چکیده

هدف اساسی ما از این پایان‌نامه معرفی دو رده از دامنه‌های صحیح تحت عنوان دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی و دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی، مطالعه ساختار ایده‌الی آنها و بررسی ارتباط بین آنها است. همچنین ارتباط بین این دو رده از دامنه‌های صحیح با دامنه‌های ارزیابی، دامنه‌های شبه ارزیابی و دامنه‌های تقریباً ارزیابی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ثابت می‌شود که هر دامنه شبه ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی و هر دامنه تقریباً ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی می‌باشند. همچنین هر دامنه شبه ارزیابی، یک دامنه تقریباً شبه ارزیابی و هر دامنه تقریباً شبه ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است. سرانجام به بررسی حلقه‌هایی که شامل این دو رده از دامنه‌های صحیح می‌باشند، می‌پردازیم و به طور مثال نشان می‌دهیم که بستار صحیح هر دامنه شبه تقریباً ارزیابی، یک دامنه شبه ارزیابی است. در انتها نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی حلقه‌هایی که شامل این دو رده از دامنه‌های صحیح هستند، خود نیز از همین رده می‌باشند.

کلمات کلیدی: دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی، ایده‌ال اول شبه قوی، ایده‌ال توانا، ایده‌ال اولیه قوی و دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی

فهرست مطالب

مقدمه

هدف این پایان‌نامه که مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد، بررسی و شناخت ساختار دو رده از دامنه‌های صحیح تحت عنوان دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی و دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی و خواص آنها است. در سرتاسر این پایان‌نامه، R نمایش یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K و بستار صحیح R' است.

مفهوم دامنه‌های شبه ارزیابی در سال ۱۹۷۸، اولین بار توسط هدستروم [1] و هاستون [2] در مقاله [٦]، تحت عنوان دامنه‌های شبه ارزیابی معرفی شد که این رده از دامنه‌های صحیح رابطه نزدیکی با رده دامنه‌های ارزیابی دارند. دامنه صحیح R با میدان کسرهای K، دامنه شبه ارزیابی نامیده می‌شود هرگاه هر ایده‌ال اول آن، یک ایده‌ال اول قوی باشد. در این مقاله مؤلفان در قضیه ۱.۵ از [٦]، نشان دادند که دامنه صحیح R یک دامنه شبه ارزیابی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in K \setminus R$ و برای هر عنصر غیریکال a از R، $ax^{-1} \in R$.

[1] $J.R\ Hedstrom$

[2] $E.G\ Houston$

پس از آن اندرسون [۳] و ظفراله [۴] در سال ۱۹۹۱، با انتشار مقاله [۲] تحت عنوان دامنه‌های تقریباً بزو، مطالبی راجع به دامنه‌های تقریباً ارزیابی را ارائه نمودند. در سال ۲۰۰۲، بداوی [۵] و هاستون به مطالعه بیشتر دامنه‌های شبه ارزیابی و خواص آنها پرداختند و در مقاله [۳]، توسعه‌ای از دامنه‌های شبه ارزیابی را ارائه دادند و با تعریفی معادل دامنه‌های شبه ارزیابی، دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی را تعریف کردند. دامنه صحیح R را یک دامنه تقریباً شبه ارزیابی می‌نامیم هرگاه هر ایده‌ال اول P از R، یک ایده‌ال اولیه قوی باشد، به این مفهوم که اگر به ازای هر عنصر x و y از K، $xy \in P$ آنگاه $x \in P$ یا یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $y^n \in P$. بنابراین واضح است که هر دامنه شبه ارزیابی، یک دامنه تقریباً شبه ارزیابی است. همچنین مؤلفان در این مقاله مثالی از یک دامنه تقریباً شبه ارزیابی ارائه دادند که یک دامنه شبه ارزیابی نیست. بداوی در سال ۲۰۰۷، تعمیمی دیگر از دامنه‌های شبه ارزیابی را در مقاله [۴]، تحت عنوان دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی ارائه و مورد بررسی قرار داد. در این پایان‌نامه سعی نموده‌ایم تا مقاله‌های بداوی در سال ۲۰۰۲ و ۲۰۰۷ را مورد مطالعه قرار دهیم.

در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان شده است. در ادامه این فصل به بررسی مفاهیمی چون ایده‌ال اول شبه قوی، دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی و توسیع ریشه می‌پردازیم. در فصل دوم حلقه‌هایی که

[۳] $David\ Anderson$

[۴] $Muhammad\ Zafrullah$

[۵] $Ayman\ Badawi$

شامل دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی می‌باشند مورد مطالعه قرار می‌گیرند که هدف اصلی این فصل می‌باشد. همچنین تلاش می‌کنیم شرایطی را بدست آوریم که تحت آن هر حلقه شامل یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی، نیز یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی باشد.

در فصل سوم ابتدا ایده‌ال‌های توانا و رادیکال قوی را تعریف می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که اگر I یک ایده‌ال توانا از R باشد آنگاه $\sqrt{I}$ یک ایده‌ال توانا از R است اگر و تنها اگر $\sqrt{I}$ یک رادیکال قوی باشد. در بخش دوم این فصل ابتدا به معرفی ایده‌ال‌های اولیه قوی و بررسی خواص آنها بر روی دامنه‌های نیم‌نرمال می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم که اگر R یک دامنه نیم‌نرمال باشد آنگاه هر ایده‌ال اولیه قوی، یک ایده‌ال توانا است. سپس نشان می‌دهیم اگر هر ایده‌ال اول P از R، یک ایده‌ال اولیه قوی R باشد آنگاه برای هر عدد طبیعی n، P^n نیز یک ایده‌ال اولیه قوی از R است.

سرانجام در فصل چهارم مفاهیمی چون دامنه تقریباً شبه ارزیابی و دامنه تقسیم‌شده را تعریف کرده و ثابت خواهیم کرد که هر دامنه تقریباً شبه ارزیابی، یک دامنه تقسیم‌شده است. همچنین نشان می‌دهیم که هر دامنه تقریباً شبه ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است و در انتها به بررسی حلقه‌هایی که شامل دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی می‌باشند، می‌پردازیم.

فصل ۱

دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی و ویژگیهایی از آن‌ها

در این فصل به بررسی دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی و مطالعه ساختار ایده‌الی آنها پرداخته و در ادامه نشان می‌دهیم که هر دامنه شبه ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی و همچنین هر دامنه تقریباً ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی نیز هست.

دامنه صحیحی که دارای تنها یک ایده‌ال ماکسیمال باشد دامنه شبه موضعی می‌نامیم. در سراسر این پایان‌نامه، R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K است. در این فصل ضمن معرفی ایده‌ال‌های اول شبه قوی، دامنه صحیحی را که هر ایده‌ال اول آن، یک ایده‌ال اول شبه قوی باشد یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی می‌نامیم. در گزاره ۴.۱،

ثابت می‌کنیم که اگر R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی باشد آنگاه مجموعه ایده‌ال‌های اول R، کاملاً مرتب هستند و در نتیجه R یک دامنه شبه موضعی است. سپس مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد عکس این گزاره، لزوماً برقرار نیست. بنابر قضیه ۹.۱، دامنه شبه موضعی R با ایده‌ال ماکسیمال M، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است اگر و تنها اگر M یک ایده‌ال اول شبه قوی از R باشد. به علاوه در گزاره ۱۲.۱، ثابت می‌کنیم که مجموعه ایده‌ال‌های اول R کاملاً مرتب هستند اگر و تنها اگر برای هر دو عنصر ناصفر و غیریکال a و b از R، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $a \mid b^n$ یا $b \mid a^n$.

همچنین در قضیه‌ای اساسی نشان می‌دهیم که دامنه صحیح R، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in E(R)$، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که برای هر عنصر غیریکال a از R، $ax^{-n} \in R$. در گزاره ۲۲.۱، نشان خواهیم داد که هر دامنه شبه ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است. سپس ثابت می‌کنیم هر دامنه تقریباً ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی نیز می‌باشد که لزوماً عکس آنها برقرار نیست. در ادامه در قضیه ۲۷.۱ ثابت می‌شود که عکس گزاره ۲۲.۱، در صورتی برقرار است که R نسبت به ریشه بسته باشد. سرانجام در انتهای این فصل نشان می‌دهیم که دامنه شبه موضعی R با ایده‌ال ماکسیمال M، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است اگر و تنها اگر $(M :_K M)$ یک دامنه تقریباً ارزیابی با ایده‌ال ماکسیمال $Rad_V(M)$ باشد.

تعریف ۱.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد. یک ایده‌ال اول P از R، یک ایده‌ال اول شبه قوی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in K$، اگر $xyP \subseteq P$ آنگاه عدد طبیعی m وجود داشته باشد به طوری که $x^m \in R$ یا $y^m P \subseteq P$.

قرارداد. فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد. برای هر زیرمجموعه S از R تعریف می‌کنیم:

$$E(S) = \{x \in K \mid x^n \notin S \text{ ، } n \text{ برای هر عدد طبیعی } \}.$$

لم ۲.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K و P ایده‌ال اولی از R باشد. در این صورت P یک ایده‌ال اول شبه قوی R است اگر و تنها اگر برای هر $x \in E(R)$، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $x^{-n}P \subseteq P$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم P یک ایده‌ال اول شبه قوی از R باشد و $x \in E(R)$. در این صورت برای هر عدد طبیعی n، $x^n \notin R$. چون $xx^{-1}P = P$ پس یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x^{-n}P \subseteq P$.

$\Rightarrow$) فرض می‌کنیم x و y عناصری از K باشند به طوری که $xyP \subseteq P$. اگر $x \notin E(R)$، آنگاه یک عدد طبیعی n وجود دارد که $x^n \in R$. اگر $x \in E(R)$، آنگاه طبق فرض یک عدد طبیعی n وجود دارد که $x^{-n}P \subseteq P$. حال با توجه به اینکه $xyP \subseteq P$ پس به وضوح $x^n y^n P \subseteq P$ و در نتیجه $y^n P = x^{-n}(x^n y^n P) \subseteq x^{-n}P \subseteq P$. بنابراین P یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است. $\square$

تعریف ۳.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد. در این صورت R را یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی گویند اگر هر ایده‌ال اول P از R، یک ایده‌ال اول شبه قوی R باشد.

گزاره ۴.۱ فرض کنید R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی باشد. در این صورت مجموعه ایده‌ال‌های اول R، کاملاً مرتب هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم P و Q دو ایده‌ال اول از R باشند به طوری که $P \nsubseteq Q$. در این صورت عنصر $p \in P$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $p \notin Q$. حال فرض می‌کنیم $q \in Q$ و $x = \frac{p}{q}$. اگر $x \notin E(R)$، آنگاه برای یک عدد طبیعی n، $\frac{p^n}{q^n} = x^n \in R$. از اینرو برای یک $r \in R$، $p^n = rq^n \in Q$ و در نتیجه $p \in Q$ که این متناقض با انتخاب p است، پس $x \in E(R)$. اینک چون Q یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است بنابر لم ۲.۱، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x^{-n}Q \subseteq Q$. بنابراین $\frac{q^{n+1}}{p^n} = x^{-n}q \in x^{-n}Q \subseteq Q$. پس به ازای یک $r \in Q$، $q^{n+1} = rp^n \in P$ و لذا $q \in P$. بنابراین $Q \subseteq P$. $\square$

از گزاره فوق بلافاصله نتیجه زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۵.۱ هر دامنه شبه تقریباً ارزیابی، شبه موضعی است.

گزاره ۶.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح و P یک ایده‌ال اول شبه قوی از R باشد. در این صورت برای هر $p \in P$ و $r \in R \backslash P$، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $\frac{p^n}{r^n} \in P$.

اثبات. فرض می‌کنیم $p \in P$ و $r \in R\backslash P$. اگر $p = ۰$ آنگاه برای هر عدد طبیعی n، $\frac{p^n}{r^n} = ۰ \in P$. اگر $p \neq ۰$، قرار می‌دهیم $x = \frac{r^۲}{p}$. حال اگر $x \notin E(R)$، آنگاه برای یک عدد طبیعی n، $\frac{r^{۲n}}{p^n} = x^n \in R$. لذا $r^{۲n} = x^n p^n \in P$ و در نتیجه $r \in P$ که این متناقض با انتخاب r است، بنابراین $x \in E(R)$. در این صورت چون P یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است پس بنابر لم ۲.۱، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x^{-n}P \subseteq P$. بنابراین $\frac{p^{۲n}}{r^{۲n}} = x^{-n}p^n \in x^{-n}P \subseteq P$. □

گزاره ۷.۱ فرض کنید P یک ایده‌ال اول شبه قوی از دامنه صحیح R باشد. اگر P شامل یک ایده‌ال اول Q از R باشد آنگاه برای هر $q \in Q$ و $p \in P\backslash Q$، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $\frac{q^n}{p^n} \in Q$.

اثبات. فرض می‌کنیم $q \in Q$ ، $p \in P\backslash Q$ و $x = \frac{q}{p}$. همچنین فرض می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n، $x^n \notin Q$. اگر $x \notin E(R)$، آنگاه برای یک عدد طبیعی n، $\frac{q^n}{p^n} = x^n \in R$. بنابراین $x^n p^n = q^n \in Q$. از طرفی چون $p \notin Q$ لذا $x^n \in Q$ که این متناقض با فرض است، پس $x \in E(R)$. حال با توجه به اینکه P یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است بنابر لم ۲.۱، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x^{-n}P \subseteq P$. بنابراین $\frac{p^{n+۱}}{q^n} = x^{-n}p \in x^{-n}P \subseteq P$. پس به ازای یک $r \in P$، $p^{n+۱} = rq^n \in Q$ و در نتیجه $p \in Q$، که این متناقض با انتخاب p است. لذا یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $\frac{q^n}{p^n} = x^n \in Q$. □

گزاره ۸.۱ فرض کنید P و Q ایده‌آل‌های اول ناصفر از دامنه صحیح R باشند و $Q \subseteq P$. اگر P یک ایده‌آل اول شبه قوی از R باشد آنگاه Q نیز یک ایده‌آل اول شبه قوی از R است.

اثبات. فرض می‌کنیم P یک ایده‌آل اول شبه قوی و Q یک ایده‌آل اول ناصفر از R باشند به طوری که $Q \subseteq P$. بنابر لم ۲.۱، برای اثبات اینکه Q یک ایده‌آل اول شبه قوی از R است، کافی است نشان دهیم برای هر $x \in E(R)$، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x^{-n}Q \subseteq Q$. فرض می‌کنیم $x \in E(R)$، چون P یک ایده‌آل اول شبه قوی از R است پس برای یک عدد طبیعی n، $x^{-n}Q \subseteq x^{-n}P \subseteq P$ و در نتیجه $x^{-n}Q \subseteq P$. در ادامه فرض می‌کنیم برای یک $q \in Q$، $b = x^{-n}q \in P\backslash Q$. در این صورت بنابر گزاره ۷.۱، یک عدد طبیعی m وجود دارد به طوری که $\frac{q^m}{b^m} \in Q$. حال از اینکه $x^{-n}q = b$ نتیجه می‌شود که $\left(\frac{q^m}{b^m}\right) x^{-nm} = ۱$. لذا $x^{nm} = \frac{q^m}{b^m} \in Q \subseteq R$ و در نتیجه $x^{nm} \in R$ یعنی $x \notin E(R)$، که این متناقض با انتخاب x است. پس برای هر $q \in Q$، $x^{-n}q \in Q$.

□

قضیه ۹.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح و M ایده‌آل ماکسیمالی از R باشد. در این صورت R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است اگر و تنها اگر M یک ایده‌آل اول شبه قوی از R باشد.

اثبات. $\Leftarrow$) بنابر تعریف دامنه شبه تقریباً ارزیابی واضح است.

$\Leftarrow$) فرض می‌کنیم M یک ایده‌ال اول شبه قوی از R باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم R یک دامنه شبه موضعی است. برای این منظور فرض می‌کنیم N ایده‌ال ماکسیمال دیگری از R باشد به طوری که $M \neq N$. با توجه به اینکه M یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است بنابر گزاره ۶.۱، برای هر $a \in M$ و $b \in N \backslash M$، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $\frac{a^n}{b^n} \in M$، پس برای یک $r \in M$، $a^n = b^n r \in N$. چون N یک ایده‌ال اول از R است لذا $a \in N$ و در نتیجه $M \subseteq N$ که این متناقض با ماکسیمال بودن M است، پس R یک دامنه شبه موضعی با ایده‌ال ماکسیمال M است. حال فرض می‌کنیم P یک ایده‌ال اول از R باشد. با توجه به اینکه M یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است و $P \subseteq M$ لذا بنابر گزاره ۸.۱، P نیز یک ایده‌ال اول شبه قوی از R می‌باشد. $\square$

فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌الی از آن باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ ،} n \text{ برای یک عدد طبیعی }\}$$

ایده‌الی از R و شامل I است، که آن را رادیکال I می‌نامیم.

همچنین فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌الی سره از آن باشد. ایده‌ال اول P از R را ایده‌ال اول مینیمال I می‌نامیم هرگاه $I \subseteq P$ و هیچ ایده‌ال اولی از R شامل I، اکیداً مشمول در P نباشد. مجموعه همه ایده‌ال‌های اول مینیمال I را با $Min(I)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۰.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت برای هر ایده‌ال سره I از R داریم:

$$.\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Min(I)} P$$

اثبات. به قضیه ۴۸.۳ از [۹] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد و $a, b \in R$. در این صورت می‌گوییم a، b را عاد می‌کند و می‌نویسیم $a \mid b$، اگر یک $r \in R$ موجود باشد به طوری که $ar = b$. اگر a، b را عاد نکند می‌نویسیم $a \nmid b$.

گزاره ۱۲.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح باشد. در این صورت مجموعه ایده‌ال‌های اول R کاملاً مرتب هستند اگر و تنها اگر برای هر دو عنصر ناصفر و غیریکال a و b از R، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $a \mid b^n$ یا $b \mid a^n$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم مجموعه ایده‌ال‌های اول R کاملاً مرتب باشند. در این صورت هر ایده‌ال سره R تنها دارای یک ایده‌ال اول مینیمال است و در نتیجه رادیکال هر ایده‌ال سره از R، یک ایده‌ال اول است. فرض می‌کنیم a و b عناصر ناصفر و غیریکال R باشند و $I =< a >$ و $J =< b >$. در این صورت اگر P و Q به ترتیب ایده‌ال‌های اول مینیمال I و J باشند آنگاه $\sqrt{I} = P$ و $\sqrt{J} = Q$. حال با توجه به اینکه مجموعه ایده‌ال‌های اول R کاملاً مرتب‌اند، لذا $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ یا $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. اگر $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$ چون $a \in \sqrt{I}$، آنگاه

$a \in \sqrt{J}$ و در نتیجه برای یک عدد طبیعی n، $a^n \in J =< b >$ و لذا $b \mid a^n$. همچنین اگر $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$، با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که برای یک عدد طبیعی n، $a \mid b^n$.

$\Leftarrow$) فرض می‌کنیم P و Q دو ایده‌ال اول متمایز از R باشند و $P \nsubseteq Q$. در این صورت عنصر $p \in P$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $p \notin Q$. بنابراین طبق فرض برای هر $q \in Q$، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $p \mid q^n$ یا $q \mid p^n$. اگر $q \mid p^n$ آنگاه $p \in Q$، که این متناقض با انتخاب p است. پس برای هر $q \in Q$، یک عدد طبیعی n وجود دارد که $p \mid q^n$ و لذا $q \in P$. در نتیجه $Q \subseteq P$. $\square$

یادآوری می‌کنیم که عنصر $a \in R$ در حلقه R یکال است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌ال ماکسیمال M از R داشته باشیم $a \notin M$. بنابراین اگر R یک حلقه شبه موضعی با ایده‌ال ماکسیمال M باشد آنگاه هر عنصر R که عضو M نباشد، یکال است.

قضیه ۱۳.۱ دامنه صحیح R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in E(R)$، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که برای هر عنصر غیریکال a از R، $ax^{-n} \in R$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی باشد. در این صورت بنابر نتیجه ۵.۱، R یک دامنه شبه موضعی است. پس فرض می‌کنیم M ایده‌ال ماکسیمال R باشد و $x \in E(R)$. با توجه به اینکه M یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است بنابر لم ۲.۱، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x^{-n}M \subseteq M \subseteq R$. در نتیجه برای هر

عنصر غیریکال a از R، $ax^{-n} \in R$.

$\Rightarrow$) فرض می‌کنیم برای هر $x \in E(R)$، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که برای هر عنصر غیریکال a از R، $ax^{-n} \in R$. برای اثبات اینکه دامنه صحیح R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است، ابتدا باید نشان دهیم که R شبه موضعی است. برای این منظور فرض می‌کنیم a و b عناصر ناصفر و غیریکال R باشند به طوری که برای هر عدد طبیعی n، $a \nmid b^n$، پس برای هر عدد طبیعی n، $\frac{b^n}{a} \notin R$. قرار می‌دهیم $x = \frac{b}{a}$. در این صورت برای هر عدد طبیعی n، $x^n = \frac{b^n}{a^n} \notin R$ و در نتیجه $x \in E(R)$. لذا بنابر فرض قضیه، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که برای هر عنصر غیریکال c از R، $cx^{-n} \in R$. بنابراین $\frac{a^{n+1}}{b^n} = ax^{-n} \in R$. بدین ترتیب برای یک عدد طبیعی n، $b \mid a^{n+1}$. پس بنابر گزاره ۱.۱۲، مجموعه ایده‌ال‌های اول R کاملاً مرتب هستند و لذا R شبه موضعی است. حال فرض می‌کنیم M ایده‌ال ماکسیمال R باشد و $x \in E(R)$. پس بنابر فرض قضیه، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که برای هر عنصر a از M، $ax^{-n} \in R$. اگر $ax^{-n} \notin M$، آنگاه چون M تنها ایده‌ال ماکسیمال R است پس ax^{-n} در R یکال است و در نتیجه $a^{-1}x^n = (ax^{-n})^{-1} \in R$. از طرفی $a \in R$ پس $x^n = aa^{-1}x^n \in R$ و لذا $x \notin E(R)$، که این متناقض با انتخاب x است. بنابراین برای هر a از M، $ax^{-n} \in M$ و لذا $x^{-1}M \subseteq M$. پس بنابر لم ۱.۲، M یک ایده‌ال اول شبه قوی از R است و در نتیجه بنابر قضیه ۱.۹، R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است. $\square$

گزاره ۱۴.۱ دامنه صحیح R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in R$، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $a^n \mid b^n$ یا یک عدد طبیعی m وجود داشته باشد که برای هر عنصر غیریکال c از R، $b^m \mid ca^m$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم a و b عناصری از R باشند به طوری که برای هر عدد طبیعی n، $a^n \nmid b^n$. قرار می‌دهیم $x = \dfrac{b}{a}$. در این صورت برای هر عدد طبیعی n، $x^n \notin R$ و در نتیجه $x \in E(R)$. حال چون طبق فرض، R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است بنابر قضیه ۱۳.۱، یک عدد طبیعی m وجود دارد به طوری که برای هر عنصر غیریکال c از R، $cx^{-m} \in R$. بنابراین $\dfrac{ca^m}{b^m} = cx^{-m} \in R$ و لذا $b^m \mid ca^m$.

$\Rightarrow$) فرض می‌کنیم $x \in E(R)$. بنابراین عناصر a و b از R وجود دارند به طوری که $x = \dfrac{b}{a}$. حال اگر یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $a^n \mid b^n$ آنگاه $x^n = \dfrac{b^n}{a^n} \in R$ و در نتیجه $x \notin E(R)$، که این متناقض با انتخاب x است. در غیر این صورت بنابر فرض، یک عدد طبیعی m وجود دارد به طوری که برای هر عنصر غیریکال c از R، $b^m \mid ca^m$. لذا $\dfrac{ca^m}{b^m} \in R$ و در نتیجه برای یک عدد طبیعی m، $cx^{-m} = c\dfrac{a^m}{b^m} \in R$. بنابراین بنابر قضیه ۱۳.۱، R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است. $\square$

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد. R را یک دامنه ارزیابی می‌نامیم هرگاه به ازای هر عنصر ناصفر x از K، $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد. یک ایده‌ال اول P از R، یک ایده‌ال اول قوی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in K$، اگر $xy \in P$ آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

گزاره ۱۷.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K و P ایده‌ال اولی از R باشد. در این صورت P یک ایده‌ال اول قوی از R است اگر و تنها اگر برای هر $x \in K\backslash R$، $x^{-1}P \subseteq P$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم P یک ایده‌ال اول قوی از R باشد، $x \in K\backslash R$ و $p \in P$. در این صورت $x(x^{-1}p) = (xx^{-1})p = p \in P$. چون P ایده‌ال اول قوی R است پس $x \in P$ یا $x^{-1}p \in P$. با توجه به اینکه $x \notin R$ پس $x \notin P$ و لذا $x^{-1}p \in P$، بنابراین $x^{-1}P \subseteq P$.

$\Rightarrow$) فرض می‌کنیم برای هر $x \in K\backslash R$، داشته باشیم $x^{-1}P \subseteq P$. همچنین فرض می‌کنیم a و b عناصری از K باشند به طوری که $ab \in P$. اگر $a, b \in R$ آنگاه از اول بودن P نتیجه می‌شود که $a \in P$ یا $b \in P$. اگر $a \notin R$ آنگاه بنابر فرض داریم $a^{-1}P \subseteq P$ و بنابراین $b = a^{-1}ab \in P$. □

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد. در این صورت R را یک دامنه شبه ارزیابی گویند اگر هر ایده‌ال اول P از R، یک ایده‌ال اول قوی باشد.

گزاره ۱۹.۱ فرض کنید R یک دامنه شبه ارزیابی باشد. در این صورت مجموعه ایده‌ال‌های اول R، کاملاً مرتب هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم P و Q دو ایده‌ال اول از R باشند و $P \nsubseteq Q$. پس عنصر $a \in P \backslash Q$ وجود دارد به طوری که برای هر $b \in Q$، $ab^{-1} \notin R$ و لذا بنابر گزاره ۱۷.۱، $ba^{-1}P \subseteq P$. بنابراین $b = ba^{-1}a \in P$ و در نتیجه $Q \subseteq P$. □

به روشنی از گزاره فوق نتیجه می‌شود که هر دامنه شبه ارزیابی، شبه موضعی است.

گزاره ۲۰.۱ هر دامنه ارزیابی، یک دامنه شبه ارزیابی است.

اثبات. فرض می‌کنیم R یک دامنه ارزیابی با میدان کسرهای K و P ایده‌ال اولی از R باشد. همچنین فرض می‌کنیم x و y عناصری از K باشند به طوری که $xy \in P$. اگر $x, y \in R$، آنگاه از اول بودن P نتیجه می‌شود که $x \in P$ یا $y \in P$. بنابراین فرض می‌کنیم $x \notin R$، چون R یک دامنه ارزیابی است پس $x^{-1} \in R$ و در نتیجه $y = xyx^{-1} \in P$. □

قضیه ۲۱.۱ دامنه شبه موضعی R با ایده‌ال ماکسیمال M یک دامنه شبه ارزیابی است اگر و تنها اگر M یک ایده‌ال اول قوی از R باشد.

اثبات. $\Leftarrow$) بنابر تعریف دامنه شبه ارزیابی واضح است.

$\Rightarrow$) فرض می‌کنیم M یک ایده‌ال اول قوی از R باشد. باید ثابت کنیم هر ایده‌ال

اول P از R، اول قوی است. بنابر گزاره ۱۷.۱، کافی است نشان دهیم برای هر $x \in K \backslash R$، $x^{-1}P \subseteq P$. فرض می‌کنیم $x \in K \backslash R$ و $p \in P$. چون $p \in M$ و M ایده‌ال اول قوی است لذا $x^{-1}p \in x^{-1}M \subseteq M$. بنابراین $x^{-2}p = x^{-1}(x^{-1}p) \in x^{-1}M \subseteq M$ و در نتیجه $(x^{-1}p)^2 = (x^{-2}p)p \in P$. چون $x^{-1}p \in R$ و P یک ایده‌ال اول R است پس $x^{-1}p \in P$ و لذا $x^{-1}P \subseteq P$. □

گزاره ۲۲.۱ هر دامنه شبه ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است.

اثبات. فرض می‌کنیم R یک دامنه شبه ارزیابی با ایده‌ال ماکسیمال M باشد و $x \in E(R)$. بنابراین M یک ایده‌ال اول قوی از R است و $x \notin R$، لذا بنابر گزاره ۱۷.۱، $x^{-1}M \subseteq M$. در نتیجه برای هر عنصر غیر یکال a از R، چون $a \in M$ پس $x^{-1}a \in x^{-1}M \subseteq M \subseteq R$. لذا بنابر قضیه ۱۳.۱، R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است. □

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد. در این صورت R را یک دامنه تقریباً ارزیابی گویند هرگاه برای هر عنصر ناصفر $x \in K$، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $x^n \in R$ یا $x^{-n} \in R$.

گزاره ۲۴.۱ فرض کنید R یک دامنه تقریباً ارزیابی باشد. در این صورت مجموعه ایده‌ال‌های اول R، کاملاً مرتب هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم P و Q دو ایده‌ال اول از R باشند به طوری که $P \nsubseteq Q$. در این صورت عنصر $p \in P$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $p \notin Q$. حال فرض می‌کنیم $q \in Q$ و $x = \frac{p}{q}$. اگر برای یک عدد طبیعی n، $x^n \in R$ ،$\frac{p^n}{q^n} = x^n \in R$، آنگاه به ازای یک $r \in R$، $p^n = rq^n \in Q$ و در نتیجه $p \in Q$ که این متناقض با انتخاب p است، پس برای هر عدد طبیعی n، $x^n \notin R$. چون R یک دامنه تقریباً ارزیابی است پس برای یک عدد طبیعی n، $\frac{q^n}{p^n} = x^{-n} \in R$. بنابراین به ازای یک $r' \in R$، $q^n = r'p^n \in P$ و لذا $q \in P$. در نتیجه $Q \subseteq P$. $\square$

از گزاره فوق بلافاصله نتیجه می‌شود که هر دامنه تقریباً ارزیابی، شبه موضعی است.

گزاره ۲۵.۱ هر دامنه تقریباً ارزیابی، یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است.

اثبات. فرض می‌کنیم R یک دامنه تقریباً ارزیابی با ایده‌ال ماکسیمال M باشد و $x \in E(R)$. بنابراین برای هر عدد طبیعی n، $x^n \notin R$ و لذا از اینکه R یک دامنه تقریباً ارزیابی است نتیجه می‌شود که برای یک عدد طبیعی n، $x^{-n} \in R$. حال برای هر عنصر غیر یکال a از R، چون $a \in M$ و $x^{-n} \in R$ پس $ax^{-n} \in M \subseteq R$. در نتیجه بنابر قضیه ۱۳.۱، R یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی است. $\square$

بنابراین بنابر آنچه گفته شد استلزامهای زیر را داریم که لزوماً عکس آنها برقرار نیست: