بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

رساله جهت دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض-گرایش آنالیز

عنوان

بهترین نقاط تقریبی برای نگاشت‌های دوری

نگارش

موسی گابله

استاد راهنما

دکتر علی آبکار

استاد مشاور

دکتر عبدالرحمن رازانی

اردیبهشت ۱۳۹۱

من لم یشکر المخلوق ولم یشکر الخالق

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گذاردن نتوانند. خدای را جل جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید و سلام و درود بر محمد (ص) و خاندان پاک او.

تقدیم به:

روان پاک پدرم و مادرم

که از نگاهش صلابت

از رفتارش محبت

و از صبرش ایستادگی را آموختم

و همسرم، که وجودش شادی‌بخش و صفایش همواره مایه آرامش من است

و به دختر قشنگم، هلنا.

تقدیر و سپاس‌گزاری:

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر علی آبکار بخاطر راهنمایی های مؤثر و مفید و همین طور صبر و بردباری ایشان در طی این مسیر، کمال تشکر را دارم.

از آقای دکتر عبدالرحمان رازانی که زحمت مشاوره این پایان نامه را قبول کردند، سپاس‌گزارم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر سعید عباس‌بندی، جناب آقای دکتر عزیزاله عزیزی و جناب آقای دکتر علی فرج‌زاده که داوری این رساله و شرکت در جلسه دفاع را تقبل فرمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

چکیده

در این رساله به بررسی وجود و همگرایی بهترین نقاط تقریبی برای رده‌های مختلفی از نگاشت‌ها در فضاهای متریک و باناخ، با در نظر گرفتن خاصیت های هندسی مناسب روی فضاهای مورد بحث، می‌پردازیم. سپس با استفاده از این مطالب، به تحقیق پیرامون وجود جواب برای برخی مسائل کمینه سازی که مبتنی بر تخمین فاصله دو مجموعه می‌باشند می‌پردازیم. نتایج حاصله را می‌توان به‌عنوان تعمیم‌هایی از قضایای وجود و تقریب نقاط ثابت، که برای طیف گسترده‌ای از نگاشت‌ها در فضاهای متریک و باناخ بحث می‌شود، در نظر گرفت. کاربردهایی از این مباحث در نظریه توابع مختلط و همچنین در بحث وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرایط مرزی متناوب نیز ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی. نگاشت‌های انقباضی دوری مجانبی، نگاشت‌های غیردوری، بهترین نقطه تقریبی، نقطه ثابت، فضای به‌طور یکنواخت محدب، ساختار نرمال شبه مجاوری.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در سال ۲۰۰۳ کرک، سیریناواسان و ویرامانی تعمیمی از اصل انقباض باناخ برای نگاشت‌های دوری تعریف شده بر روی اجتماع دو مجموعه غیرتهی و بسته مانند A و B از فضای متریک کامل (X,d) ارائه شد. با توجه به نوع انقباض این نگاشت‌ها، نشان داده شد که $A\cap B$ غیرتهی بوده و نگاشت مورد نظر داری نقطه ثابت یکتا در $A\cap B$ می‌باشد.

در سال ۲۰۰۶ رده وسیع‌تری از نگاشت‌های دوری تحت عنوان نگاشت‌های انقباض دوری توسط الدرد و ویرامانی معرفی شد که در این نگاشت‌ها $A\cap B$ لزوماً غیرتهی نمی‌باشد. از این‌رو این نگاشت‌ها لزوماً دارای نقطه ثابت نمی‌باشند. لذا مفهوم دیگری تحت عنوان بهترین نقطه تقریبی برای نگاشت‌های انقباض دوری معرفی شد که با استفاده از این مفهوم فاصله بین دو مجموعه مورد نظر، تقریب زده می‌شود.

اولین بار وجود و همگرایی بهترین نقطه تقریبی برای نگاشت‌های دوری در فضاهای باناخ به‌طور یکنواخت محدب مورد بررسی قرار گرفت. سپس با ایده گرفتن از خواص هندسی مطلوب فضاهای باناخ به‌طور یکنواخت محدب، وجود و همگرایی بهترین نقطه تقریبی در فضاهای متریک نیز مطالعه شد.

در فصل اول این رساله برخی مفاهیم، تعاریف و قضایای مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم نگاشت‌های دوری را روی فضاهای متریک مرتب کامل در نظر گرفته و تعدادی قضیه نقطه ثابت برای این نگاشت‌ها اثبات می‌کنیم. در این راستا چندین قضیه مهم که در خصوص وجود نقطه ثابت برای خود نگاشت‌های تعریف شده بر فضاهای متریک مرتب می‌باشد را تعمیم می‌دهیم. سپس به بررسی وجود و همگرایی بهترین نقطه تقریبی برای نگاشت‌های از نوع انقباض دوری روی فضاهای متریک مرتب با شرط هندسی مناسبی تحت عنوان خاصیت UC می‌پردازیم.

در پایان فصل دوم با معرفی فضاهای مرتب محدب متری، تعمیمی از قضیه نقطه ثابت معروف بوید و ونگ را ارائه داده و به‌عنوان کاربردی از این قضیه به بررسی وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرایط مرزی متناوب می‌پردازیم.

در فصل سوم رده جدیدی از نگاشت‌ها به‌نام نگاشت‌های انقباض دوری مجانبی را معرفی می‌کنیم و وجود و همگرایی بهترین نقطه تقریبی برای این رده از نگاشت‌ها را مطالعه می‌کنیم. همچنین رده دیگری از نگاشت‌های دوری تحت عنوان نگاشت‌های انقباضی نقطه‌وار–مجانبی مجاوری را معرفی کرده و وجود، یکتایی و همگرایی بهترین نقطه تقریبی برای این نگاشت‌ها در فضاهای باناخ به‌طور یکنواخت محدب را نشان می‌دهیم. به‌علاوه، قضیه‌ای در باب وجود بهترین نقطه تقریبی در فضاهای باناخ بدون استفاده از خاصیت هندسی UC را برای نگاشت‌های انقباض دوری اثبات می‌کنیم. در پایان فصل سوم با در نظر گرفتن نگاشت‌های دوری روی فضاهای فرامتریک، قضیه دیگری به‌منظور نشان دادن وجود بهترین نقطه تقریبی اثبات می‌کنیم.

در بخش اول از فصل چهارم این رساله نگاشت‌های غیر دوری را جایگزین نگاشت‌های دوری کرده و به بررسی وجود جواب برای برخی مسائل کمینه‌سازی در فضاهای متریک و با استفاده از ویژگی هندسی دیگری به‌نام P– خاصیت می‌پردازیم. در بخش دوم و سوم این فصل غیر خودنگاشت‌های تعریف شده بر یک زیرمجموعه از فضای متریک (X,d) مانند A به‌توی زیرمجموعه دیگری مانند B را درنظر گرفته و وجود جواب یک مسأله کمینه‌سازی که معادل با وجود بهترین نقطه تقریبی برای این نگاشت‌ها می‌باشد را مطالعه می‌کنیم. لازم به ذکر است که غیر خودنگاشت‌های مورد بحث در این دو بخش از این فصل اعم از نگاشت‌های انبساطی، غیرانبساطی و انقباضی تعمیم یافته به مفهوم سوزوکی می‌باشند. در نهایت خاصیت هندسی جدیدی تحت عنوان ساختار شبه نرمال مجاوری را در فضاهای باناخ معرفی می‌کنیم و نتیجه جدیدی در خصوص وجود بهترین

نقاط تقریبی برای رده خاصی از نگاشت‌های دوری به‌نام نگاشت‌های غیرانبساطی نسبی که به مفهوم کانان نیز غیرانبساطی نسبی می‌باشند، به‌دست می‌آوریم.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز را بیان می کنیم.

۱.۱ پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. *فرض‌کنید X یک مجموعه و $T : X \to X$ یک خود نگاشت باشد. نقطه $x \in X$ را یک نقطه ثابت [۱] نگاشت T می‌گوییم هرگاه $T(x) = x$.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض‌کنید (X, d) یک فضای متریک و A یک زیرمجموعه غیرتهی از X باشد. نقطه $x^* \in A$ را بهترین تقریب‌گر [۲] نگاشت $T : A \to X$ می‌نامیم هرگاه*

$$d(x^*, Tx^*) = dist(Tx^*, A) =: \inf\{d(Tx^*, y) : y \in A\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. *فرض‌کنید (X, d) یک فضای متریک و (A, B) یک زوج غیرتهی از زیرمجموعه‌های X باشد. نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ را دوری [۳] می‌نامیم هرگاه $T(A) \subseteq B$ و $T(B) \subseteq A$. همچنین T را غیر دوری [۴] می‌گوییم هرگاه $T(A) \subseteq A$ و $T(B) \subseteq B$. بوضوح اگر $A = B$ آنگاه نگاشت‌های دوری و غیر دوری یکی می‌باشند.*

[۱] Fixed point
[۲] Best approximant
[۳] Cyclic
[۴] Non-cyclic

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A یک زیرمجموعه غیرتهی از X باشد. نگاشت $T:A\to X$ را

(آ) یک انقباض [۵] می‌نامیم هرگاه برای یک $\alpha\in(۰,۱)$ و برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم $d(Tx,Ty)\leq\alpha d(x,y)$.

(ب) انقباضی [۶] می‌نامیم هرگاه $d(Tx,Ty)<d(x,y)$, برای هر $x\neq y\in A$.

(ج) غیرانبساطی [۷] می‌گوییم هرگاه $d(Tx,Ty)\leq d(x,y)$ برای هر $x,y\in A$.

(د) انقباض کانان [۸] می‌گوییم چنان‌چه

$$d(Tx,Ty)\leq\alpha[d(x,Tx)+d(y,Ty)],$$

به ازای یک $\alpha\in(۰,\frac{۱}{۲})$ و برای هر $x,y\in A$.

(ه) غیرانبساطی کانان [۹] می‌نامیم هرگاه

$$d(Tx,Ty)\leq\frac{۱}{۲}[d(x,Tx)+d(y,Ty)],$$

برای هر $x,y\in A$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و (A,B) یک زوج غیرتهی از زیرمجموعه‌های X باشد. نگاشت $T:A\cup B\to A\cup B$ را یک انقباض دوری [۱۰] می‌گوییم هرگاه عدد $\alpha\in(۰,۱)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $(x,y)\in A\times B$

$$d(Tx,Ty)\leq\alpha d(x,y)+(۱-\alpha)dist(A,B).$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و (A,B) یک زوج غیرتهی از زیرمجموعه‌های

[۵] Contraction
[۶] Contractive
[۷] Non-expansive
[۸] Kannan contraction
[۹] Kannan non-expansive
[۱۰] Cyclic contraction

X باشد. نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ را غیرانبساطی نسبی [۱۱] می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $(x, y) \in A \times B$ داشته باشیم $d(Tx, Ty) \le d(x, y)$.

همان‌طورکه از تعریف ملاحظه می‌شود نگاشت‌های غیرانبساطی، غیرانبساطی نسبی می‌باشند اما عکس این مطلب درست نمی‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه و "$\preceq$" یک رابطه جزئی مرتب روی X باشد. دراینصورت $(X, \preceq)$ را یک مجموعه جزئی مرتب [۱۲] می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. فضای باناخ X را به‌طور یکنواخت محدب [۱۳] نامیم در صورتی‌که تابع اکیداً صعودی مانند $\delta : (۰, ۲] \to [۰, ۱]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x, y, p \in X$ ، $R > ۰$ و $r \in [۰, ۲R]$ داشته باشیم

$$\begin{cases} \|x - p\| \le R, \\ \|y - p\| \le R, \\ \|x - y\| \ge r. \end{cases} \Longrightarrow \|\frac{x + y}{۲} - p\| \le (۱ - \delta(\frac{r}{R})).$$

تعریف ۹.۱.۱. فضای باناخ X را اکیداً محدب [۱۴] نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و $\|x\| = \|y\| = ۱$، داشته باشیم

$$\|\lambda x + (۱ - \lambda)y\| < ۱, \quad \lambda \in (۰, ۱).$$

یادآوری می‌کنیم‌که هر فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب، اکیداً محدب می‌باشد. به‌علاوه، هر فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب، انعکاسی [۱۵] می‌باشد (رجوع شود به [؟]).

[۱۱] Relatively non-expansive
[۱۲] Partially ordered set
[۱۳] Uniformly convex
[۱۴] Stirctly convex
[۱۵] Reflexive

۲.۱ قضایای مقدماتی

اصل انقباض باناخ [۱۶] اساسی ترین و مهم ترین قضیه در نظریه نقطه ثابت می‌باشد که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۲.۱. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت انقباض باشد. در این‌صورت T دارای نقطه ثابت یکتایی مانند $x^* \in X$ می‌باشد. به‌علاوه، برای هر $x \in X$ دنباله تکراری $\{x_n\}$ که با $x_n =: T^n(x)$ تعریف می‌شود به x^* همگرا خواهد بود.*

اصل انقباض باناخ دارای تعمیم‌های مختلفی می‌باشد که اخیراً مورد مطالعه جمع کثیری از محققین قرار گرفته است.

یکی از توسیع‌های جالب اصل انقباض باناخ در سال ۲۰۰۳ ، توسط کرک [۱۷]، سریناواسان [۱۸] و ویرامانی [۱۹] به‌صورت زیر مطرح شد.

قضیه ۲.۲.۱. *([۳۰]). فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و (A, B) یک زوج غیرتهی از زیرمجموعه‌های بسته X باشد. گیریم $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت دوری باشد، یعنی به ازای یک $\alpha \in (0, 1)$ و برای هر $(x, y) \in A \times B$، داشته باشیم $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$. در این‌صورت $A \cap B$ غیرتهی است و T دارای نقطه ثابت یکتایی در $A \cap B$ خواهد بود.*

آنچه که جالب توجه می‌باشد این است که اگر در قضیه قبل $A \cap B = \emptyset$، آنگاه معادله نقطه ثابت $Tx = x$، لزوماً دارای جواب نخواهد بود. از این رو با مسأله کمینه سازی

$$\min_{x \in A \cup B} d(x, Tx), \qquad (۱.۲.۱)$$

[۱۶] Banach contraction principle
[۱۷] Kirk
[۱۸] Srinivasan
[۱۹] Veeramani

مواجه می‌شویم. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نقطه $p \in A \cup B$ یک جواب مسأله (۱.۲.۱) می‌باشد اگر و تنها اگر p یک بهترین نقطه تقریبی نگاشت T باشد. پیش از آن‌که به بررسی وجود و تقریب جواب مسأله (۱.۲.۱) بپردازیم، قضیه زیر منسوب به کی فن [۲۰] را بیان می‌نماییم که در واقع ایده اصلی نظریه بهترین نقطه تقریبی بوده و در نظریه تقریب کاربرد فراوانی دارد.

قضیه ۳.۲.۱. *([۳۳]). فرض کنید A یک زیرمجموعه غیرتهی، محدب و فشرده از فضای برداری نرم‌دار X باشد و $T : A \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. در این‌صورت نگاشت T دارای یک بهترین تقریب‌گر خواهد بود.*

قضیه بعد وجود و همگرایی بهترین نقاط تقریبی برای نگاشت‌های انقباض دوری در فضاهای باناخ به‌طور یکنواخت محدب را نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۲.۱. *([۲۰]). فرض کنید (A, B) یک زوج غیرتهی، بسته و محدب از فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب X باشد و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت انقباض دوری باشد. در این‌صورت T دارای بهترین نقطه تقریبی یکتا مانند p در A خواهد بود. به‌علاوه، اگر $x_0 \in A$ و قرار دهیم $x_{n+1} = Tx_n$ ، آنگاه دنباله $\{x_{2n}\}$ به p همگرا خواهد بود.*

شایان ذکر است که در قضیه اخیر، خاصیت ایده‌آل فضای به‌طور یکنواخت محدب X، نقش مهمی در روند اثبات قضیه ایفا می‌کند. این خاصیت هندسی، برگرفته شده از فضاهای باناخ به‌طور یکنواخت محدب، در فضاهای متریک به‌صورت زیر در می‌آید.

تعریف ۵.۲.۱. *([۴۸]). فرض کنید (A, B) یک زوج غیرتهی از زیرمجموعه‌های فضای متریک (X, d) باشد. گوییم زوج (A, B) دارای خاصیت UC می‌باشد در صورتی‌که شرط زیر برقرار باشد.*

[۲۰] Ky Fan

اگر $\{x_n\}$ و $\{z_n\}$ دنباله‌هایی در A باشند و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در B باشد به‌طوری‌که

$$\lim_n d(x_n, y_n) = dist(A, B), \quad \lim_n d(z_n, y_n) = dist(A, B).$$

آنگاه

$$\lim_n d(x_n, z_n) = ۰.$$

به‌عنوان مثال اگر (A, B) یک زوج غیرتهی در فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب X باشد، چنان‌که A محدب باشد آنگاه (A, B) دارای خاصیت *UC* خواهد بود ([۲۰]) .

مثال‌های دیگری از زوج هایی که دارای خاصیت *UC* می‌باشند را می‌توان در مرجع [۴۸] دید.

لم های بعد، از اهمیت ویژه‌ای در این رساله برخوردار می‌باشند.

لم ۶.۲.۱. *([۴۸]). فرض کنید (A, B) یک زوج غیرتهی از زیر مجموعه‌های فضای متریک (X, d) باشد که دارای خاصیت UC می‌باشد. گیریم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به‌ترتیب دنباله‌هایی در A و B باشند که در یکی از تساوی‌های*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} d(x_m, y_n) = dist(A, B),$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} d(x_m, y_n) = dist(A, B),$$

صدق می‌کند. در این‌صورت $\{x_n\}$ در A دنباله‌ای کوشی خواهد بود.

لم ۷.۲.۱. *([۴۸]). فرض کنید (A, B) یک زوج غیرتهی در فضای متریک (X, d)، با خاصیت UC باشد. گیریم $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت دوری باشد چنان‌که به ازای هر $x \in A \cup B$*

$$d(T^۲x, Tx) \leq d(x, Tx),$$

و به ازای هر $x \in A \cup B$ که $dist(A, B) < d(x, Tx)$،

$$d(T^۲x, Tx) < d(x, Tx).$$

در این‌صورت موارد زیر هم‌ارزند:

(آ) $p \in A$ بهترین نقطه تقریبی نگاشت T است.

(ب) p نقطه ثابت نگاشت $T^{2}|_{A}$ می‌باشد.

فصل ۲
بهترین نقاط تقریبی در فضاهای متریک مرتب

در این فصل نگاشت‌های دوری را روی فضاهای متریک مرتب کامل در نظرگرفته و تعدادی قضیه نقطه ثابت برای این نگاشت‌ها اثبات می‌کنیم. همچنین به بررسی وجود و همگرایی بهترین نقاط تقریبی در این فضاها با در نظرگرفتن خاصیت هندسی مناسبی می‌پردازیم. مباحث این فصل عمدتاً برگرفته از مقالات [۲، ۴، ۸] می‌باشند.

۱.۲ نگاشت‌های انقباض دوری در فضاهای متریک مرتب

در [۳۶] ، نیتو[۱] و ردریگوئز-لپز[۲] تعدادی قضیه نقطه ثابت در فضاهای متریک مرتب، به‌منظور بررسی وجود و یکتایی جواب برای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرایط مرزی متناوب و تنها با در نظرگرفتن شرط وجود یک جواب پایینی را اثبات کردند. در اینجا دو نتیجه اصلی مقاله [۳۶] را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. *اگر $(X, \preceq)$ یک مجموعه جزئی مرتب و $T : X \to X$ یک خود نگاشت باشد. در این‌صورت T را صعودی گوییم هرگاه :*

$$x, y \in X, x \preceq y \Rightarrow T(x) \preceq T(y).$$

[۱] Nieto
[۲] Rodriguez-Lopez

قضیه ۲.۱.۲. *فرض کنید $(X, \preceq)$ یک مجموعه جزئی مرتب باشد و فرض کنید متر d بر X موجود است چنان‌که (X, d) یک فضای متریک کامل می‌باشد. فرض کنید $T : X \to X$ یک نگاشت پیوسته و صعودی باشد و $\alpha \in [۰, ۱)$ موجود است به طوری‌که*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \ \forall x \succeq y.$$

اگر $x_۰ \in X$ موجود باشد که $x_۰ \preceq T(x_۰)$ آنگاه T دارای یک نقطه ثابت خواهد بود.

قضیه بعد نشان می‌دهد که می‌توان شرط پیوستگی نگاشت T در قضیه قبل را با شرط دیگری جایگزین کرد.

قضیه ۳.۱.۲. *فرض کنید $(X, \preceq)$ یک مجموعه جزئی مرتب باشد و فرض کنید که متر d بر X موجود است چنان‌که (X, d) یک فضای متریک کامل است. گیریم X در شرط زیرین صدق کند:*

$$\{x_n\} \uparrow x \in X \Longrightarrow x_n \preceq x, \forall n. \qquad (۱.۱.۲)$$

که در آن "$\uparrow$" ، نمایانگر همگرایی یکنوا می‌باشد. فرض کنید $T : X \to X$ یک نگاشت صعودی باشد و $\alpha \in [۰, ۱)$ موجود است به‌طوری‌که

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \ \forall x \succeq y.$$

اگر $x_۰ \in X$ موجود باشد که $x_۰ \preceq T(x_۰)$، آنگاه T دارای یک نقطه ثابت خواهد بود.

تحت شرایط مناسب، می‌توان دید که نقطه ثابت پیدا شده در قضیه‌های ۲.۱.۲ و ۳.۱.۲ ، یکتا می‌باشد (قضیه ۲.۳ از مقاله [۳۶] را ببینید). هدف اصلی در این بخش تعمیم قضایای ۲.۱.۲ و ۳.۱.۲ به نگاشت‌های دوری و بررسی وجود و همگرایی نقطه ثابت و همین‌طور بهترین نقاط تقریبی برای این نگاشت‌ها می باشد. برای این‌منظور ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم که نقش مهمی در بحث ما ایفا می‌کند.

لم ۱.۱.۲ *فرض کنید (A,B) یک زوج غیرتهی از زیرمجموعه‌های فضای متریک (X,d) باشد چنان‌که "$\preceq$" یک رابطه جزئی مرتب روی A است. فرض کنید $T: A\cup B \to A\cup B$ یک نگاشت دوری باشد به‌طوری‌که $T^{۲}$ بر A صعودی و $\alpha \in (۰,۱)$ موجود است که برای هر $(x,\acute{x}) \in A\times A$ با $x \preceq \acute{x}$،*

$$d(T\acute{x}, T^{۲}x) \leq \alpha d(\acute{x}, Tx) + (۱-\alpha)dist(A,B).$$

اگر $x_۰ \in A$ موجود باشد که $x_۰ \preceq T^{۲}x_۰$، و تعریف کنیم $x_{n+۱} := Tx_n$، آنگاه $d(x_n, x_{n+۱}) \to dist(A,B)$.

برهان. چون $x_۰ \preceq T^{۲}x_۰$ و $T^{۲}$ بر A صعودی است، پس

$$x_۰ \preceq T^{۲}x_۰ \preceq \cdots \preceq T^{۲n}x_۰ \preceq \cdots.$$

قرار دهید $r_n = d(x_n, x_{n+۱})$. در این‌صورت

$$r_{۲n} = d(x_{۲n}, x_{۲n+۱}) = d(T^{۲n}x_۰, T^{۲n+۱}x_۰)$$

$$= d(T(T^{۲n}x_۰), T^{۲}(T^{۲n-۲}x_۰)) \leq \alpha d(T^{۲n}x_۰, T^{۲n-۱}x_۰) + (۱-\alpha)dist(A,B)$$

$$= \alpha d(T(T^{۲n-۲}x_۰), T^{۲}(T^{۲n-۲}x_۰)) + (۱-\alpha)dist(A,B)$$

$$\leq \alpha[\alpha d(T^{۲n-۲}x_۰, T^{۲n-۱}x_۰) + (۱-\alpha)dist(A,B)] + (۱-\alpha)dist(A,B)$$

$$= \alpha^{۲}d(T^{۲n-۲}x_۰, T^{۲n-۱}x_۰) + (۱-\alpha^{۲})dist(A,B).$$

اکنون با استفاده از استقراء ریاضی خواهیم داشت

$$r_{۲n} \leq \alpha^{۲n}d(x_۰, Tx_۰) + (۱-\alpha^{۲n})dist(A,B).$$