بسم الله الرحمن الرحيم

دانشـــــگاه پیام نور – مرکز تبـــــریز

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

° گرایش آنالیز عددی

عنوان پایان نامه:

مقایسهٔ روش تکراری ژاکوبی با برخی روشهای تکراری دیگر

پایان نامه:

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ آنالیز عددی

مؤلف :

احمد محبوبی ملالی

استاد راهنما:

دکتر هاشم صابری نجفی

بهمن ۱۳۸۵

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

باسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: مقایسه روش تکراری ژاکوبی با برخی روش های تکراری دیگر.

که توسط احمد محبوبی ملالی **تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأئید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۱/۱۵ **نمره :** ۱۸ هیجده **درجه ارزشیابی:** عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر هاشم صابری نجفی	استاد راهنما	دانشیار	
۲- --	استاد راهنمای همکار یا مشاور	--	
۳- دکتر میرکمال میرنیا	استاد ممتحن (داور)	دانشیار	
۴- دکتر مهدی صحت خواه	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

(نمونه تصویب نامه پایان نامه)

سازمان مرکزی، تهران ۱۹۵۶۹ ابتدای جاده لشکرک - صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تلفن ۰۲۱)۲۰۶۰۰۶۹ ،۰۲۱)۲۰۰۱۵۱۱ ،۰۲۱)۲۰۰۱۱
پست الکترونیک: Info@pnu.ac.ir نشانی الکترونیک: Http://www.pnu.ac.ir

تقدیم به پدرومادر عزیزم

اولین معلمان زندگی ام

آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان

سرمایهٔ جاویدانی زندگی ام بوده اند.

همچنین تقدیم می دارم به همسر عزیزم که مشوق بنده بوده اند.

تقدیر و تشکر:

سپاس ایزد یکتا را که بار دیگر مرا مورد لطف خویش قرار داد و موهبتی بر من ارزانی فرمود و من همچون همیشه در سپاسگزاری ناتوانم.

با نهایت تشکر و امتنان از جناب آقای دکتر صابری که بعنوان استاد راهنما در انتخاب منابع و در تمام مدت تهیه و تنظیم این پایاننامه اینجانب را مورد لطف فراوان و راهنمایی خود قرار داده اند.

همچنین شایسته است از جناب آقای دکترصحت خواه، مدیرمحترم گروه ریاضـــــی و جناب آقای دکترمیرنیا که این پایاننامه را مورد نقد و بررسی قرار دادند تشکر نمایم. همچنـــین از خانم سیار مسئول آموزش که زحـــــمت های فراوان ما را تحمل نمودند تشکر می‌نمایم.

فهرست مندرجات

نام خانوادگی دانشجو : محبوبی ملالی **نام :** احمد

عنوان پایان نامه : مقایسه روش تکراری ژاکوبی با برخی روشهای تکراری دیگر

استاد راهنما : دکتر هاشم صابری نجفی

استاد مشاور : ------------------

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی کاربردی **گرایش :** آنالیز عددی

دانشگاه : پیام نور

دانشکده : تبریز **تاریخ فارغ التحصیلی : ۸۵/۱۱/۱۵** **تعداد صفحه : ۹۸**

چکیده فارسی :

در این پایان نامه روش تکراری ژاکوبی با روش تکراری MPSD و برخی دیگر از روشهای تکراری مقایسه شده است. از این روشها برای حل دستگاههای خطی نامنفرد استفاده می گردد. بخصوص نشان داده شده است که شعاع طیفی روش تکراری ژاکوبی از شعاع طیفی ماتریس های روشهای تکراری دیگر کمتر است.

کلید واژه : روش تکراری ژاکوبی ، روش تکراری MPSD، شعاع های طیفی

مقدمه :

هدف حل دستگاههای معادلات خطی با روشهای تکراری است که اغلب از معادلات دیفرانسیل جزئی بدست می‌آیند و ماتریس ضرایب آنها تنک می باشد. یکی از روشهای تکراری روش ژاکوبی می باشد که در این روش در حالت خاص و با پیش فرضهای داده شده پارامترهایی بنام ω_1، ω_2 و τ با شرایط $0 \le \omega_i \le \tau \le 1$، $i = 1,2$ دخالت دارد که این شرایط به MPSD معروف است.

در این پایاننامه ابتدا روش تـــکراری ژاکوبی که موضـوع اصلی پایاننامه است و سپس روشهای گاوس- سیدل و در نهایت SOR شرح داده می شود.

روشهای تکراری از مناسب ترین روشها برای حل دستگاههای معادلات خطی با ابعاد بزرگ و با ماتریس تنک می‌باشند از آنجا که در مسائل کاربردی فیزیک و مهندسی و برخی علوم کاربردی دیگر با چنین دستگاههایی مواجه هستیم، لذا روشهای تکراری همواره مورد توجه ریاضیات محاسباتی بوده است و پیدا کردن الگوریتم های مناسب جهت حل این نوع دستگاهها از کارهای مهم محققین ریاضیات محاسباتی می باشد.

فصل اول

مفاهیم و قضایای پایه ای

۱-۱ مفاهیم و تعاریف پایه ای:

تعریف ۱-۱-۱ : مجموع عناصر قطری ماتریس مربع A را اثر نامیده و با $tr(A)$ نشان می دهند. به عبارت دیگر

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

تعریف ۱-۱-۲: بردار سطری وبردار ستونی

اگر ماتریس A تنها شامل یک سطر باشد آنرا بردار سطری گویند و به شکل $X=[x_1,\ldots,x_n]$ نمایش می دهند و

اگر ماتریس A دارای یک ستون باشد آنرا بردار ستونی گویند و به شکل $Y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}$ نشان می دهند.

تعریف ۱-۱-۳: ترانهاده یک ماتریس

هرگاه سطر ها و ستونهای یک ماتریس $m\times n$ مانند A با یکدیگر جابجا شوند ماتریـــــسی با ابعاد $n\times m$ حاصل می‌شود که آنرا ترانهاده A نامیده و با A^t نشان می دهند:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\rightarrow A^t=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2}\\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

۱-۲: مقدارویژه و بردار ویژه

تعریف ۱-۲-۱ : عدد $\lambda\in C$ یک مقدار ویژه ماتریس A نامیده می شود هرگاه بردار $x\neq 0$ یافت شود بطوریکه $Ax=\lambda x$. بردار x بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ نامیده می شود. مجمـوعه همه مقادیر ویژه A طیف A نامیده می‌شود و با نماد $\Lambda(A)$ نشان داده می شود.

بااستفاده از تعریف ۱-۲-۱ داریم:

$$Ax=\lambda x\rightarrow(A-\lambda I)x=0, x\neq 0$$
$$\det(A-\lambda I)=0\rightarrow(-1)^n\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n=0$$

و یا می توان نوشت:

$$(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{\sigma_1}(\lambda-\lambda_2)^{\sigma_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{\sigma_k}=0,\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k=n$$

σ_i را مرتبه تکرار جبری مقدار ویژه λ_i می نامند.

حال فرض کنیم $\rho(\lambda)=n-rank(A-\lambda I)$ که $\rho(\lambda_i)$ مرتبه تکرار هندسی مقدار ویژه λ_i یعنی تعداد بردار های ویژه مستقل خطی وابسته به λ_i می باشد.

قضیه ۱-۲-۱ : با مفروضات بالا داریم $1\leq\rho(\lambda_i)\leq\sigma(\lambda_i)$.

برهان: به [۱۴] مراجعه شود.

۱-۳: ماتریسهای خاص

۱-۳-۱: ماتریس صفر: ماتریسی که تمام عناصر آن صفر باشد را ماتریس صفر گویند.

$$A=0\Leftrightarrow a_{ij}=0\ ,\ \ i=1,\ldots,m\ \ ,\ j=1,\ldots,n$$

مثال ۱-۳-۱: ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ یک ماتریس صفرازمرتبهٔ ۲×۳ می باشد.

۱-۳- ۲ماتریس متقارن: ماتریس مربع A را متقارن گویند، هرگاه $A=A^t$.

مثال ۱-۳-۲: ماتریس مقابل یک ماتریس متقارن از مرتبه ۳ است.

$$A=\begin{bmatrix}11&12&-15\\12&8&5\\-15&5&6\end{bmatrix}$$

۱-۳-۳ ماتریس قطری: ماتریس مربع A از مرتبه n را قطری گویند، هرگاه عناصر غیر قطری آن صفر باشد. به عبارت دیگر A یک ماتریس قطری است اگر $i \neq j$ ، $a_{ij}=0$.

مثال ۱-۳-۳: ماتریس A یک ماتریس قطری از مرتبه ۳ است.

$$A=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

اگر D یک ماتریس قطری با عناصر قطری $d_n,\dots,d_1$ باشد، بطور خلاصه D را بصورت $D=diag(d_1,\dots,d_n)$ نشان می دهند؛ بطور مثال ماتریس A را در مثال قبل می توان به فرم $A=diag(6,2,-1)$ نشان داد.

۱-۳-۴ ماتریس همانی: ماتریس قطری A را همانی گویند اگر عناصر قطری آن یک باشد. به بیان دیگر A یک ماتریس همانی از مرتبه n است اگر $a_{ij}=\delta_{ij}\ ,\ i,j=1,2,\dots,n$ که در آن $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$. یک ماتریس همانی از مرتبه n را با I_n نشان می دهند.

مثال ۱-۳-۴: ماتریس زیر یک ماتریس همانی از مرتبهٔ ۳ است.

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

۱-۳-۵ ماتریس پائین مثلثی: ماتریس مربعی A را پائین مثلثی گویند، هرگاه عناصر بالای قطر آن صفر باشد. به بیان دیگر $i<j$ و $a_{ij}=0$

مثال ۱-۳-۵ : ماتریس A یک ماتریس پائین مثلثی از مرتبه ۳ است.

$$A=\begin{bmatrix}6&0&0\\5&-7&0\\4&9&3\end{bmatrix}$$

۱-۳-۶ ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی A را بالا مثلثی گویند، هرگاه عناصر زیر قطر آن صفر باشد. یعنی $i>j$ ، $a_{ij}=0$

مثال ۱-۳-۶: ماتریس A یک ماتریس بالا مثلثی از مرتبه ۴ است.

$$A=\begin{bmatrix}11&15&-30&55\\0&12&12&48\\0&0&18&-12\\0&0&0&50\end{bmatrix}$$

۱-۳-۷ ماتریس مثلثی: ماتریس مربعی A را مثلثی گویند هرگاه پایین مثلثی یا بالا مثلثی باشد. با توجه به تعریف، ترانهاده یک ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس پایین مثلثی است و ترانهاده یک ماتریس پایین مثلثی یک ماتریس بالا مثلثی است.

۱-۳-۸ ماتریس سه قطری: ماتریس مربعی A را سه قطری گویند هرگاه $|i-j|>1$ ، $a_{ij}=0$. یک ماتریس سه قطری در حالت کلی به فرم زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \gamma_{n-1} & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱-۳-۸: ماتریس A یک ماتریس سه قطری از مرتبه ۵ است.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

۱-۳-۹ ماتریس پایین هسنبرگی: ماتریس مربعی A را پایین هسنبرگی گویند هرگاه $j>i+1$ ، $a_{ij}=0$.

مثال ۱-۳-۹: ماتریس A یک ماتریس پایین هسنبرگی از مرتبه ۵ است.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

۱-۳-۱۰ ماتریس بالا هسنبرگی: ماتریس مربعی A را بالا هسنبرگی گویند هرگاه $i>j+1$ ، $a_{ij}=0$.

مثال ۱-۳-۱۰: ماتریس A یک ماتریس بالا هسنبرگی از مرتبه ۵ است.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

۱-۳-۱۱ ماتریس مقدماتی: ماتریس مربعی A از مرتبه n را مقدماتی نامند هرگاه A از انجام یک عمل سطری مقدماتی برروی I_n حاصل شده باشد.

مثال ۱-۳-۱۱ : ماتریسهای A و B، مقدماتی هستند.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

در ماتریس A سطر دوم و سوم I_3 جابجا شده اند و در ماتریس B سه برابر سطر سوم I_3 با سطر اول جمع گردیده است.

۱-۳-۱۲ ماتریس جایگشت: ماتریسی که از تغییر مکان سطرهای یک ماتریس همانی حاصل شود یک ماتریس جایگشت نام دارد.

مثال ۱-۳-۱۲: ماتریس $p_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ یک ماتریس جایگشت است که از جابجایی سطرهای اول و دوم ماتریس همانی I_3 حاصل گردیده است.

۱-۳-۱۳ ماتریس پادمتقارن: ماتریس مربعی A را پاد متقارن گویند هرگاه $A^t=-A$.

مثال ۱-۳-۱۳: ماتریس A یک ماتریس پاد متقارن است.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-3\\-1&0&2\\3&-2&0\end{bmatrix}$$

۱-۳-۱۴ ماتریس تنک : ماتریس A را تنک گویند، هرگاه اکثر مؤلفه های آن صفر باشد.

۱-۳-۱۵ ماتریس پر : ماتریس A را پر گویند هرگاه اکثر مؤلفه های آن نا صفر باشد.

۱-۳-۱۶ ماتریس معین مثبت: ماتریس متقارن A را معین مثبت گویند هرگاه برای هر بردار نا صفر x داشته باشیم $x^tAx>0$ و در صورتی که $x^tAx\geq 0$، A را نیمه معین مثبت گویند.

مثال ۱-۳-۱۶: ماتریس زیر یک ماتریس معین مثبت است.

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&5&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

زیرا:

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3]A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}2&2&1\\2&5&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=$$

$$2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1+2x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2>0 \qquad (x\neq 0)$$

۱-۳-۱۷ ماتریس متعامد: ماتریس مربعی A را متعامد گویند هرگاه $A^t=A^{-1}$.

مثال ۱-۳-۱۷: ماتریس $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$ متعامد است، زیرا $A^t=A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ٥

(۱-۳-۱۸) ماتریس قطر غالب: ماتریس مربعی A از مرتبه n را قطر غالب گویند هرگاه:

$$|a_{ii}|\ge\sum_{\substack{i=1\\ j\neq 1}}^{n}|a_{ij}| \quad , \quad i=1,2,\dots,n \qquad (*)$$

اگر در رابطه (*)، نماد $\ge$ به $>$ تبدیل شود آنگاه ماتریس را اکیداً قطر غالب گویند.

مثال ۱-۳-۱۸ : ماتریس $A=\begin{bmatrix}10 & 2 & 3\\ 1 & -6 & 2\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}$ یک ماتریس اکیداً قطر غالب است. زیرا

$10>2+3\ ,\ 6>1+2\ ,\ 7>3+1$

۱-۳-۱۹ ماتریس ترانهاده مزدوج: اگر ماتریس A با درایه های مختلط باشد آنگاه ماتریس ترانهاده مزدوج A را با A^* نشان داده و به صورت زیر تعریف میشود: $A^*=\overline{A}^t$ که در آن $\overline{A}$ ماتریسی است که درایه های آن مزدوج مختلط درایه های ماتریس A هستند.

مثال ۱-۳-۱۹: اگر $A=\begin{bmatrix}3+2i & 4-5i\\ -6i & 9+i\sqrt{2}\\ 7-i & 6+7i\end{bmatrix}$ آنگاه $\overline{A}=\begin{bmatrix}3-2i & 4+5i\\ 6i & 9-i\sqrt{2}\\ 7+i & 6-7i\end{bmatrix}$ و $A^*=\begin{bmatrix}3-2i & 6i & 7+i\\ 4+5i & 9-i\sqrt{2} & 6-7i\end{bmatrix}$.

۱-۳-۲۰ ماتریس هرمیتی: ماتریس مربعی A را هرمیتی گویند هرگاه $A=A^*$. می توان گفت ماتریسهای حقیقی متقارن نوع خاصی از ماتریسهای هرمیتی هستند زیرا اگر A حقیقی باشد آنگاه $A=\overline{A}$.

مثال ۱-۳-۲۰: ماتریس $H=\begin{bmatrix}3 & 7+8i\\ 7-8i & 4\end{bmatrix}$ یک ماتریس هرمیتی است زیرا :

$$H^*=\overline{H}^t=\begin{bmatrix}3 & 7+8i\\ 7-8i & 4\end{bmatrix}=H$$

۱-۳-۲۱ ماتریس یکانی: ماتریس Q یک ماتریس یکانی است اگر $Q^{-1}=Q^*$.

مثال ۱-۳-۲۱: اگر $Q=\begin{bmatrix}\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2}\\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2}\end{bmatrix}$ یک ماتریس یکانی باشد داریم $Q^*=\begin{bmatrix}\frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2}\end{bmatrix}$ که $Q^*Q=QQ^*=I_2$ و لذا $Q^{-1}=Q^*$.

۱-۳-۲۲ ماتریسهای متشابه: ماتریسهای A و B را متشابه نامند هرگاه ماتریس وارون پذیری چون P موجود باشد بطوریکه $B=P^{-1}AP$.

مثال ۱-۳-۲۲: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&-1\\4&6\end{bmatrix}$ آنگاه ماتریسهای A و B متشابهند زیرا اگر قرار دهیم $P=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ آنگاه داریم: $P^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ و $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\4&6\end{bmatrix}=B$.

۱-۳-۲۳ ماتریس قطری شدنی: ماتریس A را قطری شدنی گویند، هرگاه ماتریسی چون P یافت شود به قسمی که $P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری باشد.

مثال ۱-۳-۲۳: ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری شدنی است، زیرا اگر قرار دهیم $P=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ آنگاه

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix} \text{ و } P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$

چون P به گونه ای یافت شد که $P^{-1}AP$ قطری است لذا A یک ماتریس قطری شدنی است.

۱-۳-۲۴ ماتریس تاپلیتز: ماتریس $T\in R^{n\times n}$ را تاپلیتز گویند اگر اعداد $r_{n+1},\ldots,r_0,\ldots,r_{n-1}$ یافت شوند به طوریکه $a_{ij}=r_{j-i}$.

مثال ۱-۳-۲۴: ماتریس $T=\begin{bmatrix}r_0&r_1&r_2\\r_{-1}&r_0&r_1\\r_{-2}&r_{-1}&r_0\end{bmatrix}$ یک ماتریس تاپلیتز است.

۱-۳-۲۵ ماتریس رتبه یک : فرض کنیم x و y دو بردار دلخواه باشند. یک ماتریس به شکل xy^T (حاصل ضرب خارجی x و y) یک ماتریس از رتبه یک یا ماتریس رتبه یک است.

۱-۳-۲۶ تبدیل یک ماتریس رتبه یک: فرض کنیم $\overline{A}$ حاصل جمع ماتریس A با یک ماتریس رتبه یک مانند xy^T باشد یعنی $\overline{A}=A+xy^T$. در این صورت می گوییم A تحت یک ماتریس رتبه یک تغییر کرده است و $\overline{A}$ تبدیل رتبه یک A است. برخی اعمال مقدماتی مانند تعویض سطرو ستون حالات خاص تبدیل رتبه یک هستند.

قضیه ۱-۳-۲۶: فرض کنیم A یک ماتریس نامنفرد و u و v بردارهای n بعدی باشند. ماتریس $A+uv^t$ نامنفرد است اگرو تنها اگر $1+v^TA^{-1}u\neq 0$

برهان : به [۱۴] مراجعه شود.

۱-۳-۲۷ قضیه شرمن- موریسن : این رابطه معکوس ماتریس $A+uv^T$ را برحسب معکوس ماتریس A بصورت زیر بیان می دارد:

$$(A+uv^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{\alpha}A^{-1}uv^TA^{-1}\ ,\ \alpha=1+v^TA^{-1}u\,.$$

با استفاده از این قضیه به آسانی می توان ثابت کرد که معکوس یک ماتریس مقدماتی یک ماتریس مقدماتی است .

۱-۴ : بردارهای ویژه چپ و راست

اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد در این صورت یک مقدار ویژه A^t نیز خواهد بود. همچنین $\overline{\lambda}$ مقدار ویژه A^H می باشد. بردار غیر صفر x را یک بردار ویژه راست نظیر مقدار ویژه λ گوییم هرگاه $Ax=\lambda x$. دراین صورت بردار غیر صفر y^t را یک بردار ویژه چپ نظیر مقدار ویژه λ گوییم هرگاه:

$$v^t A = \lambda v^t \rightarrow A^t v = \lambda v$$
$$x^H A = \lambda x^H \rightarrow A^H x = \lambda x$$

در اینصورت $y^t = x^H$ را بردار ویژه چپ A نظیر مقدار ویژه λ می گوییم.

۱–۵: شکل نرمال یک ماتریس

قضیه ۱–۵–۱: برای هر ماتریس $n\times n$ مانند A یک ماتریس یکانی مانند u وجود دارد بطوریکه $u^H Au = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$، که در آن λ_i، $i = 1,2,\dots,n$ و λ_i مقدار ویژه و نه لزوماً متمایز A هستند.

برهان : به استقراء روی n قضیه را ثابت می کنیم.

برای $n = 1$ بدیهی است. فرض کنیم قضیه برای ماتریسهای تا مرتبه $n-1$ برقرار باشد و A یک ماتریس $n\times n$ باشد و λ_1 یک مقدار ویژه با بردار ویژه نظیر $x_1 \neq 0$ باشد و فرض کنیم x_1 را طوری اختیار کرده باشیم که $\|x_1\|_2 = 1$. فرض کنیم $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ مجموعه بردارهایی باشند بطوریکه با بردار x_1 تشکیل یک پایه متعامد می دهندو $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$. در این صورت داریم $X^H AXe_1 = X^H Ax_1 = X^H \lambda_1 x_1 = \lambda_1 X^H x_1 = \lambda_1 e_1$ یعنی $X^H AX$ رامی توان به صورت زیر نشان داد :

$$X^H AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},\ a^H \in C^{(n-1)}, A_1 \in C^{(n-1)(n-1)}.$$

برطبق فرض ماتریس یکانی مانند U_1 وجود دارد بطوریکه $U_1^H AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$. اگر

قراردهیم $U = X\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$U^H AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^H \end{bmatrix} X^H AX \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & au_1 \\ 0 & u_1^H Au_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & au_1 & \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

نتیجه ۱–۵–۱: اگر A هرمیتی ($A = A^H$) باشد، در اینصورت $u^H Au = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

برهان : به [۱۴] مراجعه شود.

قضیه ۱–۵–۲: اگر مقادیر ویژه λ_i یک ماتریس هرمیتی مانند A بصورت نزولی $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$ مرتب شده- باشند آنگاه $\lambda_1 = \max_{x\neq 0} \dfrac{x^H Ax}{x^H x}$, $\lambda_n = \min_{x\neq 0} \dfrac{x^H Ax}{x^H x}$

برهان : به [۱۴] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۵-۳: ماتریس A نرمال است ($A^H A = AA^H$)، اگر و فقط اگر n بردار ویژه مستقل خطی دو بدو متعامد داشته باشد.

برهان : به [۱۴] مراجعه شود.

قضیه ۱-۵-۴: مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی A از رابطه زیر بدست می آید:

$$\lambda_k = \min\max_{x\neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}$$
$$\dim(s) = n - \underset{x\in s}{k} + 1$$

برهان : فرض کنیم $a_1, a_2, \dots, a_n$ بردارهای ویژه یکامتعامد نظیربا مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد. فرض کنیم S_k زیر فضای برداری تولید شده توسط $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد و نیز S یک زیر فضا با بعد $n-k+1$ باشد. بنابراین S_k و S حداقل دارای یک بردار مشترک ناصفر x هستند. زیرا در غیر اینصورت $\dim(S \cup S_k) = n+1$ که غیر ممکن است. حال می توان نوشت : $x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i q_i$.

$$\frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\xi_i|^2}{\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2} \geq \lambda_k \Rightarrow \mu(s) = \max_{x\in s} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \geq \lambda_k$$

حال فضای S_0 با بعد $n-k+1$ را در نظر می گیریم که توسط بردارهای یکامتعامد $q_1, q_2, \dots, q_n$ تولید می‌شوند. نشان می دهیم حداقل مقدار رابطه ۱-۵-۳ اتفاق می افتد.

$$x \in S_0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{n} \xi_i q_i \Rightarrow \frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_i |\xi_i|^2}{\sum_{i=k}^{n} |\xi_i|^2} \leq \lambda_k \Rightarrow \mu(S_0) \leq \lambda_k$$

که بااختیار $x = q_k$ در تساوی برقرار می شود.

قضیه۱-۵-۵: مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی A از رابطه زیر بدست می آید:

$$\lambda_k = \max\min \frac{(Ax,x)}{(x,x)}$$
$$\dim(s) = k, x \in S, x \neq 0$$

برهان : به [۱۶] مراجعه شود.

۱-۶: فضای حاصلضرب داخلی

تعریف ۱-۶-۱ : فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد. یک حاصلضرب داخلی روی V قاعده ای است که به هر جفت از بردارهای u و v از V عدد حقیقی (u,v) را بنام حاصلضرب داخلی نسبت می دهد بطوریکه خواص زیر برای بردار های w، u و v برای هردوعدد c و d برقرار باشد.

الف) $(u,u) \geq 0$ و $(u,u) = 0$ اگر و فقط اگر $u = 0$

ب) $(u,v) = (v,u)$

ج) $(cu+dv,w)=c(u,w)+d(v,w)$

مثال ۱-۶-۱: فرض کنیم x و y دو بردار n بعدی باشند . یک حاصلضرب داخلی را با قاعده زیر تعریف می‌کنیم $(x,y)=x'y$. همچنین می توان یک حاصلضرب داخلی روی فضای برداری $C[a,b]$ رابه صورت زیر تعریف کرد: $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ که این تعریف نوعی از حاصلضربهای داخلی است که در نظریه توابع متعامد دارای اهمیت است.

تعریف ۱-۶-۲: یک فضای حاصلضرب داخلی حقیقی یک فضای برداری مانند Vروی R همراه با یک حاصلضرب داخلی $(0,0)$ روی Vاست.

تعریف ۱-۶-۳: دو بردار uو v از یک فضای حاصل ضرب داخلی V متعامد نامیده می شود اگر $(u,v)=0$.

تعریف ۱-۶-۴: یک مجموعه از بردارها مانند $X=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ را متعامد گویند هرگاه

$(\xi_i,\xi_j)=0 \quad ,i,j=1,2,\ldots,n \ \ , \ \ i\neq j$

تعریف ۱-۶-۵ : مجموعه X را متعامد یکه گویند هرگاه X متعامد باشد و نرم هر بردار متعلق به X برابر یک باشد. یعنی $\forall\xi_i\in X,\|\xi_i\|=1$

قضیه ۱-۶-۱: هر مجموعه متعامدیکه مستقل خطی است .

برهان : فرض کنیم $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ مجموعه ای متعامد باشد و $\sum_i c_i\xi_i=0$. پس به ازای هر j داریم

$$0=(\xi_j,0)=(\xi_j,\sum c_i\xi_i)=\sum_i c_i(\xi_j,\xi_i)=c_j\ .$$

لذا این مجموعه مستقل خطی است.

قضیه۱-۶-۲: اگر $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ مجموعه ای مستقل خطی در Vباشد، مجموعه ای متعامد یکه چون $X=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ وجود دارد بطوریکه $\xi_k=\sum_{i=1}^{k}a_{ik}\alpha_i$

برهان : (روش متعامد سازی گرام- اشمیت) چون α_1 عنصری از یک مجموعه مستقل خطی است پس $\alpha_1\neq 0$ و بنابراین $\|\alpha_1\|>0$. قرار می دهیم $\xi_i=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$. روشن است که $\|\xi_i\|=1$. اکنون فرض می کنیم که مجموعه ای مانند $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r\}$ پیدا کرده باشیم که متعامد یکه باشد بطوریکه هر ξ_k ترکیب خطی از $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ باشد.

فرض کنیم $\alpha'_{r+1}=\alpha_{r+1}-(\xi_1,\alpha_{r+1})\xi_1-\cdots-(\xi_r,\alpha_{r+1})\xi_r$ پس به ازای هر $\xi_i,1\le i\le r$ داریم :

$(\xi_i,\alpha'_{r+1})=(\xi_i,\alpha_{i+1})-(\xi_i,\alpha_{r+1})=0$

به علاوه چون ξ_kترکیب خطی از $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$ است ، α'_{r+1} ترکیب خطی از $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}\}$ است. همچنین α'_{r+1} صفر نیست. چون $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}\}$ مجموعه ای مستقل خطی است و ضریب α_{r+1} در تعریف α'_{r+1} برابریک است، پس می توان چنین تعریف کرد: $\xi_{r+1}=\dfrac{\alpha'_{r+1}}{\|\alpha'_{r+1}\|}$. روشن است که $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}\}$ مجموعه ای متعامد یکه با ویژگیهای مطلوب است. این روش را می توانیم تا زمانیکه اعضای A تمام شوند ادامه دهیم . در این صورت مجموعه $X=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s\}$ ویژگیهای مورد نیاز را دارد.