دانشگاه تهران

دانشکده علوم

پایان نامه

برای دریافت درجه فوق لیسانس ریاضی

موضوع

مجموعه های برل ــ نظریه اندازه

براهنمائی

استاد ارجمند جناب آقای دکتر وحدتی

نگارش :

محمد مهدی آیت الله زاده شیرازی

سال تحصیلی ۴۸ــ۴۷

۱۰۰۵۸

تقدیم بـــــه :

استاد ارجمند جناب آقای دکتر وحدتی

۱۰۰۵۸

با اقرار بعدم توانائیم در جبران زحمات استادان
گرانمایه ، این مجموعه رابحضورشان تقدیم میکنم
و بدین وسیله ازتمام استادان گرانقدر و بخصوص
جناب آقای دکتر وحدتی که در انجام این کار از بذل
هرگونه لطفی دریغ نفرموده اند نهایت تشکرراد ارم .

محمد مهدی آیت الله زاده شیرازی
خرداد ماه ۱۳۴۸

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

پیش گفتـــار

تئوری اندازه در سال ۱۸۸۲ توسط Hankel بایک تئوری مقدماتی موسوم به تئوری Content شروع شد ، سپس Harnak و Contors در سالهـــای ۱۸۸۴ — ۱۸۸۵ مقالاتی برای تکمیل تئوری Content نوشتند ولی درابتدا هدف از پایه ریزی تئوری Content این بود که تعمیمی ازمفهوم طول ، سطح یا حجم شده باشد . بعدها معلوم شد این تئوری برای مجموعه های کلی خواص معمولی طول یـــا سطح ویاحجم را نمیتواند توضیح دهد . مثلاً Content اجتماع دومجموعه جدا از هم بطورکلی مساوی بامجموع دوکانتنت نیست وازآنجائیکه هرتئوری ریاضی طبیعتاً نیاز به تعمیم دارد لذا میبایستی تئوری کانتنت را بصورت جامعتری درمیآوردند این کاررا Borel و Lebesque درمقالات خود درسالهای ۱۸۹۸ و ۱۹۰۴ پایه ریزی کردند وتئوری جامعی موسوم به تئوری اندازه Measure Theory بوجود آمد . بورل دربحث راجع به تئوری اندازه اثبات کرد که مجموعه هائی که بنام خود موسوم شده اند اندازه پذیر هستند هدف ازنوشتن این رساله اینستکه همین قضیه پس ازتعریف مجموعه های بورل اثبات کنیم ولی ما سیر تاریخی تکامل تئوری اندازه را درنظرنخواهیم گرفت بلکه ازتعریف مجموعه های بورل شروع میکنیم وتابع اندازه را روی یک فضای متریک دلخواه تعریف میکنیم وآنگاه قضیه مورد نظررا ثابت میکنیم ، درضمن قبل ازتعریف مجموعه هـــای بورل مختصری بنظریه مجموعه ها می پردازیم :

۱ ـ نظریه مجموعه ها

چون مطالعه قسمتهائی ازریاضیات بنحو کلی وتعمیم یافته ای می باید باتعاریف وقضایای نظریه مجموعه ها توأم گردد لذا این فصل را بدان تخصیص میدهیم

تعریف : اگر Π_n دنباله هائی ازمجموعه ها باشند درآنصورت اجتماع وتقاطع را بقرار ذیل برای آنها تعریف میکنیم:

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}\Pi_n = \left\{ \alpha \mid \alpha \in \Pi_n \quad \text{برای بعضی} \quad n \geq k \right\}$$

$$\bigcap_{n=k}^{\infty}\Pi_n \quad \left\{ \alpha \mid \alpha \in \Pi_n \quad \text{برای تمام} \quad n \geq k \right\}$$

اجتماع دنباله های مجموعه های ازهم جدا نقش اساسی درنظریه اندازه ایفامینماید بهمین سبب قضیه ذیل را بیان میکنیم:

قضیه ۱ ـ ۱ ـ اگر Π_n دنباله دلخواه ازمجموعه ها باشد درآنصورت یک دنباله Δ_n ازمجموعه های ازهم جدا وجود دارد بطوریکه

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\Pi_n = \bigcup_{n=1}\Delta_n$$

بویژه انتخاب برای $n>1$

$$\Delta_n = \Pi_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}\Pi_k$$

باشد

اثبات :

نحوه انتخاب بسادگی نشان میدهد که تمام Δ_w ها ازهم جدا باشند

اکنون فرض میکنیم که $\alpha \in \bigcup_{w=1}^{\infty} \Gamma_w$ باشد پس برای بعضی ازمقادیر w خواهیم داشت $\alpha \in \Gamma_w$ باشد ، فرض میکنیم که کوچکترین آنها عدد صحیح w_0 باشد بطوریکه : $\alpha \in \Gamma_{w_0}$ باشد . ازآن رو طبق تعریف دنباله نتیجه میشود :

$$\alpha \in \Delta_{w_0} \subset \bigcup_{w=1}^{\infty} \Delta_w$$

و بدین ترتیب خواهیم داشت :

$$\bigcup_{w=1}^{\infty} \Gamma_w \subset \bigcup_{w=1}^{\infty} \Delta_w$$

درهرصورت برای بعضی ازمقادیر w که $\alpha \in \Delta_w$ است خواهیم داشت :

$$\bigcup_{w=1}^{\infty} \Gamma_w \supset \bigcup_{w=1}^{\infty} \Delta_w$$

لذا شرط تساوی ثابت گردید .

حد بالا وحد پائین :

فرض میکنیم که Γ یک دنباله ای ازمجموعه ها باشد عبارتنهائی که بقرارزیر تعریف میگردند بترتیب موسوم اند به حد بالا وحد پائین دنباله .

$$\overline{\lim_{n}}\,\Gamma_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\Gamma_n$$

$$\underline{\lim_{n}}\,\Gamma_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\Gamma_n$$

تعریف همگرائی دنباله :

یک دنباله ازمجموعه هارا همگرا گویند درصورتیکه داشته باشیم :

$$\overline{\lim_{n}}\,\Gamma_n=\underline{\lim_{n}}\,\Gamma_n$$

وازآنجائیکه یک دنباله همگرا مجموعه ایست که دارای $\overline{\lim_{n}}\,\Gamma_n$ و $\underline{\lim_{n}}\,\Gamma_n$ باشد آن را بامظهر $\lim_{n}\Gamma_n$ نویسند .

دنباله یکنوا :

یک دنباله ازمجموعه هارا یکنوا گویند درصورتیکه یاصعودی ویا نزولی باشند .

قضیه ۲ ــ۱ : هر دنباله ای ازمجموعه های یکنوا همگرا میباشد .

اثبات : فرض میکنیم که Γ یک دنباله صعودی باشد درآنصورت برای هر k خواهیم داشت :

$$\bigcap_{n=k}^{\infty}\Gamma_n=\Gamma_k$$

وبنابراین $\underline{\lim_{n}}\,\Gamma_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$ میباشد که درهرصورت برای هردنباله صعودی عبارت $\bigcup_{n=k}^{\infty}\Gamma_n$ مستقل از k میباشد .

•

لذا ممکن است که همیشه $k=1$ را انتخاب نمود ولذا خواهیم داشت:

$$\overline{\lim_{n}}\,\Gamma_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n=\underline{\lim_{n}}\,\Gamma_n$$

درحالت نزولی نیز بهمین روش اثبات میشود و درآنصورت نتیجه ایکه بدست میآید

عبارت خواهد بود از:

$$\lim_{n}\Gamma_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$$

۲ ــ عدد کاردینال یك مجموعه

عدد کاردینال یك مجموعه اساسا توصیفی ازشماره نقاط درمجموعه است. این تعریف برای مجموعه هائی که دارای بی نهایت نقطه باشد بنظر صحیح نمیباشد. ولی مسلما اگر یك نقش یك بیك بیان یك مجموعه روی مجموعه دیگرباشد معقول است ومیتوان گفت این دومجموعه شامل شماره نقاط یکسان میباشند. بستگی $\backsim$ (هم ارزی) را میان دومجموعه بقرارذیل تعریف میکنیم:

میگوئیم $\Delta \backsim \Gamma$ است چنانچه وفقط چنانچه داشته باشیم، یك نقش یك بیك میان Γ روی Δ . واضح است که این بستگی دارای خواص زیرمیباشد:

E_1 ،خاصیت باز تابی یعنی $\Gamma \backsim \Gamma$

E_2 : خاصیت تقارن که اگر $\Delta \sim \Gamma$ باشد رابطه $\Gamma \sim \Delta$ درست میباشد

E_3 : خاصیت سرایت پذیری (انتقال) ممکن است که اگر $\Delta \sim \Xi$ و $\Gamma \sim \Delta$ باشد نتیجه میگیریم که $\Gamma \sim \Xi$ برقرار میباشد .

خواص فوق یک بستگی هم ارزی را ایجاد مینمایند وهرگاه Γ مجموعه‌ای باشد که نسبت $\sim$ در آن بکار رود ، در اینصورت $\{\Delta \mid \Delta \sim \Gamma\}$ کلاس هم ارزی متناظر Γ خواهد بود .

یک عدد کاردینال بعنوان یک کلاس هم ارزی ازمجموعه های اصلی تعریف میشود که با بستگی هم ارزی $\sim$ همانطور که فوقا برحسب نقشهای یک بیک تعریف گردید بیان میشود . برای یک فرد مبتدی توجه اینکه یک کلاس هم ارزی با یکی ازاعضاء معین میشود درک آن مشکل خواهد بود . ازآنرو بهترین روش توصیف یک عدد کاردینال با یک مجموعه مشخص میگردد . هرمجموعه ای که با یک گسترش یک بیک بمجموعه دیگری متناظر گردد دارای همان کاردینال خواهد بود .

بعضی ازکاردینالها نشانه های عمومی بآنها نسبت داده شده است. مثلا

۱ ـ کاردینال Φ صفراست.

۲ ـ کاردینال مجموعه ای ازاعداد صحیح ۲۱ . . . ۷۷ ، ۲۰ و ۱ عدد است.

۳ ـ کاردینال مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت $\aleph_0$ است.

٤ ـ کاردینال مجموعه تمام اعداد حقیقی C است.

مجموعه ایکه کارد ینال صفر ویایك عدد صحیح مثبت باشد موسوم است بیك مجموعه محدود وکارد ینال این چنین مجموعه ها محدود میباشد . سایـــر مجموعه های دیگررا به مجموعه های غیرمحدود (بینهایتم) گویند وکارد ینـــال یك چنین مجموعه هائی موسوم است به کارد ینال بینهایت (Transfinite)

یك ترتیب واضح ازکارد ینال محدود بابیان اینکه کارد ینال مجموعه محدود Γ کمتراز مجموعه محدود Δ باشد تعریف میشود درصورتیکه یك نقش یك بیك Γ روی زیرمجموعه خاصی از Δ وجود داشته باشد . درهرصورت این موضوع بــــرای کارد ینالهای بی نهایت صدق نمیکند . مثلا هریك ازتناظرهای $w \longleftrightarrow w+1$

$w \longleftrightarrow 2w \qquad w \longleftrightarrow w^2$

مجموعه تمام اعداد صحیح ومثبت را روی یك زیرمجموعه خاص ازخود نقش مینمایـد باین ترتیب تعریف فوق بیان میکند که : $\aleph_0 < \aleph_0$

تعریف سازگاری درمورد $<$ جهت کارد ینال ها کلی بیان نمود کــــه کارد ینال Γ کمتراز Δ نمیباشد . درصورتیکه یك نقش یك بیك از Γ روی بعضی از زیر مجموعه های خاص Δ وجود داشته باشد ویك چنین نقش از Γ روی هرنقش از زیر مجموعه از Γ است.

مجموعه ای که محدود یاکه دارای کارد ینال $\aleph_0$ باشد موسوم است بیـــك

مجموعه شماره پذیر، سایر مجموعه ها را مجموعه های شماره ناپذیر گویند .

واضح است که اگر Γ شماره پذیر باشد هرزیر مجموعه ای ازآن شماره پذیر خواهد بود .

قضیه ۱ـ۲ : هرمجموعه نامحدودی دارای یک زیرمجموعه باکاردینال $\aleph_0$ میباشد

اثبات :

فرض کنیم که Γ یک مجموعه نامحدودی باشد که α_1 عضو دلخواهی ازآن باشد وفرض کنیم که برای هرعدد صحیح ومثبت w درمجموعه α_w باشد هرآینه عبارت :

$$\Gamma - \left\{ \alpha_k \mid k = 1, 2, \ldots w-1 \right\}$$

تهی باشد نتیجه خواهیم گرفت که Γ یک مجموعه محدود خواهد بود

بدین ترتیب بابکاربردن اصل انتخاب زیرمجموعه

$$\left\{ \alpha_w \mid w = 1, 2, \ldots \right\} = \Gamma_i \subset \Gamma$$

را خواهیم داشت. واضح است که اگر $w \neq w$ باشد $\alpha_w \neq \alpha_w$ است نشانه های زیر یک نقش بیک بیک از Γ_0 را روی مجموعه اعداد صحیح w را حاکی است.

فرع ۱ـ۱ـ۲ هرمجموعه نامحدود میتواند نقش یک بیک روی یک زیرمجموعه خاصی ازخود باشد .

اثبات :

فرض کنیم که Γ یک مجموعه نامحدودی باشد و Δ یک زیرمجموعه ای از Γ باشد که دارای کاردینال $\aleph_0$ است که نقش مینماید هرنقطه از $\Gamma - \Delta$ را روی Γ و متناظر $a_n \longleftrightarrow a_w$ را برقرار مینماید یعنی با نوشتن $\Delta = \{a_w \mid w = 1, 2, \ldots\}$ که نقش مینماید Γ ، روی زیرمجموعه ای با حذف نقطه α_1 .

مسئله کانتور :

مسئله د روجود ویاعدم وجود کاردینال میان $\aleph_0$ ، C موجب مسئله حل نشده ای گردیده است که بنام مسئله کانتور موسوم است. توصیف کاردینالهای بزرگتراز C آسان است یعنی ممکن است کاردینال بزرگتر ازهرعدد داده شده‌ای توصیف نمود .

تعریف :

فضای Ω موسوم است بفضای متریك مشروط به اینکه روی مجموعه ای از زوجهای مرتب (x, y) ازنقاط Ω که همه جا محدود باشد تابع حقیقی ρ دراصول زیرصدق کند .

S_1 : برای هر $x \in \Omega$ داشته باشیم: $\rho(x, x) = 0$

S_3 : اگر $x \in \Omega$ ، $y \in \Omega$ ، $z \in \Omega$ نتیجه شود :

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(z,x) + \rho(z,y)$$

تابع ρ نامیده میشود به تابع فاصله (اندازه)

اصل S_3 موسوم است به اصل مثلث درصورتیکه Ω صفحه باشد و $\rho(x,y)$ فاصله معمولی میان x ، y را بیان میکند ازآنرو S_3 یك ضلع مثلث کوچکتر یا برابر مجموع دوضلع دیگر میباشد .

ساده ترین نمونه های فضای متریك دستگاه عدد حقیقی است که بوسیله $\rho(x,y)=|x-y|$ تعریف میشود . درپایان این تعریف قضیه مهمی که مورد لزوم است ذکر مینمائیم که ازاصول فوق استنتاج میگردد .

قضیه ۳ ـ ۲ :

اگر Ω یك فضای متریك باشد وهرآینه $x \in \Omega$ و $y \in \Omega$ (خواهیم داشت)

۳ ـ ۱ : $\rho(x,y) \geqslant 0$

۳ ـ ۲ : $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

اثبات : قرار میدهیم $y = x$ دراصل مثلث دراین صورت از S_1 نتیجه خواهیم گرفت $0 \leqslant 2\rho(z,x)$ لذا ۱ ـ ۳ ثابت میگردد .

برای اثبات ۲ ـ ۳ قرار میدهیم $z = y$ را در S_3 ومجددا S_1

یك جمله صفر خواهیم داشت که $\rho(x,y) < \rho(y,x)$ برای هر (x,y) برقرار میباشد ،لذا میتوانیم آنهارا تغییر دهیم و بنابراین تا برابر واژون رابدست آوریم و ۲ ـ۳ ثابت میگردد .

ممکن است که واژون S_1 برقرار نباشد یعنی ممکن است که داشته باشیم $\rho(x,y)=0$ درصورتیکه $x \neq y$ باشد درمواردی که فاصله میان نقاط (x_1, x_2) و (y_1, y_2) صفحه را با $|x_1 - y_1|$ نشان میدهند

البته این مثال نسبتا ساختگی میباشد ولیکن منظور را جهت یك نقطه تأمین مینماید این قبیل پدیده ها درفضای متریك درتئوری اندازه وتئوری انتگراسیون حائز اهمیت میباشد ،بسیاری ازمباحث را ساده خواهد نمود .

فاصله میان دومجموعه وفاصله میان یك نقطه ویك مجموعه

از تابع ρ که فاصله میان نقاط را تعریف میکند میتوانیم فاصله میان یك نقطه ویك مجموعه و فاصله میان دومجموعه را تعریف کنیم ؛

$$\rho(x,A) = \inf\left\{ \rho(x,y) \mid y \in A \right\}$$

$$\rho(A,B) = \inf\left\{ \rho(x,y) \mid x \in A, y \in B \right\}$$

ممکن است که برای یك زوج از (x,y) مقادیر خاصی موجود باشد یانباشد