۱۳۲۶
دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

عملگرهای ترکیبی روی فضاهای ارلیس - لورنتس

استاد راهنما

دکتر محمدرضا جبارزاده

استاد مشاور

دکتر حسین امامعلی پور

پژوهشگر

کاظم معینی

۱۳۸۸

تقدیم به

روح پرفتوح جمشید خان

الهی

ما را پیراستی چنان که خواستی.

الهی

فضل تو را کران نیست و شکر تو را زبان نیست.

الهی

دانائی ده که از راه نیفتیم و بینائی ده که در چاه نیفتیم.

الهی

دلی ده که در شکر جان بازیم و جانی ده که کار جهان سازیم.

الهی

تحقیقی ده تا از دنیا بیزار شویم و توفیقی ده در دین استوار شویم.

الهی

دلی ده که طاعت افزون کند و توفیق طاعتی که به بهشت رهنمون کند.

چون همه آن کنی که خود خواهی پس از این بنده‌ی مفلس چه می‌خواهی؟

الهی

اگر چه گناه من افزون است اما عفو تو از حد بیرون است.

الهی

نگاهدار تا پشیمان نشویم و به راه آر که سرگردان نشویم.

الهی

چون توانستم ندانستم و چون که دانستم نتوانستم.

الهی

می‌بینی و می‌دانی و برآوردن می‌توانی.

الهی

ما را پیراستی چنان که خواستی.

از مناجات نامهٔ خواجه عبدالله‌انصاری

سپاس گزاری...

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند منّان که دورهٔ کارشناسی ارشد را به لطف و یاری او به اتمام رساندم. در طول دوران تحصیلاتم اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. می‌دانم که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات اساتید گرانقدرم را جبران نماید.

اما بر خود لازم می‌دانم که از استاتید گرانقدرم آقایان دکتر جبارزاده و دکتر امامعلی‌پور به خاطر زحمات بی‌شائبه و حمایتهای بی‌نظیرشان از صمیم قلب تشکر نمایم.

در پایان بر خود وظیفه می‌دانم از همه دوستان و آشنایانی که ذکر نامشان در این صفحه مختصر نمی‌گنجد و در به پایان رساندن این رساله زحمت کشیده‌اند نهایت تشکر را داشته باشم.

کاظم معینی

بهمن ۱۳۸۸

نام خانوادگی: معینی نام: کاظم

عنوان پایان‌نامه: عملگرهای ترکیبی روی فضاهای ارلیس - لورنتس

استاد راهنما: دکتر محمد رضا جبارزاده
استاد مشاور: دکتر حسین امامعلی‌پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۸۴

کلیدواژه‌ها: عملگر فشرده، عملگرهای ترکیبی، تبدیل اندازه پذیر، فضاهای ارلیس -لورنتس.

چکیده

در این پایان‌نامه کرانداری و فشردگی عملگرهای ترکیبی روی فضاهای ارلیس -لورنتس را بررسی می‌کنیم. برای این هدف به توصیف تعاریف زیر می‌پردازیم. تابع توزیع μ_f از f به روی $(0,\infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_f = \mu\{x \in \Omega : \quad |f(x)| > \lambda\},$$

همچنین باز آرایش نزولی f روی $(0,\infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : \quad \mu_f(\lambda) \leq t\} = \sup\{\lambda > 0 : \quad \mu_f(\lambda) > t\}.$$

فضای ارلیس -لورنتس $L^{\varphi,w}(\mu)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^{\varphi,w}(\mu) = \big\{f \in L^0(\mu) : \quad P_{\varphi,w}(\lambda f) < \infty, \quad \exists\lambda > 0\big\}$$

که در آن

$$P_{\varphi,w}(\lambda f) = \int_I \varphi\big(\lambda f^*(t)\big)w(t)dt.$$

و $I = [0,\mu(\Omega)]$ و $L^0(\mu)$ فضای خطی تمام توابع $\Sigma-$ اندازه پذیر روی Ω است و φ یک تابع یانگ، همچنین w تابع وزن است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

در این پایان‌نامه کرانداری و فشردگی عملگرهای ترکیبی روی فضاهای ارلیس -لورنتس را بررسی می‌کنیم. در فصل اول به بررسی تعاریف و قضایای مقدماتی از آنالیز حقیقی و مختلط و آنالیز تابعی می‌پردازیم و مفاهیم مقدماتی فضاهای ارلیس را بیان می‌کنیم. در فصل دوم تعاریف اولیه مربوط به فضاهای ارلیس -لورنتس را آورده و چند قضیه مقدماتی درباره آنها اثبات می‌کنیم. در فصل بعد درباره کرانداری عملگرهای ترکیبی روی فضاهای ارلیس -لورنتس بحث کرده شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن شرایط، عملگرهای ترکیبی روی فضاهای ارلیس -لورنتس کراندار باشند و در فصل آخر فشردگی عملگرهای ترکیبی روی فضاهای ارلیس -لورنتس را بررسی می‌کنیم.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تهیه شده است

Rajeev Kumar, Romesh Kumar, *Composition operators on Orlicz-Lorentz spaces*, Integr. Equ. Oper. theoty., 60 (2008) 79-88.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $X \neq \phi$ و $\Sigma \subseteq P(X)$. گوییم Σ یک σ-جبر روی X است هرگاه

۱) $X \in \Sigma$

۲) $\forall A \in \Sigma \qquad \Longrightarrow \; A^c \in \Sigma$

۳) $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma \qquad \Longrightarrow \; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

در این صورت (X, Σ) یا به اختصار X را فضای اندازه پذیر و اعضای Σ را مجموعه‌های اندازه پذیر می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید (X, Σ) فضای اندازه پذیر و (Y, τ) فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow Y$ مفروض باشد، گوییم f اندازه پذیر است اگر و تنها اگر

$$\forall V \in \tau; \qquad f^{-1}(V) \in \Sigma$$

به عبارت دیگر $f^{-1}(\tau) \subseteq \Sigma$.

حال اگر $f : (X, \Sigma_X) \longrightarrow (Y, \Sigma_Y)$، **داریم**

$$f \text{ اندازه پذیر} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \beta \in \Sigma_Y;\; f^{-1}(\beta) \in \Sigma_X$$

به عبارتی $f^{-1}(\Sigma_Y) \subseteq \Sigma_X$.

تعریف ۳.۱.۱. تابع مجموعه‌ای $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ (تابعی که به هر مجموعه یک عدد اختصاص دهد) را یک اندازه مثبت نامیم هرگاه

۱) $\mu(\phi) = 0$

۲) $\{A_n\}_1^\infty \subseteq \Sigma$ و $A_n \cap A_m = \phi; n \neq m \Longrightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

در تعریف فوق هرگاه $[0, \infty)$ را با $\mathbb{C}$ عوض کنیم آنگاه آن را اندازه مختلط نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. اندازه μ را روی X متناهی گوییم هرگاه $\mu(X) < \infty$، در حالتی که $\mu(X) = 1$، μ را اندازه احتمال گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. اندازه μ را روی X، σ-متناهی گوییم هرگاه $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$ وجود داشته باشد به طوری که $\forall n; \quad \mu(E_n) < \infty$ و $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

تعریف ۶.۱.۱. μ را نیم متناهی گوییم هرگاه به ازای $E \in \Sigma$ که داشته باشیم $\mu(E) = +\infty$ آنگاه $A \in \Sigma$ موجود باشد به طوری که $A \subseteq E$ و $0 < \mu(A) < \infty$.

تعریف ۷.۱.۱. در فضای اندازه (X, Σ, μ)، مجموعه $A \in \Sigma$ را پوچ یا اندازه صفر نامیم هرگاه $\mu(A) = 0$.

قضیه ۸.۱.۱. (همگرایی یکنواخت لبگ) *فرض کنید $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ اندازه پذیر و*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty,$$

و به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\lim f_n(x) = f(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$$

در این صورت f اندازه پذیر است و

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. [۱۸]. □

لم ۹.۱.۱ . (فاتو) فرض کنید $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ اندازه پذیر باشد، داریم

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

برهان. [۱۸]. □

قضیه ۱۰.۱.۱ . (همگرایی تسلطی لبگ) فرض کنید f_n دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. هرگاه تابعی مانند $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد به طوری که

$$\forall n, \quad x \in X; \quad |f_n(x)| \leq g(x)$$

آنگاه $f \in L^1(\mu)$ و

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. [۱۸]. □

قضیه ۱۱.۱.۱ . *فرض کنید X و Y دو فضای برداری توپولوژیک بوده و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ خطی باشد، آنگاه روابط زیر هم ارزند*

۱) Λ *پیوسته است.*

۲) Λ *کراندار است.*

۳) *هرگاه $x_n \to 0$ آنگاه $\{\Lambda x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\}$ کراندار است.*

۴) *هرگاه $x_n \to 0$ آنگاه $\Lambda x_n \to 0$.*

برهان. [۱۹]. □

لم ۱۲.۱.۱ . *فرض کنید ψ یک تابع اندازه‌پذیر نامنفرد روی $(0,\infty)$ باشد و فرض کنیم*

$$-\infty < \lambda < 1, \quad 1 \le q \le \infty$$

داریم

$$\left\{\int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t}\int_0^t \psi(s)ds\right)^q \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{1-\lambda}\left\{\int_0^\infty \left(t^\lambda \psi(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

و

$$\left\{\int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \frac{1}{t}\int_t^\infty \psi(s)ds\right)^q \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{1-\lambda}\left\{\int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \psi(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

برهان. [۲]. □

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر $1 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد، تعریف می‌کنیم

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

و

$$||f||_\infty = ess \sup_{x\in X} |f(x)|$$

$$esssupf(x) = \inf \left\{M : \quad m\{t : \quad f(t) > M\} = 0\right\}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام f هایی تشکیل شده باشد که $||f||_p < \infty$.

ما $||f||_p$ را نرم L^p برای تابع f می‌نامیم.

یا به طور مختصر

$$L^p(\mu) = \left\{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ ,اندازه پذیر} f \; ; \quad \int_X |f|^p d\mu < \infty\right\}$$

اگر $\phi(x) = x^p$ که $1 \leq p < \infty$ آنگاه $L^\phi(\mu) = L^p(\mu)$.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان $F \in \{\mathbb{C} \; or \; \mathbb{R}\}$ باشد، X را یک فضای نرمدار نامند هرگاه تابع $||.|| : X \to F$ به ازای هر $x, y \in X$ دارای خواص زیر باشد

۱) $||x|| \geq 0, \quad ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$

۲) $||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||; \quad \alpha \in F,$

۳) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$

تعریف ۱.۱.۱۵. یک فضای خطی نرم دار، کامل گفته می‌شود هرگاه هر دنباله کشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. فضای خطی نرم دار کامل را فضای باناخ گویند.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید μ و ν دو اندازه متمایز بر σ - جبر Σ باشد، گوییم μ نسبت به ν به طور مطلق پیوسته است و می‌نویسیم $\mu \ll \nu$ هرگاه $|\nu(A)| = 0, \quad A \in \Sigma$ ایجاب کند که $\mu(A) = 0$.

قضیه ۱.۱.۱۸. *فرض کنید ν یک اندازه ناصفر متناهی بوده و μ یک اندازه σ -متناهی باشد. هرگاه ν نسبت به μ به طور مطلق پیوسته باشد آنگاه $\varepsilon > 0$ ای و $A \in \Sigma$ ای هست که $0 < \mu(A) < \infty$ و $\varepsilon\mu(B) \leq \nu(B)$ به ازای هر $B \in \Sigma$ که $B \subseteq A$ برقرار است.*

برهان. [۱۸]. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۹. دو اندازه متمایز μ و ν را منفرد (یا متعامد) گوییم و می‌نویسیم $\mu \perp \nu$ اگر دو مجموعه از هم جدای A و B از Σ با خاصیت $X = A \cup B$ و $|\mu|(A) = |\nu|(B) = 0$ وجود داشته باشد.

قضیه ۲۰.۱.۱ . *(رادون - نیکودیم). فرض کنید ν یک اندازه متناهی باشد که نسبت به اندازه σ - متناهی μ به طور مطلق پیوسته است. در این صورت یک تابع منحصر به فرد مانند f در $L^1(\mu)$ هست به طوری که*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

به ازای هر $A \in \Sigma$ برقرار است.

برهان. [۱۸]. □

تعریف ۲۱.۱.۱. برای $f \in M_0$ تابع توزیع μ_f روی $(0, \infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in \Omega : \ \ |f(x)| > \lambda\}$$

که در آن M_0 کلاس همه توابع روی $L^0(\mu)$ می باشد که تقریباً همه جا متناهی هستند. و $L^0(\mu)$ فضای خطی تمام توابع Σ-اندازه پذیر است.

تعریف ۲۲.۱.۱. تجدید آرایش نزولی f روی $(0, \infty)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$f^*(t) = inf\{\lambda > 0 : \ \ \mu_f(\lambda) \leqslant t\} = sup\{\lambda > 0 : \ \ \mu_f(\lambda) > t\}$$

تعریف ۲۳.۱.۱. تابع حقیقی φ تعریف شده بر بازه باز (a, b) را، که در آن $-\infty \leq a < b \leq \infty$، محدب گویند هرگاه نامساوی $\varphi\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$ به ازای هر $a < x < b$، $a < y < b$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ برقرار باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $\varphi(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲) $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$.

۳) برای $s > 0$ داریم $\varphi(s) > 0$.

۴) $\varphi(s)$ برای $s \geq 0$ از راست پیوسته است.

۵) $\varphi(s)$ روی $(0,\infty)$ نانزولی است.

آنگاه $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ را تابع یانگ گوییم.

ویژگی‌های تابع یانگ را در لم زیر بیان می‌کنیم.

لم ۲۵.۱.۱. *تابع یانگ Φ روی $[0,\infty)$ پیوسته، اکیداً صعودی و محدب است، به علاوه داریم*

۱. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$.

۲. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$.

۳. $\Phi(0) = 0$ و $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$.

۴. *اگر* $0 \leq \alpha \leq 1$ *آنگاه* $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$.

۵. *اگر* $\beta > 1$ *آنگاه* $\Phi(\beta t) \geq \beta\Phi(t)$.

برهان. [۱۰]. □

تعریف ۲۶.۱.۱ . فرض کنید M و N دو فضای خطی نرم دار باشند. آنگاه نگاشت $T : N \longrightarrow M$ یک نگاشت انقباضی نامیده می‌شود اگر $||T(x) - T(y)|| \leq ||x - y||$ به ازای هر $x, y \in N$.

تعریف ۲۷.۱.۱ . سری $\sum_{i=1}^{n} f_i$ در یک فضای خطی نرم دار، جمع پذیر و دارای مجموع S، گفته می‌شود هرگاه S متعلق به این فضا بوده و دنباله مجموع‌های جزئی سری به S همگرا باشد. یعنی داشته باشیم

$$||S - \sum_{i=1}^{n} f_i|| \longrightarrow 0$$

در این حالت می‌نویسیم $S = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. سری $\sum_{i=1}^{n} f_i$ را به طور مطلق جمع پذیر گویند هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n|| < \infty$ باشد.

قضیه ۲۸.۱.۱ . *فضای خطی نرم دار X کامل است اگر و فقط اگر هر سری جمع پذیر مطلق در آن جمع پذیر باشد.*

برهان. [۱۸]. □

تعریف ۲۹.۱.۱ . فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه باشد و $A \in \Sigma$ و $\mu(A) > 0$، در این صورت A یک مجموعه اتمیک است هرگاه برای هر $E \in \Sigma$ که $E \subset A$ داشته باشیم $\mu(E) = 0$ یا $\mu(A - E) = 0$.

تعریف ۳۰.۱.۱ . فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه $\sigma-$ متناهی باشد و به ازای هر $E \in \Sigma$ هرگاه $\mu(E) = 0$ ایجاب کند $\mu o T^{-1}(E) = 0$. آنگاه $T : X \longrightarrow X$ را تبدیل نامنفرد گوییم.

۲.۱ فضای ارلیس

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد و $\varphi = \varphi(t)$ تابع نامنفرد تعریف شده روی $[0, \infty)$ باشد و $\tilde{L}_{\varphi}(\Omega)$ نشان دهنده مجموعه همه توابع تقریباً همه جا لبگ اندازه پذیر تعریف شده روی Ω باشد به طوری که

$$\int \varphi\big(|u(x)|\big)dx < \infty$$

به عبارت دیگر

$$\tilde{L}_{\phi}(\Omega) = \Big\{u : \Omega \longrightarrow \Omega \ , \ \text{لبگ اندازه پذیر}\ u \quad : \quad \int \varphi\big(u(x)\big)dx < \infty\Big\}$$

آنگاه $\tilde{L}_{\varphi}(\Omega)$ یک کلاس ارلیس نامیده خواهد شد و از نماد

$$\sigma(u, \varphi) = \int \varphi\big(|u(x)|\big)dx$$

استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید (X, A, μ) فضای اندازه σ-متناهی باشد، قرار می‌دهیم

$$L^{\phi}(\mu) = \Big\{f : X \longrightarrow C \ , \ \text{اندازه پذیر}\ f \quad : \quad \int_X \phi(\alpha|f|)d\mu < \infty, \quad \alpha > 0\Big\}$$

که در آن ϕ تابع یانگ است، $L^{\phi}(\mu)$ یک فضای ارلیس نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۲.۱. *فضای ارلیس $L^{\Phi}(\Omega)$ یک فضای باناخ است.*