دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

زیر مدول های ضعیفاً اول و حلقه هایی که تمام ایده‌آل های‌آن ها ضعیفاً اول است

تدوین

صبا پیریایی

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

زمستان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به تمامی کسانی که

اندیشیدن را به من آموختند

سپاس گزاری...

سپاس خداوند یکتا را که آدمی را مورد لطف بی‌کران خود قرار داد و او را به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری زاده به‌خاطر راهنمایی ها و حمایت‌های بی‌دریغ ایشان که همواره موجب دلگرمی من بوده اند صمیمانه سپاس‌گزاری می‌کنم.

همچنین مراتب سپاس گزاری خود را نسبت به جناب آقای دکتر ذاکری و آقای دکتر موسوی ابراز می دارم که بر من منت نهاده و وظیفه داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند.

از جناب آقای دکتر مهران رحیمی و دوستان خوبم که در این پایان نامه یاریگر من بودند نهایت سپاسگزاری را دارم.

در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می‌کنم از تک تک اعضای خانواده ام که وجودشان در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من می‌باشد.

صبا پیریایی

زمستان ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه ابتدا حلقه هایی را (نه لزوماً جابه‌جایی و یکدار) که همه ایده‌آل های‌آن ها ضعیفاً اول است، مطالعه می‌کنیم و سپس شرط لازم و کافی برای اینکه حلقه دارای این ویژگی باشد را بیان می‌کنیم و همچنین مثال های با ویژگی مذکور ارائه می نماییم، سپس به بررسی ساختار حلقه های جابه‌جایی دارای این خاصیت می پرداریم. در ادامه زیر مدول های اول و ضعیفاً اول را تعریف کرده و روابط بین آنها را بررسی می‌کنیم.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰ : 13C99 ، 13E05 ، 16N60 ، 16W99.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل ضعیفاً اول، زیر مدول ضعیفاً اول.

مقدمه

اندرسون [1] و اسمیت [2] ایده‌آل سره P در حلقه جابه‌جایی و یکدار R را ضعیفاً اول[3] می نامند اگر $a, b \in R$، $0 \neq ab \in P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$. در [1, Theorem 3] نشان داده می‌شود ایده‌آل سره P از حلقه R ضعیفاً اول است اگر به ازای هر دو ایده‌آل سره L و K از حلقه R، که $0 \neq LK \subseteq P$ آن‌گاه $L \subseteq P$ یا $K \subseteq P$. در این پایان نامه تعریفی مشابه تعریف بالا برای ایده‌آل ضعیفاً اول ارائه می‌دهیم ولی حلقه ها لزوماً جابه‌جایی و یکدار نیستند. بلیر[4] و تسوتسوی [5] به مطالعه ساختار حلقه هایی که تمام ایده‌آل های‌آن ها اول است (با نام حلقه های تماماً اول[6])پرداخته اند.
و نیز عزیزی[7] زیر مدول های اول [8] را تعریف و به مطالعه آن پرداخته است. و در راستای این مطالعات بهبودی[9] و کوهی [10] زیر مدول های ضعیفاً اول [11] را بیان کرده اند.
در این پایان نامه با توجه به نتایج به دست آمده از مقاله های اشخاص نام برده شده در بالا به بررسی حلقه هایی که تمام ایده‌آل های‌آن ها ضعیفاً اول است می‌پردازیم، در صورتی که حلقه جابه‌جایی یا نا جابه‌جایی است.همچنین به مطالعه روابط بین زیر مدول ها ی ضعیفاً اول و زیر مدول های اول می‌پردازیم. در این بحث به راحتی دیده می‌شود هر زیر مدول اول یک زیر مدول ضعیفاً اول است ولی عکس آن همواره برقرار نیست.

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل های آینده مطرح می‌شود. در فصل دوم به مطالعه ساختار حلقه هایی که لزوماً جابه‌جایی و یکدار نیستند و تمام ایده‌آل های‌آن ها ضعیفاً اول است می‌پردازیم در ابتدای فصل شرط لازم و کافی برای حلقه هایی با این ویژگی را بیان می‌کنیم در ادامه بحث مثال هایی در راستای قضایای گفته شده ارائه می‌دهیم. همچنین به بررسی حلقه های جابه‌جایی که تمام ایده‌آل های‌آن ها ضعیفاً اول است می‌پردازیم و در انتهای فصل در بخش سوم تعریفی از ایده آل های راست ضعیفاً اول ارائه می‌دهیم و یک نگاه کوتاه به حلقه های که تمام ایده‌آل های راست آن ها ضعیفاً اول است می اندازیم.

---

[1] D. D. Anderson

[2] E. Smith

[3] Weakly prime

[4] W. D. Blair

[5] H. Tsutsui

[6] Fully prime ring

[7] A. Azizi

[8] Prime submodule

[9] M. Behboodi

[10] H. Koohi

[11] Weakly prime submodule

در فصل سوم با فرض اینکه حلقه R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است، ابتدا تعریف زیر مدول اول و زیر مدول ضعیفاً اول را بیان می‌کنیم و در ادامه به بررسی روابط زیر مدول های اول و زیر مدول های ضعیفاً اول می‌پردازیم. اثبات خواهیم کرد هر زیر مدول اول است اگر و تنها اگر یک زیر مدول اولیه [۱۲] و ضعیفاً اول باشد. و همچنین هر زیر مدول ضعیفاً اول و تحویل ناپذیر[۱۳] ، زیر مدول اول است. در انتها با توجه به تعریف مدول های یکدست [۱۴] نشان خواهیم داد:

(۱) اگر F یک $R-$مدول یکدست و N یک زیر مدول ضعیفاً اول $R-$مدول M باشد که $F\bigotimes_R N \neq F\bigotimes_R M$، آن‌گاه $F\bigotimes_R N$ زیر مدول ضعیفاً اول $R-$مدول $F\bigotimes_R M$ است.

(۲) اگر F یک $R-$مدول یکدست صادق [۱۵] و N یک زیر مدول ضعیفاً اول $R-$مدول M باشد. آن‌گاه N یک زیر مدول ضعیفاً اول است اگر و تنها اگر $F\bigotimes_R N$ زیر مدول ضعیفاً اول$R-$مدول $F\bigotimes_R M$ باشد.

مطالب این پایان نامه بر اساس مقالات زیر تدوین شده است.

Y. Hirano, E. Poon and H. Tsutsui, *On rings in which every ideal is weakly prime*, Bull. Korean Math. soc. 47 (2010), no. 5, pp. 1077-1087.

A. Azizi, *Weakly prime submodules and prime submodules*, Glasgow Math. J. 48 (2006), 343-346.

[۱۲] Primary submodule

[۱۳] Irreducible

[۱۴] Flat module

[۱۵] Faithfully flat

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیاز ها

در سراسر این پایان نامه R یک حلقه شرکت پذیر[۱] فرض شده است به این معنی که حلقه نسبت به عمل ضرب شرکت پذیر است. و حلقه R لزوماً جابه‌جایی و یکدار نیست، هرگاه حلقه جابه‌جایی باشد حتماً بیان خواهد شد. همچنین منظور از ایده‌آل، همان ایده‌آل دو طرفه حلقه R است.

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱. ایده‌آل M از حلقه R را ماکسیمال گوییم هرگاه M نسبت به رابطه شمول عضو ماکسیمالی از مجموعه ایده‌آل های سره R باشد.

به عبارت دیگر ایده‌آل M، از حلقه R ماکسیمال است اگر و تنها اگر

(۱) $M \subset R$، و

(۲) ایده‌آلی چون I از R وجود نداشته باشد چنان که $M \subsetneqq I \subsetneqq R$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه است. رادیکال جیکبسن [۲] R را با $J(R)$ یا $Jac(R)$ نشان می‌دهیم و اشتراک همه ایده‌آل های ماکسیمال چپ (راست) حلقه R تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه R را ساده [۳] می‌نامیم هرگاه به جز صفر و خودش ایده‌آل دیگری نداشته باشد.

لم ۴.۱.۱. *M ایده‌آل ماکسیمال حلقه R است اگر و تنها اگر R/M یک حلقه ساده باشد.*

---

[۱] Associative

[۲] Jacobson radical

[۳] Simpel

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم P یک ایده‌آل از حلقه R است. P را یک ایده‌آل اول حلقه R می نامیم هرگاه $P \subset R$، یعنی یک ایده‌آل سره حلقه R باشد و برای هر دو ایده‌آل I و J از حلقه R اگر $IJ \subseteq P$ آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

لم ۶.۱.۱. *فرض کنیم P ایده‌آلی از حلقه R، شامل ایده‌آل J است. در این صورت ایده‌آل P/J از حلقه رده های مانده های R/J اول است اگر و تنها اگر P ایده‌آل اول حلقه R باشد.*

برهان. فرض می‌کنیم P یک ایده‌آل اول حلقه R شامل ایده‌آل Jاست. می خواهیم نشان دهیم ایده‌آل P/J نیز یک ایده‌آل اول حلقه R/J است. فرض می‌کنیم I/J و K/J دو ایده‌آل دلخواه حلقه R/J هستند که

$$\frac{IK+J}{J} = I/J \cdot K/J \subseteq P/J \ .$$

چون $IK \subseteq IK+J \subseteq P$ و P یک ایده‌آل اول است، در نتیجه $I \subseteq P$ یا $K \subseteq P$. در این صورت $I/J \subseteq P/J$ یا $K/J \subseteq P/J$. بنابراین P/J یک ایده‌آل اول حلقه R/J است.

برعکس فرض می‌کنیم P/J یک ایده‌آل اول حلقه R/Jاست، می خواهیم نشان دهیم P نیز یک ایده‌آل اول حلقه R شامل ایده‌آل J است.

واضح است که P یک ایده‌آل حلقه R شامل J است نشان می‌دهیم P یک ایده‌آل اول است. فرض می‌کنیم I و K دو ایده آل حلقه R هستند که $IK \subseteq P$. بنابراین

$$\frac{Ik+J}{J} \subseteq P/J \ .$$

یعنی

$$\frac{I+J}{J} \cdot \frac{K+J}{J} \subseteq P/J \ .$$

چون P/J یک ایده‌آل اول است،

$$\frac{I+J}{J} \subseteq P/J \text{ یا } \frac{K+J}{J} \subseteq P/J.$$

یعنی $I \subseteq I+J \subseteq P$ یا $K \subseteq K+J \subseteq P$. بنابراین P یک ایده‌آل اول حلقه R است. ♣

تعریف ۷.۱.۱. ایده‌آل سره P از حلقه جابه‌جایی و یکدار R یک ایده‌آل اول است هرگاه برای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$. آن گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

لم ۸.۱.۱. *فرض کنیم M یک ایده‌آل از حلقه جابه‌جایی و یکدار R است. آن‌گاه M ایده‌آل ماکسیمال است اگر و تنها اگر R/M میدان باشد.*

لم ۹.۱.۱. *[10, Theorem 3.55] فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از حلقه جابه‌جایی R و $I_۱, ..., I_n$ ایده‌آل هایی از R باشند. در این صورت گزاره های زیر معادل هستند*

(۱) به ازای jای که $۱ \leq j \leq n$، $I_j \subseteq p$.

(۲) $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i \subseteq P$.

(۳) $\prod_{i=۱}^{n} I_i \subseteq P$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم I و J دو ایده‌آل از حلقه R باشند. می‌گوییم I و J متباین هستند اگر $I + J = R$.

لم ۱۱.۱.۱. *فرض کنیم ایده‌آل های I و J از حلقه R متباین باشند. در این صورت $I \cap J = IJ$.*

لم ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم $M_۱$ و $M_۲$ دو ایده‌آل ماکسیمال متمایز حلقه R باشند. آن‌گاه $M_۱$ و $M_۲$ متباین هستند.*

برهان. می دانیم برای دو ایده‌آل متمایز $M_۱$ و $M_۲$ همواره $M_۱ \subsetneqq M_۱ + M_۲$ و $M_۲ \subsetneqq M_۱ + M_۲$.

از طرفی چون $M_۱$ و $M_۲$ ایده‌آل های ماکسیمال هستند، بنابراین $M_۱ + M_۲ = R$. ♣

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم $R_۱, R_۲, ..., R_n$ حلقه باشند. در این صورت $R = \bigoplus_{i=۱}^{n} R_i = R_۱ \bigoplus R_۲ \bigoplus ... \bigoplus R_n$ تحت عمل جمع و ضرب مؤلفه ای یک حلقه است.*

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم $I_۱, ..., I_n$، که $n \geqslant ۲$، ایده‌آل هایی از حلقه R باشند. آن‌گاه*

(۱) $f : R \longrightarrow R/I_۱ \times ... \times R/I_n$ با ضابطه $f(r) = (r + I_۱, ..., r + I_n)$، یک $R-$ همریختی است.

(۲) f یک به یک است اگر و تنها اگر $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i = ۰$.

(۳) f پوشا است اگر و تنها اگر خانواده ی $(I_i)_{i=۱}^{n}$ خانواده ای از ایده‌آل های دو به دو متباین باشند.

توجه می‌کنیم که در اینجا منظور از $R/I_۱ \times ... \times R/I_n$ حاصل ضرب مستقیم حلقه های $R/I_۱, ..., R/I_n$ است.

برهان. واضح است که f خوش‌تعریف است.

فرض می‌کنیم $\lambda \in R$ می خواهیم نشان دهیم

$$f(r + \lambda r') = f(r) + \lambda f(r') .$$

ابتدا توجه می‌کنیم به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ می توان نوشت

$$(r + \lambda r') + I_i = (r + I_i) + (\lambda r' + I_i) = (r + I_i) + \lambda(r' + I_i)$$

بنابراین

$$f(r + \lambda r') = ((r + \lambda r') + I_۱, (r + \lambda r') + I_۲, ..., (r + \lambda r') + I_n)$$

$$= ((r + I_۱) + \lambda(r' + I_۱), (r + I_۲) + \lambda(r' + I_۲), ..., (r + I_n) + \lambda(r' + I_n))$$

$$= (r + I_۱, r + I_۲, ..., r + I_n) + (\lambda(r' + I_۱), \lambda(r' + I_i), ..., \lambda(r' + I_n))$$

$$= (r + I_۱, r + I_۲, ..., r + I_n) + \lambda(r' + I_۱, r' + I_۲, ..., r' + I_n)$$

$$= f(r) + \lambda f(r')$$

بنابراین f یک $R-$همریختی است.

(۲) فرض می‌کنیم f یک به یک است، نشان می‌دهیم $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i = ۰$.
$x \in \bigcap_{i=۱}^{n} I_i$ را دلخواه در نظر می گیریم در این صورت به ازای هر $n \leq i \leq ۱$، $x \in I_i$ لذا $x + I_i = ۰ + I_i$.
در نتیجه

$$f(x) = (x + I_۱, x + I_۲, ..., x + I_n) = (۰ + I_۱, ۰ + I_i, ..., ۰ + I_n) = ۰_{R/I_۱ \bigoplus R/I_۲ \bigoplus ... \bigoplus R/I_n}$$

از طرفی f یک به یک است در نتیجه $x = ۰$. چون x عضو دلخواه $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i$ است بنابراین $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i = ۰$.

برعکس فرض می‌کنیم $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i = ۰$ می خواهیم نشان دهیم همریختی f یک به یک است.
فرض می‌کنیم $t \in R$ و $f(t) = ۰$ نشان می‌دهیم $t = ۰$.

$$۰ = f(t) = (t + I_۱, t + I_۲, ..., t + I_n)$$

یعنی به ازای هر $n \leq i \leq ۱$، $t \in I_i$. به عبارت دیگر $t \in \bigcap_{i=۱}^{n} I_i$، ولی بنا به فرض $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i = ۰$ بنابراین $t = ۰$ در نتیجه f یک به یک است.

(۳) ابتدا فرض می‌کنیم f پوشا است. در این صورت به ازای هر $n \leq i \leq ۱$، $x_i \in R$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_i) = (۰ + I_۱, ..., ۰ + I_{i-۱}, ۱ + I_i, ۰ + I_{i+۱}, ..., ۰ + I_n)$$

توجه می‌کنیم که به ازای هر $j \neq i$،

$$f(x_j) = (x_j + I_۱, ..., x_j + I_{i-۱}, x_j + I_i, x_j + I_{i+۱}, ..., x_j + I_n)$$

$$= (۰ + I_۱, ..., ۰ + I_{j-۱}, ۱ + I_j, ۰ + I_{j+۱}, ..., ۰ + I_n)$$

یعنی

$$x_j + I_i = \circ + I_i \quad \text{و} \quad x_j + I_j = ۱ + I_j.$$

در نتیجه $x_j \in I_i$ و $۱ - x_j \in I_j$. بنابراین $۱ = (۱ - x_j) + x_j \in I_j + I_i$. لذا

$$I_j + I_i = R.$$

یعنی I_i و I_j نسبت به هم متباین هستند.

برعکس فرض کنیم $I_۱, I_۲, ... I_n$ دو به دو متباین هستند. ابتدا ثابت می‌کنیم عنصری مانند $x_۱ \in R$ وجود دارد که

$$f(x_۱) = (۱ + I_۱, \circ + I_۲, ..., \circ + I_n)$$

چون به ازای هر $۲ \leq i \leq n$، $I_۱ + I_i = R$. بنابراین $x_i \in I_۱$ و $y_i \in I_i$ وجود دارد که

$$y_i + x_i = ۱ .$$

در نتیجه به ازای هر $۲ \leq i \leq n$،

$$y_i = ۱ - x_i .$$

با انتخاب

$$x_۱ = y_۲ y_۳ ... y_n = (۱ - x_۲)(۱ - x_۳)...(۱ - x_n) = ۱ - t$$

که $t \in I_۱$. و

$$x_۱ \in I_۲ I_۳ ... I_n$$

از آنجا که همواره به ازای هر $۲ \leq i \leq n$،

$$I_۲ I_۳ ... I_n \subseteq I_i .$$

در نتیجه به ازای هر $۲ \leq i \leq n$،

$$x_۱ \in I_i .$$

بنابراین

$$f(x_۱) = (x_۱ + I_۱, x_۱ + I_۲, ..., x_۱ + I_n)$$

$$= (x_۱ + I_۱, \circ + I_۲, ..., \circ + I_n)$$

به روش مشابه می توان نشان داد به ازای هر $۲ \leq j \leq n$، $x_j \in R$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_j) = (\circ + I_{\backslash}, ..., \circ + I_{j-\backslash}, \backslash + I_j, \circ + I_{j+\backslash}, ..., \circ + I_n)$$

قرار می‌دهیم

$$\delta_i = (\circ + I_{\backslash}, ..., \circ + I_{i-\backslash}, \backslash + I_i, \circ + I_{i+\backslash}, ..., \circ + I_n)$$

بنابراین به ازای هر $\omega \in \bigoplus_{i=۱}^{n} R/I_i$، $\omega = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \delta_i$. که $\lambda_i \in R$ لذا

$$f(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i x_i) = \omega$$

بنابراین f پوشا است. ♣

تعریف ۱.۱.۱۵. گوییم حلقه R در یک اتحاد چند جمله ای [۴] صدق می کند اگر برای عدد طبیعی n، چند جمله ای $f \in \mathbb{Z}[X_۱, ..., X_n]$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دنباله n تایی $r_۱, ..., r_n$ از اعضای حلقه R، $f(r_۱, ...r_n) = ۰$.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. گوییم R یک توسیع اساسی I است (یا به طور معادل I یک ایده‌آل اساسی حلقه R است) اگر هر ایده‌آل نا صفر دلخواه R با I اشتراک نا صفر داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم $\leqslant$ یک رابطه دوتایی روی مجموعه X باشد. برای $a, b \in X$، گوییم a با b رابطه دارد یا در ارتباط است اگر $b \leqslant a$ یا $a \leqslant b$. گوییم $(X, \leqslant)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است اگر به ازای هر $a, b, c \in X$ شرط های زیر برقرار باشند

(۱) $a \leqslant a$.

(۲) اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ آن‌گاه $a = b$.

(۳) اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ آن‌گاه $a \leqslant c$.

اگر $(X, \leqslant)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد، به طوری که هر دو عضو دلخواه آن در ارتباط باشند، آن‌گاه $(X, \leqslant)$ یک مجموعه کاملاً مرتب (به طور خطی مرتب[۵])نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۸. حلقه ای که تمام ایده‌آل هایش اول باشد را حلقه تماماً اول می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. حلقه ای که تمام ایده‌آل هایش خود توان باشد را حلقه تماماً خود توان [۶] می‌نامیم.

[۴] Polynomial identity

[۵] Liearl orderedy

[۶] Fully idempotent ring

قضیه ۲۰.۱.۱. *[5, Theorem 1.2] حلقه R یک حلقه تماماً اول است اگر و تنها اگر یک حلقه تماماً خودتوان و مجموعه تمام ایده‌آل های حلقه R یک مجموعه کاملاً مرتب باشد.*

برهان. فرض کنیم Rیک حلقه تماماً اول است اگر I یک ایده‌آل حلقه R باشد، آن‌گاه I^{2} یک ایده‌آل اول است. بنابراین $I \subseteq I^{2}$ در نتیجه $I = I^{2}$. اگر P و Q ایده‌آل های دلخواه حلقه R باشند در این صورت $PQ \subseteq P \cap Q$ چون $P \cap Q$ یک ایده‌آل اول است بنابراین

$$P \subseteq P \cap Q \text{ یا } Q \subseteq P \cap Q \,.$$

در نتیجه

$$P \subseteq Q \text{ یا } Q \subseteq P$$

برعکس فرض کنیم R یک حلقه تماماً خودتوان است و مجموعه ایده‌آل های حلقه R، مجموعه کاملاً مرتب باشد. فرض کنیم P یک ایده‌آل دلخواه از حلقه R است و I و J دو ایده‌آل از حلقه R هستند که $IJ \subseteq P$. چون مجموعه ایده‌آل های حلقه R، مجموعه کاملاً مرتب است، بنابراین

$$I \subseteq J \text{ یا } J \subseteq I.$$

فرض می‌کنیم $J \subseteq I$ آن‌گاه

$$I = I^{2} \subseteq IJ \subseteq P$$

در نتیجه P یک ایده‌آل اول است. ♣

لم ۲۱.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد که تمام ایده‌آل هایش اول است.آن‌گاه R یک میدان است.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم حلقه R تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد. فرض می‌کنیم M_{1} و M_{2} دو ایده‌آل ماکسیمال متمایز حلقه R هستند. بنا به فرض $M_{1} \cap M_{2}$ یک ایده‌آل اول است از طرفی می توان نوشت

$$M_{1} \cap M_{2} \subseteq M_{1} \cap M_{2}$$

و با توجه به لم (۹.۱.۱)

$$M_{1} \subseteq M_{1} \cap M_{2} \text{ یا } M_{2} \subseteq M_{1} \cap M_{2}$$

و چون M_{1} و M_{2} ایده‌آل های ماکسیمال هستند پس

$$M_{1} = M_{1} \cap M_{2} \text{ یا } M_{2} = M_{1} \cap M_{2} \,.$$

در این صورت $M_2 \subseteq M_1$ یا $M_1 \subseteq M_2$. با توجه به این که M_1 و M_2 هر دو ایده‌آل ماکسیمال هستند در نتیجه $M_1 = M_2$. بنابراین حلقه R تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

فرض می‌کنیم M تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه جابه‌جایی R است، نشان می‌دهیم حلقه R یکدار است.

چون M ایده‌آل ماکسیمال حلقه R است بنا به (۱.۱.۱) $x \in R \setminus M$ وجود دارد، حال ایده‌آل Rx را در نظر می گیریم توجه می‌کنیم که $x^2 \in Rx$. ولی $x^2 \notin M$.

فرض کنیم $x^2 \in M$. در این صورت ایده‌آل تولید شده توسط (x^2) مشمول در ایده‌آل M است. یعنی $(x^2) \subseteq M$. از طرفی

$$(x)(x) \subseteq (x^2) \subseteq M$$

چون بنا به فرض M یک ایده‌آل اول است، در نتیجه $(x) \subseteq M$. به عبارت دیگر $x \in (x) \subseteq M$. که این یک تناقض است.

بنابراین $Rx \nsubseteq M$. چون بنا به (۲۰.۱.۱) مجموعه ایده‌آل های حلقه R یک مجموعه کاملاً مرتب است و $Rx \nsubseteq M$ بنابراین $M \subsetneq Rx$. از طرفی M ایده‌آل ماکسیمال حلقه R است در نتیجه $R = Rx$.

از طرفی می دانیم $x \in R$. در نتیجه $r \in R$ وجود دارد به طوری که $x = rx$.

عضو دلخواه $y \in R$ را در نظر می گیریم چون $R = Rx$، بنابراین $y \in Rx$. یعنی $t \in R$ وجود دارد که $y = tx$.

لذا می توان نوشت

$$ry = rtx = trx = tx = y.$$

یعنی r عضو همانی چپ حلقه R است، و چون حلقه R جابه‌جایی است لزومی ندارد ضرب از راست بررسی شود در نتیجه r عضو همانی دو طرفه حلقه R است.

حال نشان می‌دهیم R یک میدان است.نشان می‌دهیم هر عضو غیر صفر حلقه R یکال است. چون تمام ایده‌آل های حلقه R اول هستند در نتیجه ۰ نیز یک ایده‌آل اول است بنابراین حلقه R حوزه صحیح است. فرض می‌کنیم $a \neq 0$ عضو دلخواه حلقه R باشد، ایده‌آل (a^2) را در نظر می گیریم.

چون حلقه R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است و $a^2 \in (a^2)$.

با فرض این که (a^2) یک ایده‌آل اول است، $a \in (a^2)$. بنابراین $s \in R$ وجود دارد که

$$a = sa^2$$

یعنی

$$a(1 - sa) = 0 \ .$$

چون R حوزه صحیح است و $a \neq 0$. بنابراین $1 - sa = 0$. در نتیجه

$$1 = sa \ .$$

یعنی عضو دلخواه a یکال است. بنابراین R میدان است. ♣

تعریف ۲۲.۱.۱. حلقه ای که تمام ایده‌آل هایش به جز صفر اول باشد را حلقه تقریباً تماماً اول [۷] می‌نامیم.

قضیه ۲۳.۱.۱. *[11, Theorem 2.1] فرض کنیم R یک حلقه است که مجموعه تمام ایده‌آل هایش کاملاً مرتب نیست. آن گاه R تقریباً تماماً اول است اگر و تنها اگر*

(۱) R یک حلقه تماماً خودتوان باشد که دارای دقیقاً دو ایده‌آل مینیمال است.

(۲) هر ایده‌آل مینیمال حلقه R مشمول در تمام ایده‌آل های غیر مینیمال حلقه R باشد.

(۳) مجموعه تمام ایده‌آل های غیر مینیمال حلقه R کاملاً مرتب باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. حلقه ای چون S مجهز به یک همریختی حلقه ای مانند

$$f : R \longrightarrow S$$

که به ازای هر $r \in R$ و $s \in S$ ضرب rs را به صورت $f(r)s$ تعریف می‌کنیم، را $R-$جبر می‌نامیم. توجه می‌کنیم که همریختی f را باید قسمتی از ساختار $R-$جبر S بدانیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. می‌گوییم A یک جبر ساده است هرگاه هیچ ایده‌آل سره دو طرفه نداشته باشد و

$$\{ab | a, b \in A\} \neq \{0\}$$

تعریف ۲۶.۱.۱. مرکز جبر A، مجموعه تمام اعضای x از A است که x با تمام اعضای A جابه‌جا می‌شود. یعنی

$$Z(A) = \{x \in A | \forall a \in A, ax = xa\}$$

تعریف ۲۷.۱.۱. یک جبر شرکت پذیر، یک حلقه شرکت پذیر همراه با ساختار مدولی روی حلقه جابه‌جایی R است.

تعریف ۲۸.۱.۱. A یک جبر شرکت پذیر با بعد[۸] متناهی روی میدان K است هرگاه A به عنوان $K-$مدول متناهی مولد باشد.

تعریف ۲۹.۱.۱. هرگاه A یک جبر ساده شرکت پذیر با بعد متناهی روی میدان K باشد به طوری که مرکز آن مساوی میدان K باشد. در این صورت A را یک جبر ساده مرکزی [۹] می‌گوییم.

تعریف ۳۰.۱.۱. حلقه A را کراندار راست [۱۰] می‌نامیم اگر هر ایده‌آل اساسی آن شامل یک ایده‌آل دو طرفه نا صفر باشد.

---

[۷] Almost fully prime

[۸] Dimensional

[۹] Central simple algebra

[۱۰] Right bonded

تعریف ۳۱.۱.۱. حلقه A تماماً کراندار راست[۱۱] است اگر نوتری [۱۲] باشد و به ازای هر ایده‌آل اول P از حلقه A، حلقه A/P کراندار راست باشد.

قضیه ۳۲.۱.۱. *[5, Theorem 3.3] حلقه تماماً اول که در قوانین اتحاد چند جمله ای صدق می‌کند، یک جبر ساده مرکزی با بعد متناهی است.*

قضیه ۳۳.۱.۱. *[5, Theorem 3.4] هر حلقه نوتری راست و تماماً اول و تماماً کراندار راست، یک حلقه آرتینی ساده[۱۳] است.*

تعریف ۳۴.۱.۱. ایده‌آل راست (چپ) I از حلقه R را نوع اول[۱۴] می‌نامیم اگر و تنها اگر $I \neq R$ و برای هر ایده‌آل راست (چپ) A و B، $AB \subseteq I$ آن‌گاه $A \subseteq I$ یا $B \subseteq I$.

قضیه ۳۵.۱.۱. *[7, Theorem 4.2] حلقه R ساده است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل راست حلقه نوع اول یا R باشد.*

تعریف ۳۶.۱.۱. زیر مدول سره N از $R-$مدول M را اولیه می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a \in M$ و $r \in R$، $ra \in N$. آن گاه $a \in N$ یا $r^n M \subseteq N$ که n، یک عدد طبیعی است.

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه است. زیر مدول سره N از $R-$مدول M را زیر مدول تحویل نا پذیر می‌نامیم هرگاه به ازای هر دو زیر مدول L و K از $R-$مدول M، اگر $N = L \cap K$ آن‌گاه $N = L$ یا $N = K$.

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و F نیز یک $R-$مدول است. به $R-$مدول F، $R-$مدول یکدست گوییم هرگاه به ازای هر دنباله دقیق [۱۵] از $R-$مدول ها و $R-$ همریختی ها مانند $N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ دنباله زیر دقیق باشد.

$$F \bigotimes_R N' \longrightarrow F \bigotimes_R N \longrightarrow F \bigotimes_R N''$$

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه است و F نیز یک $R-$مدول باشد. به $R-$مدول F، $R-$مدول یکدست صادق گوییم هرگاه به ازای هر دنباله دلخواه مانند دنباله $N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ از $R-$مدول ها و $R-$ همریختی ها دقیق باشد اگر و تنها اگر دنباله

$$F \bigotimes_R N' \longrightarrow F \bigotimes_R N \longrightarrow F \bigotimes_R N''$$

دقیق باشد.

---

[۱۱] Right fully bonded

[۱۲] Noetherian

[۱۳] Artinian

[۱۴] Prime type

[۱۵] Exact sequence

فصل ۲

حلقه هایی با ایده‌آل های تماماً ضعیفاً اول

در این فصل ابتدا به مفهوم ایده‌آل ضعیفاً اول می‌پردازیم. و سپس ساختار حلقه هایی را که تمام ایده‌آل های‌آن ها ضعیفاً اول است بررسی می‌کنیم. و چند مثال در راستای مطالب گفته شده ارائه می‌دهیم. سپس ساختار حلقه هایی را که تمام ایده‌آل های آن ها ضعیفاً اول است در صورت جابه‌جایی بودن حلقه بررسی می‌کنیم. و در آخر نیز حلقه هایی را که تمام ایده‌آل های راست آن ها ضعیفاً اول است مطالعه می‌کنیم. توجه می‌کنیم که در این فصل همه حلقه ها شرکت پذیر هستند و منظور از ایده‌آل همان ایده‌آل دو طرفه است.

۱.۲ تعریف و نتایج کلی

تعریف ۱.۱.۲. ایده‌آل سره I از حلقه R ضعیفاً اول نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو ایده‌آل J و K از حلقه R که $0 \neq JK \subseteq I$ آن‌گاه $J \subseteq I$ یا $K \subseteq I$.

قضیه ۲.۱.۲. *اگر P یک ایده‌آل ضعیفاً اول باشد ولی اول نباشد آن‌گاه $P^2 = 0$.*

برهان. چون P یک ایده‌آل ضعیفاً اول است پس به ازای هر دو ایده‌آل K و L از حلقه R که $KL \subseteq P$ و $KL \neq 0$ بنا به تعریف ایده‌آل ضعیفاً اول

$$K \subseteq P \text{ یا } L \subseteq P.$$

بنابراین ایده‌آل هایی مانند I و J وجود دارد به طوری که $I \nsubseteq P$ ، $J \nsubseteq P$ و $IJ \subseteq P = 0$ حال فرض می‌کنیم $P^2 \neq 0$ آن گاه

$$0 \neq P^2 \subseteq (I+P)(J+P) \subseteq P$$

با توجه به ضعیفاً اول بودن P،