دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

معادلات تابعی ترکیبی متعامد روی فضای های باناخ

توسط:

سمیه سادات حسینی

استاد راهنما:

دکترمجیداسحاقی گرجی

استاد مشاور:

دکترفریدون حبیبیان دهکردی

اسفند۱۳۹۲

با احترام تقدیم به :

پدرم ، اول استادم ، که همواره چتر محبتش بر سرم است بزرگواری که الفبای زندگی را از او آموختم .

مادرم ، بلند تکیه گاهم ، که دامان پر مهرش یگانه پناهم است مهربانی که عشق ورزیدن را ازاو آموختم .

تقدیم به :

خواهران و برادرانم همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگیم .

و تقدیم به :

همسر عزیزم ، دلیل بودنم ، که در تکمیل تحصیل مشوقم بود .

تشکر و قدردانی

خدایا، به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگی اش سوگوار نباشم. وظیفه خود مي‌دانم سپاسگزار تمام آنهایی باشم که در این دوره ارزشمند بودنشان و امیدشان راهگشای من بود.

با تقدیر و درود فراوان خدمت پدر و مادر بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آنها بوده ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی ها و مشکلات بوده است.

تشکر و قدردانی می نمایم از استاد گرانقدر دکتر اسحاقی که الگوی بی نظیری از همت، پشتکار و تلاش در زندگی من هستند. براي ايشان و خانواده محترمشان آرزوي سلامتي، موفقيت و سر بلندي را دارم. همچنین از دکتر حبیبیان که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل فرموده اند سپاسگذارم .

ودر پایان ازخواهران وبرادرانم که در کلیه مراحل زندگی پشتیبان من بوده‌اند کمال قدردانی را دارم.

حسینی

۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه حل عمومی و پایداری هایرز-اولام معادلات تابعی ترکیبی متعامد روی فضا های باناخ متعامد را بررسی می‌کنیم.

سرانجام حل و پایداری معادله ی شبه فیبوناچی $f(x) = f(x-۱)+f(x-۴)$ روی فضا ی باناخ را اثبات می‌کنیم.

واژه های کلیدی:

پایداری هایرز-اولام، معادلات تابعی ترکیبی، متعامد، حل، شبه فیبو ناچی.

فهرست مطالب

مقدمه

مسئله پایداری معادلات تابعی در سال ۱۹۴۰ میلادی توسط اولام[۳۶] به این صورت مطرح شد:

فرض کنیم $(G_۱, \circ)$ یک گروه و $(G_۲, *, d)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ بوده و $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آیا $\delta(\varepsilon) > ۰$ موجود است به طوری که اگر نگاشت $h : G_۱ \to G_۲$، در رابطه

$$d(h(x \circ y), h(x) * h(y)) \leq \delta \qquad (x, y \in G_۱)$$

آن‌گاه هم ریختی $H : G_۱ \longrightarrow G_۲$ موجود باشد به قسمی که

$$d(h(x), H(x)) \leq \varepsilon \qquad (x \in G_۱).$$

به عبارت دیگر آیا می‌توان یک تابع تقریباً همریختی را تا اندازه ممکن با خطای کم به یک همریختی واقعی نزدیک کرد؟

یک سال بعد مسئله اولام توسط هایرز [۱] در [۲۱]، برای فضاهای باناخ به صورت زیر حل شد:

اگر X و Y فضاهای باناخ و $\varepsilon > ۰$ و تابع $f : X \longrightarrow Y$ در نامعادله

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \qquad (x, y \in X)$$

صدق کند، آن‌گاه برای هر $x \in X$، حد

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} f\left(۲^n x\right)$$

[۱] Hyers

وجود دارد و $A : X \longrightarrow Y$ یک تابع جمعی منحصر بفرد است به طوری‌که

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \varepsilon \qquad (x \in X).$$

به علاوه اگر $f(tx)$ برای هر $x \in X$، در $t \in \mathbb{R}$ پیوسته باشد آن گاه A خطی است.

در سال ۱۹۵۰، آوکی [۲] در[۲] قضیه‌ی هایرز را برای توابع تقریبا جمعی تعمیم داد و در سال ۱۹۷۸ میلادی، تمستکلیس راسیاس [۳] در [۳۲] قضیه هایرز را به صورت زیر تعمیم داد:

فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع از فضای نرم دار X به فضای باناخ Y باشد به طوری که در نامساوی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \qquad (x, y \in X)$$

صدق کند. که درآن ϵ و p ثابت هایی هستند که $\epsilon > ۰$ و $۰ \leq p < ۱$، برای هر $x \in X$،

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} f\left(۲^n x\right)$$

وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصر بفرد می‌باشد که در رابطه

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{۲}{۲ - ۲^p}\epsilon\|x\|^p \qquad (x \in X)$$

صدق می‌کند. این مفهوم جدید به پایداری هایرز-اولام- راسیاس معروف است.

ازطرفی جان راسیاس به جای تابع کنترل $\epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ در پایداری هایرز- اولام-راسیاس تابع کنترل $\epsilon(\|x\|^p\|y\|^p)$ را جایگزین کرد. که به پایداری اولام -گاورتا-راسیاس معروف شد.

گاوروتا [۴] [۱۶]، این نتایج را تعمیم داد او به جای تابع کنترل در قضیه‌ی کلی هایرز- اولام -راسیاس تابع کنترل

[۲] Aoki

[۳] Themistocles M.Rassias

[۴] Gavruta

$\phi(x,y)$ را جایگزین کرد (برای جزئیات بیشتر [۳۳، ۳۲، ۳۱، ۳۰، ۲۳، ۲۰، ۱۷، ۱۵، ۳] را ببینید.)

در سال ۱۹۸۷ میلادی، هنسل [۱۹] فضاهای نرمداری را معرفی کرد که خاصیت ارشمیدسی نداشته باشند و این فضاها کاربردهای فراوانی در فیزیک دارند[۳۹، ۴۰، ۲۶]. در سال ۱۹۷۵میلادی، گادر [۵] و استرادر [۶][۱۸] معادله تابعی کوشی متعامد را به صورت زیر معرفی کرده اند

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x \perp y,$$

که $\perp$ را رابطه ای شامل پنج اصل درنظر گرفته اند.

در سال ۱۹۸۵ میلادی، رتز [۷][۳۵] تعریف جدیدی از تعامد را با محدود کردن اصول گادر و استرادر معرفی کرد به علاوه او ساختار جدیدی از نگاشت های جمعی را نیز بیان کرد.

این پایان نامه به حل وپایداری تعدادی معادله ترکیبی در فضاهای مختلف می باشدکه در زیر خلاصه ای از مطالبی که در هر فصل بحث می شود توضیح داده شده است:

فصل اول :نخست تعاریف لازم بیان می شوند وسپس بعضی از مفاهیم و قضایای اولیه پایداری معادلات تابعی مطرح می شوند که در فصل های بعدی به آن نیاز پیدا خواهیم کرد.

فصل دوم :در ابتدا به حل معادله تابعی

$$f(mx+y) + f(mx-y) + ۲f(x) = f(x+y) + f(x-y) + ۲f(mx)$$

وسپس پایداری [۸]تعمیم یافته هایرز-اولام این معادله در فضای شبه باناخ پرداخته می شود.

فصل سوم :پایداری هomomorfism متعامد[۹] $AQCQ$روی جبرهای باناخ ناارشمیدسی مورد مطالعه قرار می گیرد.

[۵] Gudder

[۶] Strawther

[۷] Rätz

[۸] Stability

[۹] Orthogonality

فصل چهارم:ابتدا حل عمومی و سپس پایداری معادله تابعی شبه فیبونانچی[۱۰] $f(x) = f(x-۱) + f(x-۴)$ را در فضای های باناخ بحث می شود.

[۱۰] Fibonacci Like

از این پایان نامه مقالات زیر استخراج شده اند:

[1] Eshaghi Gordji, M. and Hosseini, S., On the Fibonacci like functional equation $f(x) = f(x-۱) + f(x-۴)$, Preprint.

[2] Eshaghi Gordji, M., Hosseini, S. and De Le Sen., M., On the Fibonacci like functional equation $f(x) = f(x-۱) + f(x-۴)$ in non-Archimedean Banach spaces, Preprint.

[3] Eshaghi Gordji, M., and Hosseini, S., Stability of an orthogonal AQCQ homomorphism in non-Archimedean Banach algebras,Preprint.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در فصل حاضر تلاش بر آن است که برخی از تعاریف و قضایایی که در این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده شده بیان شود.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. *فضای برداری X روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را نرمدار گوییم، هر گاه نگاشت $||\cdot|| : X \to \mathbb{F}$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر λ، سه خاصیت زیر برقرار باشند:*

(۱) $||x|| \geq 0$ و $||x|| = 0$ *اگر و فقط اگر* $x = 0$؛

(۲) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ ؛

(۳) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.

در این صورت زوج $(X, ||.||)$ را فضای نرمدار می نامیم. با قرار دادن $d(x, y) = ||x - y||$ فضای نرمدار X به یک فضای متریک با متریک d تبدیل می‌شود. این متریک را متریک تعریف شده توسط نرم گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. *هر فضای نرمدار را که نسبت به متریک تعریف شده توسط نرمش کامل باشد، فضای باناخ*[1] گوییم.

تذکر ۳.۱.۱. *در این بخش منظور از $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می‌باشد مگر آنکه یکی از آنها تاکید گردد.*

[1] Banach

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنیم A یک مجموعه غیرتهی باشد دراین صورت تابع $d : A \times A \to [0, \infty]$ را متریک توسعه یافته گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:*

(۱) *برای هر $x, y \in A$، $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛*

(۲) *برای هر $x, y \in A$، $d(x, y) = d(y, x)$؛*

(۳) *برای هر $x, y, z \in A$، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

تذکر ۵.۱.۱. *متریک توسعه یافته با متریک معمولی متفاوت است زیرا، برد آن شامل بینهایت نیز می‌باشد.*

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. یک شبه نرم [۲] تابع حقیقی $||.||$ بر X است که در شرایط زیر صدق کند:*

(۱) *برای هر $x \in X$، $||x|| = 0$ اگروفقط اگر $x = 0$؛*

(۲) *برای هر $x \in X$ وهر $\lambda \in R$، $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$؛*

(۳) *عدد ثابت $k \geq 1$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$، $||x + y|| \leq k(||x|| + ||y||)$.*

زوج $(X, ||.||)$ را فضای شبه نرمدار می نامیم، اگر $||.||$ یک شبه نرم روی X باشد.

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنیم $||.|| : X \longrightarrow [0, \infty)$ یک فضای شبه نرم دار باشد. کوچکترین مقدار K که به ازای هر مقدار $n \geq 1$ وهمه مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}$ داشته باشیم*

$$\|\sum_{i=1}^{2n} x_i\| \leq K^n \|\sum_{i=1}^{2n} x_i\|$$

و

$$\|\sum_{i=1}^{2n+1} x_i\| \leq K^{n+1} \|\sum_{i=1}^{2n+1} x_i\|$$

را ضریب تقعر $||.||$ می نامیم.

تذکر ۸.۱.۱. *فضای شبه نرم کامل را فضای شبه باناخ می نامیم.*

[۲] Quasi norm

تعریف ۹.۱.۱. *فرض کنیم $p \in (0,1]$ شبه نرم $||.||$ را یک $p-$ نرم گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم*

$$||x+y||^p \leq ||x||^p + ||y||^p.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. *یک فضای $p-$ باناخ، یک فضای شبه باناخ است، اگر شبه نرم روی آن یک $p-$ نرم نیز باشد.*

تعریف ۱۱.۱.۱. *هر شبه نرم با یک $p-$ نرم معادل است.*

تعریف ۱۲.۱.۱. *فضای برداری X روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را یک جبر گوییم، هرگاه نگاشت $\pi : (x,y) \to xy$، از $X \times X$ به توی X وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$، داشته باشیم:*

(۱) $x(yz) = (xy)z$؛

(۲) $(x+y)z = xz + yz$، $x(y+z) = xy + yz$؛

(۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

تعریف ۱۳.۱.۱. *جبر X را تعویض پذیر گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $xy = yx$.*

تعریف ۱۴.۱.۱. *جبر X روی میدان F را یک جبر نرمدار گوییم، هرگاه X یک فضای نرمدار با نرم $||\cdot||$ باشد و در شرط زیر صدق کند*

$$||xy|| \leq ||x|| ||y|| \qquad (x, y \in X).$$

تعریف ۱۵.۱.۱. *جبر نرمدار X روی میدان F را یک جبر باناخ گوییم، هرگاه X فضای باناخ باشد.*

تعریف ۱۶.۱.۱. *فرض کنیم A, B دو جبر با میدان اسکالر یکسان F باشند. در این صورت یک همریختی از A به توی B نگاشت خطی $H : A \longrightarrow B$ است به طوری که*

$$H(xy) = H(x)H(y).$$

تعریف ۱۷.۱.۱. *فرض کنیم A, B دو جبر با میدان اسکالر یکسان F باشند. اگر نگاشت $H : A \longrightarrow B$ جمعی*

باشد و برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم

$$H(xy) = H(x)H(y).$$

آن گاه $H : A \longrightarrow B$ را یک همریختی حلقه ای می نامیم.

۲.۱ فضای ناارشمیدسی

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. قدر مطلق نا ارشمیدسی روی $\mathbb{K}$، یک تابع $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ است به طوری که برای هر $r, s \in \mathbb{K}$ داشته باشیم*

(۱) $|r| \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $r = 0$ ؛

(۲) $|rs| = |r||s|$؛

(۳) $|r + s| \leq max\{|r|, |s|\}$ (نامساوی مثلث قوی).

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای خطی روی میدان اسکالر $\mathbb{K}$ با قدر مطلق نابدیهی نا ارشمیدسی $|\cdot|$ باشد. تابع $||\cdot|| : X \to R$ را نرم ناارشمیدسی می‌نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند*

(۱) $||x|| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$ ؛

(۲) برای هر $r \in \mathbb{K}$ و $x \in X$، $||rx|| = |r|||x||$ ؛

(۳) برای هر $x, y \in X$ ، $||x + y|| \leq max\{||x||, ||y||\}$ (نامساوی مثلث قوی).

در این صورت $(X, ||.||)$ را فضای نا ارشمیدسی می‌نامیم.

مهم ترین مثال از فضاهای ناارشمیدسی اعداد $p-$ جمعی هستند (مثال زیر راببینید). مهم ترین خاصیت اعداد $p-$ جمعی این است که در اصل ارشمیدسی (برای هر $x, y > 0$ یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x < ny$) صدق نمی‌کنند.

مثال ۳.۲.۱. *فرض کنیم p عدد اول باشد. هرعدد گویای مخالف صفر را می‌توان به صورت $a = \frac{m}{n}p^{n_x}$ یک*

نوشت به طوری که m,n اعداد صحیحی هستند که بر p تقسیم پذیر نیستند. قدرمطلق $p-$ جمعی را به صورت $|a|_p = p^{-nx}$ تعریف می‌کنیم بنابراین $|.|$ یک قدرمطلق ناارشمیدسی روی Q است. Q کامل شده نسبت به $|.|$ رابا Q_p نمایش می‌دهیم که میدان اعداد $p-$ جمعی نامیده می شود.

تذکر ۴.۲.۱. توجه کنید که اگر $p \geq ۳$ آن گاه برای هر عدد صحیح n داریم $|۲^n| = ۱$.

تعریف ۵.۲.۱. با توجه به نامساوی

$$||x_n - x_m|| \leq max\{||x_{j+۱} - x_j|| : m \leq j \leq n-۱\}(n \geq m)$$

یک دنباله $\{x_n\}$ کوشی است اگر وتنها اگر دنباله $\{x_{n+۱} - x_n\}$ در فضای نا ارشمیدسی به صفر همگرا باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فضای نا ارشمیدسی را کامل گوییم، اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

۳.۱ فضای متعامد

در سال ۱۹۷۵، گادر [۳] و استرادر [۴][۱۸] معادله تابعی کوشی متعامد را معرفی کردند

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x \perp y,$$

که $\perp$ را مجموعه ای شامل پنج اصل تعریف کردند. در سال ۱۹۸۵، رتز [۵][۳۵] تعریف جدیدی از تعامد را با محدود کردن اصول گادر و استرادر معرفی کرد به علاوه او ساختار جدیدی از نگاشت های جمعی را نیز بیان کرد. اکنون مفهومی از تعامد را که توسط رتز، معرفی شد ارائه میکنیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری با $\dim X \geq ۲$ و $\perp$، یک رابطه‌ی دوتایی روی X با خواص زیر باشد

[۳] Gudder

[۴] Strawther

[۵] Rätz

(۱) برای هر $x \in X$، $0 \perp x$ و $x \perp 0$؛

(۲) اگر $x, y \in X - \{0\}$ و $x \perp y$، آن‌گاه x, y مستقل خطی اند؛

(۳) اگر $x \perp y$ و $x, y \in X$، آن‌گاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، $\alpha x \perp \beta y$؛

(۴) اگر P یک زیر فضای ۲- بعدی از X، $x \in P$ و $\lambda \in \mathbb{R}^+$ باشد آن‌گاه $y_o \in P$، وجود دارد به طوری‌که $x \perp y_o$ و $\lambda x - y_o \perp x + y_o$. زوج $(X, \perp)$، فضای متعامد نامیده می‌شود.

مثال ۲.۳.۱. (۱) تعامد بدیهی روی فضای برداری X را با استفاده از خاصیت اول $\perp$ تعریف می‌کنیم و برای دو عنصر غیر صفر x, y، $x \perp y$ هرگاه x, y مستقل خطی باشد.

(۲) تعامد متداول روی یک فضای ضرب داخلی $(X, \langle ., . \rangle)$، $x \perp y$ هرگاه $\langle x, y \rangle = 0$.

(۳) تعامد بیرخف- جیمز [۶] روی یک فضای نرمدار $(x, \|.\|)$، $x \perp y$ هرگاه برای هر $\lambda \in R$، $\|x\| \leq \|x+\lambda y\|$.

تعریف ۳.۳.۱. رابطه‌ی $\perp$ را متقارن می نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$، $x \perp y$ ایجاب کند $y \perp x$.

بوضوح (۱)، (۲) متقارن هستند اما مثال (۳) متقارن نیست. لازم به ذکر است که فضای نرمدار حقیقی با بعد بزرگتر یا مساوی ۲، یک فضای ضرب داخلی است اگر وتنها اگر تعامد بیرخف- جیمز متقارن باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم $(A, \|.\|)$ یک جبر نرم‌دار باشد و $(A, \perp)$ یک فضای متعامد باشد. در این صورت این جبر نرم‌دار با تعامد $\perp$ را با $(A, \perp, \| \ . \ \|)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم $(A, \perp)$ یک جبر متعامد و B یک جبر باشد. در این صورت نگاشت $f : A \longrightarrow B$ را جمعی متعامد گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ که $x \perp y$ داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم $(A, \perp)$ یک جبر متعامد و B یک جبر باشد. در این صورت نگاشت

[۶] Birkhoff-James

$B \longrightarrow f : A$ را درجه سه متعامد گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ که $x \perp^{\cdot} y$ داشته باشیم

$$f(۲x+y)+f(۲xy)=۲f(x+y)+۲f(xy)+۱۲f(x).$$

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم $(A, \perp)$ یک جبر متعامد و B یک جبر باشد. در این صورت نگاشت $B \longrightarrow f : A$ را درجه دو متعامد گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ که $x \perp^{\cdot} y$ داشته باشیم

$$f(x+y)+f(xy)=۲f(x)+۲f(y).$$

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنیم $(A, \perp)$ یک جبر متعامد و B یک جبر باشد. در این صورت نگاشت $B \longrightarrow f : A$ را درجه چهار متعامد گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ که $x \perp^{\cdot} y$ داشته باشیم

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۴f(x+y)+۴f(x-y)+۲۴f(x)-۶f(y).$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم $(A, \perp)$ یک جبر متعامد و B یک جبر باشد. در این صورت نگاشت $B \longrightarrow f : A$ را جمعی، درجه دو، درجه سه و درجه چهار متعامد گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ که $x \perp^{\cdot} y$ داشته باشیم

$$f(x+۲y)+f(x-۲y)=۴f(x+y)+۴f(x-y)-۶f(x)+f(۲y)+f(-۲y)-۴f(y)-۴f(-y).$$

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم $(A, \perp)$ یک جبر متعامد و B یک جبر باشد. دراین صورت نگاشت $B \longrightarrow f : (A, \perp)$ را یک همومورفیسم حلقه ای متعامد گوییم هرگاه

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)+f(y) \quad (x \perp^{\cdot} y), \\ f(ab)=f(a)f(b) \quad (a \perp^{\cdot} b). \end{cases}$$

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنیم $(A, \perp)$ یک جبر متعامد و B یک جبر باشد، دراین صورت نگاشت