ایم و بالاخره در بخش چهارم چند مورد از ویژگی‌های مقدماتی عملگرهای جزئاً نرمال را اثبات کرده‌ایم.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول با بیان چند قضیه به بررسی خواص عملگرهای p—هیپونرمال می‌پردازیم. در بخش دوم عملگرهای ترکیبی وزن‌دار را بررسی می‌کنیم و در بخش سوم یکی از ابزارهای که اخیراً در بحث تئوری عملگرها بطور گسترده مورد استفاده قرار گرفته را معرفی می‌کنیم و سپس مفاهیم تجزیه قطبی و عملگرهای بطور ضعیف هیپونرمال را بررسی می‌کنیم و بالاخره با ارائه چند نتیجه فصل دوم تمام می‌شود.

فصل سوم شامل چهار بخش است در بخش اول با ارائه مثالی چگونگی تفکیک عملگرهای p—هیپونرمال را نشان می‌دهیم و در بخش دوم عملگری ایجاد می‌کنیم که چگونگی تفکیک عملگرهای ∞—هیپونرمال از عملگرهای زیر نرمال را روشن می‌سازد و در بخشهای بعدی نیز مثال‌هائی ارائه می‌کنیم که چگونگی تفکیک عملگرهای بطور ضعیف هیپونرمال از عملگرهای p—هیپونرمال و عملگرهای شبه نرمال از عملگرهای ∞ و زیر نرمال را نشان می‌دهند.

آلن لامبرت، چارلز برناپ، ایل بونگ جونگ، هرنر و درمینگ وانگ چند تن از ریاضی دانانی هستند که در مورد عملگرهای جزئاً نرمال و کلاس بندی آنها کار کرده‌اند.

در ضمن این پایان‌نامه براساس مقاله زیر تهیه شده است.

C. Burnap, I. B. Jung, A. Lambert, *Separating partial normality classes with composition operators*, J. Operator Theory, 53 (2005), 381-397.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ ساختار کلی موضوعات پایان‌نامه

۱) فضای $(X,\sum,\mu)$ که $\sum$ یک σ—جبر روی X بوده و μ اندازه مثبت است، فضای اندازه σ—متناهی است.

۲) $T : X \longrightarrow X$ یک تابع اندازه پذیر است. یعنی $T^{-1}\sum \subseteq \sum$.

۳) $\mu o T^{-1} << \mu$.

۴) $h = \frac{d\mu o T^{-1}}{d\mu} \in L^\infty$، که h همان مشتق رادون—نیکودیم است.($h < \infty$ تقریباً همه جا معادل است با اینکه $T^{-1}\sum$، σ—متناهی است.)

۵) در این پایان‌نامه روی فضای $L^2(X,\sum,\mu)$ کار می‌کنیم.

٦) $Ef = E(f|T^{-1}\sum)$، عبارتست از امید شرطی[1] f به شرط $T^{-1}\sum$.

منابع [٢٦] و [٢٩] ویژگی‌های کلی از عملگرهای ترکیبی را فراهم می‌کنند، همچنین [١٠]، [١٢]، [١٦] و [١٧] منابع مناسبی برای بررسی ارتباط بین مجموعه‌ها هستند.
برای آشنایی بیشتر با ویژگی‌های عملگر امید شرطی که در ادامه به چند مورد از آنها اشاره خواهیم کرد، به منابع [١٨]، [٢۴] و [٢٧] رجوع شود.

۲.۱ عملگرهای جزئاً نرمال

در این بخش تعریف عملگرهای جزئاً نرمال را ارائه می‌دهیم.

[1] conditional expectation

تعریف ۱.۲.۱ فرض می‌کنیم $(X,\sum,\mu)$ یک فضای اندازه و $T:X\longrightarrow X$ یک تابع اندازه پذیر باشد در این صورت عملگر ترکیبی[2] القاء شده بوسیله T را با C_T نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} C_T : L^2(X,\sum,\mu) &\longrightarrow L^2(X,T^{-1}\sum,\mu|_{T^{-1}\sum}), \\ C_T(f) &= foT. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۲.۱ فرض می‌کنیم A عملگر خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H باشد. در این صورت A را عملگر نرمال می‌نامیم، هر گاه A با الحاقی خودش یعنی A^* جابجا شود. به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$A^*A = AA^*.$$

هر عملگر خود الحاق یک عملگر نرمال است.

تعریف ۳.۲.۱ عملگر خطی و کراندار A روی فضای هیلبرت H را شبه نرمال می‌نامیم، هرگاه A با A^*A جا بجا شود. به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$(A^*A)A = A(A^*A).$$

به وضوح هر عملگر نرمال شبه نرمال است. زیرا اگر A عملگر نرمال باشد، در این صورت $A^*A = AA^*$ بوده لذا داریم:

$$A(A^*A) = (AA^*)A = (A^*A)A.$$

تعریف ۴.۲.۱ فرض می‌کنیم A عملگری خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H باشد. در این صورت A را عملگر زیر نرمال روی H گوییم، اگر فضای هیلبرت K که H زیر فضای

[2] composition operator

پایای آن است، وجود داشته باشد، به طوری که توسیع A به K نرمال باشد.

تعریف ۵.۲.۱ عمگلر خطی و کراندار A روی فضای هیلبرت H را هیپونرمال گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$A^*A \geq AA^*$$

طبق تعریف به وضوح هر عملگر نرمال، هیپونرمال است.

تعریف ۶.۲.۱ فرض می‌کنیم A عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت H باشد. در این صورت برای هر $p \in (0, \infty)$، A را p—هیپونرمال گوییم، هر گاه داشته باشیم:

$$(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$$

بنا به تعریف هر عملگر هیپونرمال، ۱—هیپونرمال است.

تعریف ۷.۲.۱ عملگر خطی و کراندار A روی فضای هیلبرت H را ∞—هیپونرمال گوییم، اگر برای هر $p \in (0, \infty)$، p—هیپونرمال باشد.

در ادامه نشان خواهیم داد، هر عملگر شبه نرمال، ∞—هیپونرمال است.

اکنون چند مورد از ارتباط‌های اساسی بین کلاسهای جزئاً نرمال را یادآوری می‌کنیم.

۱) هر عملگر نرمال،[3] شبه نرمال[4] است [۲۰].

۲) هر عملگر شبه نرمال، زیر نرمال است [۲۰].

[3] normal

[4] subnormal

۳) هر عملگر زیر نرمال، هیپونرمال[5] است [۱۱].

۴) هر عملگر شبه نرمال، ∞—هیپونرمال است [۵].

۵) هر عملگر ∞—هیپونرمال، p—هیپونرمال است [۲۰].

۶) هر عملگر p—هیپونرمال، ضعیف—هیپونرمال است [۳].

۷) فرض کنید $p, q > 0$ و عملگر C_T، p—هیپونرمال باشد. آنگاه C_T برای هر $q < p$، q—هیپونرمال است [۱].

در ادامه به طور خلاصه به اثبات چند مورد از موارد بالا اشاره خواهیم کرد، و در فصل آخر با ارائه مثال‌هایی نشان خواهیم داد که عکس روابط فوق در حالت کلی برقرار نیست.

۳.۱ عملگر امید شرطی و برخی خاصیتهای آن

در این قسمت عملگر امید شرطی را روی فضای L^1 تعریف کرده و توسیع آن به فضای L^p را شرح می‌دهیم.
فرض می‌کنیم $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه بوده و تابع $T : X \longrightarrow X$ اندازه پذیر باشد (یعنی $T^{-1}\sum \subseteq \sum$ که $(T^{-1}\sum = \{T^{-1}A| \quad A \in \sum\}$. بنا به [۲۸] $T^{-1}\sum$ یک σ—جبر است.
اکنون $\mu|_{T^{-1}\sum}$ را در نظر گرفته و برای هر $A \in \sum$ و تابع معین $f : X \longrightarrow R^+$، اندازه $\nu_f : T^{-1}\sum \longrightarrow R^+$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu.$$

---

hyponormal[5]

به وضوح ν_f یک اندازه مثبت بوده و $\nu_f << \mu$. لذا شرایط قضیه رادون نیکودیم برقرار است. پس بنا به قضیه مذکور $\tilde{f} \in L^1(T^{-1}\sum)$ و $\tilde{f} \geq 0$ وجود دارد، به طوری که

$$\nu_f(T^{-1}A) = \int_{T^{-1}A} \tilde{f} d\mu.$$

حال عملگر E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E : L^1(X, \sum, \mu) \longrightarrow L^1(X, T^{-1}\sum, \mu),$$

$$Ef = \tilde{f}.$$

بنا به قضیه رادون—نیکودیم داریم:

$$\int_{T^{-1}A} f d\mu = \int_{T^{-1}A} \tilde{f} d\mu = \int_{T^{-1}A} Ef d\mu. \qquad (۱.۱)$$

در نتیجه برای توابع نامنفی عملگر E را تعریف کردیم. حال به توابع حقیقی و نهایتاً مختلط تعمیم می‌دهیم.

برای این منظور فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی باشد. در این صورت $f = f^+ - f^-$ که f^+ و f^- توابع نامنفی هستند. لذا با به کار گیری روند بالا برای f^+ و f^- نتیجه می‌شود، توابع $\tilde{f}_1$ و $\tilde{f}_2$ وجود دارند، به طوری که داریم:

$$E(f^-) = \tilde{f}_2 \quad , \quad E(f^+) = \tilde{f}_1.$$

در نتیجه برای تابع حقیقی f داریم:

$$Ef = E(f^+) - E(f^-) = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 = \tilde{f}.$$

همچنین تساوی (۱.۱) برای $\tilde{f}$ برقرار است. حال اگر تابع f مختلط باشد، در این صورت $f = Ref + iImgf$ که $Imgf$ و Ref هر دو حقیقی هستند. لذا توابع $\tilde{f}_1$ و $\tilde{f}_2$ وجود دارند، به

طوری که $E(Ref)=\tilde{f_1}$ و $E(Imgf)=\tilde{f_2}$ در نتیجه داریم:

$$E(f)=E(Ref)+iE(Imgf)=\tilde{f_1}+i\tilde{f_2}=\tilde{f}.$$

به وضوح تساوی زیر برای $\tilde{f}$ برقرار است:

$$\int_{T^{-1}A} f\ d\mu=\int_{T^{-1}A}\tilde{f}d\mu=\int_{T^{-1}A} Ef\ d\mu.$$

حال عملگر E را به فضای $L^p(X,\sum,\mu)$ تعمیم می‌دهیم. برای این منظور ابتدا قضیه زیر را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۱ فرض می‌کنیم $1\leq p<\infty$، μ یک اندازه مثبت σ—متناهی بر X بوده و تابع ϕ بر $L^p(\mu)$ خطی و کراندار باشد. در آن صورت $g\in L^q(\mu)$ منحصر بفردی وجود دارد، به طوری که داریم:

$$\phi(f)=\int_X fg\ d\mu, \qquad (f\in L^p(\mu)).$$

به علاوه $||\phi||=||g||_q$. (p و q مزدوج نمایی هستند).

اثبات در [۲۸].

اکنون با اثبات قضیه زیر شرایط را برای توسیع عملگر E به فضای L^p فراهم می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۱ اگر $(X,\sum,\mu)$ فضای اندازه σ—متناهی و $\mathcal{A}\subseteq\sum$ یک σ—جبر بوده و $1<p<\infty$ باشد. آنگاه برای هر $f\in L^p(X,\sum,\mu)$، $\tilde{f}$ یکتایی متعلق به $L^p(X,\mathcal{A},\mu_{\mathcal{A}})$ وجود دارد، به طوری که به ازای هر $g\in L^q(X,\mathcal{A},\mu_{\mathcal{A}})$ داریم:

$$\int_X gfd\mu=\int_X g\tilde{f}d\mu_{\mathcal{A}}.$$

p,q مزدوج نمایی هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم $f \in L^p(\mu)$ و l_f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$l_f(g) = \int_X fgd\mu, \qquad g \in L^q(\mu).$$

اکنون نشان می‌دهیم $l_f \in [L^q(\mu)]^*$. برای این منظور کافیست نشان دهیم $||l_f|| < \infty$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |l_f(g)| &\leq \int_X |f||g| \, d\mu \\ &\leq ||f||_p ||g||_q \end{aligned}$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} &||l_f|| \leq ||f||_p < \infty \\ \Longrightarrow \quad & l_f \in [L^q(\mu)]^* \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌شود $l_f \in [L^q(\mu)]^*$.

حال قرار می‌دهیم، $\tilde{l_f} = l_f|_{L^q(X,\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})}$. در این صورت داریم:

$$||\tilde{l_f}|| \leq ||l_f|| = ||f||_p < \infty.$$

بنابراین $\tilde{l_f} \in [L^q(X, \mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})]^*$. در نتیجه بنا به قضیه قبل $\tilde{f} \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ وجود دارد، به طوری که برای هر $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ داریم:

$$\tilde{l_f}(g) = \int_X \tilde{f} g \, d\mu_\mathcal{A}.$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\int_X fg \, d\mu = l_f(g)|_{L^q(X \ , \ \mathcal{A} \ , \ \mu_\mathcal{A})} = \tilde{l}_f(g) = \int_X \tilde{f} g \, d\mu_\mathcal{A}.$$

□

حال عملگر E را روی فضای $L^p(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E : L^p(X, \sum, \mu) \longrightarrow L^p(X, T^{-1} \sum, \mu),$$
$$Ef = \tilde{f}.$$

با این تعریف خواهیم داشت:

$$||E(f)||_p = ||\tilde{f}||_p = ||\tilde{l}_f|| \leq ||l_f|| = ||f||_p.$$

بنابراین E یک انقباض است.

در ادامه به بیان برخی از ویژگی‌های عملگر E می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک زیر $\sigma-$جبر از $\sum$ باشد. در این صورت داریم:

۱) برای هر تابع $\mathcal{A}-$اندازه پذیر a و هر تابع $\sum-$اندازه پذیر f داریم [۲۷]:

$$E(af|\mathcal{A}) = aE(f|\mathcal{A}).$$

۲) اگر g و f توابع $\sum-$اندازه پذیر بوده و $g \geq f$ آنگاه $E(f) \geq E(g)$. همچنین اگر $f \geq 0$ و $E(f) = 0$ آنگاه $f = 0$. به عبارت دیگر E اکیداً یکنوا[6] است [۲۷].

۳) برای هر $A \in \mathcal{A}$ و $f \in L^2(X, \sum, \mu)$ داریم [۲۷]:

$$\int_A f \, d\mu = \int_A E(f|A) \, d\mu.$$

[6] strictly monotone

۴) برای هر $r>0$ و هر تابع نامنفی $f\in L^2(X,\sum,\mu)$ داریم [۲۷]:

$$supportEf = supportE(f^r).$$

همچنین محمل $E(f^r)$ کوچکترین مجموعه $\mathcal{A}$ اندازه‌پذیر شامل محمل f است.

۵) فرض کنیم $\mathcal{A}$ زیر $\sigma-$جبر محض از $\sum$ باشد که توسط $\{A_k\}_{k\geq 0}$ (A_kها مجموعه‌های از اندازه مثبت‌اند). تولید شده باشد. در این صورت داریم [۲۷]:

$$E(f|\mathcal{A}) = \sum \frac{1}{\mu(A_k)}\ (\int_{A_k} f\ d\mu)\ \chi_{A_k}.$$

۴.۱ حکم‌ها و ویژگی‌های ضروری

در این بخش برخی ازحکم‌ها و ویژگی‌های لازم را ارائه می‌دهیم.

۱) عملگر E یک نگاشت تصویر خود الحاق[7] به توی $L^2(X,T^{-1}\sum,\mu)$ است، یعنی برای هر $f\in L^2(X)$ داریم:

$$E^2(f) = E(f) \quad , \quad E^*(f) = E(f).$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم E خود الحاق است. برای این منظور فرض می‌کنیم $f,g\in L^2(\mu)$. در این صورت داریم:

$$< f, E^*(g) > = < E(f), g > = \int_X\ E(f)\bar{g}\ d\mu.$$

[7] self-adjoint projection

چون $E(f)$ و $E(\bar{g})$، $\sum$ T^{-1}—اندازه‌پذیراند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} < f, E^*(g) > &= \int_X E(E(f)\bar{g})\, d\mu = \int_X E(f)E(\bar{g})\, d\mu \\ &= \int_X E(fE(\bar{g}))\, d\mu = \int_X fE(\bar{g})\, d\mu = \int_X f\overline{E(g)}\, d\mu, \end{aligned}$$

لذا به دست می‌آوریم:

$$\int_X f\overline{E(g)}\, d\mu = < f, E(g) > = < f, E^*(g) > .$$

بنابراین $E^*(g) = E(g)$ و این نشان می‌دهد، E خود الحاق است.

حال نشان می‌دهیم E عملگر تصویر است. مشابه قسمت اول، با استفاده از خواص عملگر E داریم:

$$\begin{aligned} < E^2(f), g > &= < E(E(f)), g > = < E(f), E^*(g) > = < E(f), E(g) > \\ &= \int_X E(f)\overline{E(g)}\, d\mu = \int_X E(f)E(\bar{g})\, d\mu = \int_X E(E(f)\bar{g})\, d\mu \\ &= \int_X E(f)\bar{g} d\mu = < E(f), g >, \end{aligned}$$

بنابراین $< E^2(f), g > = < E(f), g >$ لذا $E^2 = E$. پس عملگر E تصویر است. □

۲) برای هر تابع اندازه پذیر f و هر $A \in \sum$ داریم:

$$\int_{T^{-1}A} foT\, d\mu = \int_A hf\, d\mu.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم حکم برای توابع مشخصه برقرار است. برای این منظور فرض می‌کنیم، $B \in \sum$ دلخواه باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\int_{T^{-1}A} \chi_B oT\, d\mu = \int_X \chi_B oT.\chi_{(T^{-1}A)}\, d\mu,$$