

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



گروه ریاضیات و کاربردها

مخروط‌های شبکه موضوعاً محدب

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مطلبی

توسط:

کردستان عادل‌فر

دانشگاه محقق اردبیلی

زمستان ۱۳۸۹

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران
بهترین پشتیبان است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهِشان
به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم .

تقدیر و سپاسگزاری

در آغاز لازم می‌دانم از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام که در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبانم بوده‌اند تشکر نمایم. همچنین از زحمات اساتید محترم، دانشجویان صمیمی و مهربان دانشگاه محقق اردبیلی و به ویژه استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدرضا مطلبی که با راهنمایی‌های خود راه گشای اینجانب بوده‌اند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

از خواهران و برادران بزرگواریم به خصوص جناب آقای مهندس سوران عادل‌فر به خاطر همکاری و راهنمایی‌های ارزشمندشان و همه کسانی که با تحمل دشواری‌ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم و این نیست جز جلوه‌ای از لطف و رحمت پروردگاری که از ادای شکر حتی یک نعمت او ناتوانم.

کردستان عادل‌فر

بهمن ۱۳۸۹

نام خانوادگی: عادل‌فر	نام: کردستان
عنوان پایان‌نامه: مخروط‌های مشبکه‌ی موضعاً محدب	
استاد راهنما: دکتر محمدرضا مطلبی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی محض
دانشگاه: محقق اردبیلی	دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۹/۱۱/۶	تعداد صفحه: ۹۸
واژه‌های کلیدی: مخروط موضعاً محدب، مشبکه، همگرای ترتیبی	
<p>چکیده: در این پایان‌نامه ساختارهای مشبکه را در مخروط‌های موضعاً محدب بررسی می‌کنیم؛ یعنی مخروط‌های مرتبی که دارای توپولوژی موضعاً محدب می‌باشند. مثال‌هایی از اعداد حقیقی توسیع یافته \mathbb{R}، مخروط‌هایی از توابع \mathbb{R} - مقدار و مخروط‌هایی از زیرمجموعه‌های محدب یک فضای برداری موضعاً محدب آورده می‌شود. مفهوم کامل ترتیبی، که در آن زیرمجموعه‌های از پایین کراندار دارای سوپریمم و اینفیمم می‌باشند، جالب توجه است. در نهایت همگرای ترتیبی، عملگرهای خطی پیوسته ترتیبی و همچنین هومومورفیسم‌های مشبکه را تعریف کرده و بررسی می‌کنیم.</p>	

فهرست مطالب

مقدمه و

فصل ۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ مخروط‌ها ۲

۲-۱ مخروط‌های پیش مرتب ۳

۳-۱ مخروط‌های موضعاً محدب ۴

۴-۱ عملگرهای خطی ۱۳

فصل ۲ پیش‌ترتیب ضعیف و توپولوژی نسبی

۱-۲ پیش‌ترتیب ضعیف ۲۲

۲-۲ توپولوژی‌های نسبی ۲۹

۳-۲ مؤلفه‌های کرانداری ۴۲

فصل ۳ مخروط‌های شبکه‌ی موضعاً محدب

۱-۳ مخروط‌های شبکه‌ی موضعاً محدب ۴۶

۲-۳ مخروط‌های شبکه‌ی کامل موضعاً محدب ۵۰

فصل ۴ مؤلفه‌های صفر

۱-۴ مؤلفه‌های صفر ۵۸

۲-۴ مثال‌ها ۶۵

فصل ۵ همگرایی ترتیبی در مخروط‌های شبکه‌ی کامل موضعاً محدب

۱-۵ همگرایی ترتیبی ۷۱

۲-۵ سری‌ها ۷۸

فصل ۶ عملگرهای خطی پیوسته ترتیبی

۱-۶ عملگرهای خطی پیوسته ترتیبی ۸۲

۲-۶ همومورفیسم‌های شبکه ۸۳

۳-۶ مقایسه توپولوژی‌ها ۸۷

فهرست منابع

منابع لاتین ۹۲

واژه‌نامه

فارسی به انگلیسی ۹۵

مقدمه

مشبکه عبارت است از مجموعه E همراه با یک ترتیب جزئی مانند " \leq " که هر زیرمجموعه دو عضوی مثل $\{a,b\}$ ، دارای سوپریمم (کوچکترین کران بالا) و اینفیمم (بزرگترین کران پایین) می‌باشد. سوپریمم دو عضو a و b را با avb و اینفیمم آنها را با aAb نشان می‌دهند.

مخروطها با رابطه ترتیب در ارتباط هستند. یک رابطه ترتیب در مخروط آن را به مخروط موضعاً محدب تبدیل می‌کند. نظریه مخروطهای موضعاً محدب در سال ۱۹۹۲ توسط «کلاوس کمیل^۱» و «والتر روت^۲» مطرح گردیده است. با استفاده از مفهوم نظری ترتیب یک ساختار توپولوژیک در مخروطهای موضعاً محدب معرفی می‌شود که این ساختار پیچیده‌تر از ساختار در فضاهای برداری توپولوژیک است؛ در واقع با یک نشاندن می‌توان نشان داد هر فضای برداری توپولوژیک مرتب موضعاً محدب یک مخروط موضعاً محدب است (مثال ۱-۳-۱۲).

با بکارگیری عضوهای غیر کراندار در مخروطهای موضعاً محدب، ساختارهای قابل ملاحظه‌ای از جمله ساختارهای مشبکه حاصل می‌شود که بررسی این ساختارها در مخروطهای موضعاً محدب هدف اصلی این پایان‌نامه می‌باشد. بنابراین مخروطهای مشبکه موضعاً محدب تعریف می‌شوند که سوپریمم و اینفیمم زیرمجموعه‌ها در آن، نسبت به ترتیب مذکور روی مخروط در نظر گرفته می‌شود. به‌ویژه با قوی‌تر شدن شرایط سوپریمم و اینفیمم در مخروطهای موضعاً محدب مفهوم نظریه انتگرال معنی پیدا می‌کند و مخروطهای مشبکه کامل موضعاً محدب نیز تعریف می‌شوند.

این پایان‌نامه با عنوان مخروطهای مشبکه موضعاً محدب بر اساس مقاله [8] می‌باشد و از دیگر منابع برای توضیح و تفهیم بیشتر مطالب استفاده شده است.

فصل ۱ شامل تعاریف، خواص اصلی و مجموعه مثال‌های استاندارد برای مخروطهای موضعاً محدب می‌باشد که در بقیه فصل‌ها از آنها استفاده می‌شود.

فصل ۲ مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول روی مخروطهای موضعاً محدب پیش‌ترتیبی ضعیف‌تر از پیش‌ترتیب اصلی معرفی خواهد شد. ملاحظه می‌شود مخروط با پیش‌ترتیب ضعیف نیز

1-K. Keimel

2- W. Roth

مخروط پیش‌مرتب می‌باشد. در بخش دوم همسایگی‌های نسبی برای هر عضو مخروط موضعاً محدب تعریف شده‌اند. این همسایگی‌ها توپولوژی‌هایی را ایجاد می‌کنند که با توجه به وجود عضوهای غیر کراندار، ضعیف‌تر از توپولوژی‌های اصلی می‌باشند. در آخر فصل مؤلفه‌هایی تحت عنوان مؤلفه‌های کراندار آورده شده است.

وجود عضوهای غیر کراندار در مخروط‌های موضعاً محدب بسیار مؤثر است لذا در فصل ۳، مخروط-های مشبکه موضعاً محدب تعریف شده‌اند. در بخش دوم همین فصل، مخروط‌های مشبکه کامل موضعاً محدب تعریف شده‌اند که کلی‌تر از مخروط‌های مشبکه موضعاً محدب می‌باشند. در نهایت نتایجی به-دست می‌آید که در فصل‌های بعد کاربرد آنها مشاهده می‌شود.

در فصل ۴، مؤلفه صفر برای هر عضو در مخروط مشبکه کامل پایینی موضعاً محدب تعریف شده و خواص مهم مربوط به آن از جمله قانون حذف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه مثال‌هایی ذکر می‌شود. فصل ۵ که در دو بخش تنظیم شده، همگرایی ترتیبی را برای مخروط مشبکه کامل موضعاً محدب تعریف کرده و بر اساس آن مفهومی از سری‌ها ذکر می‌شود.

در فصل ۶ عملگرهای پیوسته ترتیبی و هومومورفیسم‌های مشبکه معرفی شده و قضایای مربوط به آنها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در نهایت توپولوژی نسبی متقارن با توپولوژی اصلی مقایسه شده و ثابت می‌شود که همگرایی تور در مخروط مشبکه کامل موضعاً محدب به عضوی از مخروط، نسبت به توپولوژی نسبی متقارن، همگرایی ترتیبی به آن عضو را نتیجه می‌دهد.

فهرست منابع

- 1- Kantorovič, L. V. 1937. *Lineare halbgeordnete Räume*, Rec. Math., Moscow 2, 121-168.
- 2- Kantorovič, L. V., Vulikh, B. Z., Pinsker, A. G. 1950. *Functional Analysis in Partially Ordered Spaces (in Russian)*, Gosudarstv. Izdat. Tekhn-Teor, Lite., Moscow.
- 3- Keimel, K., Roth, W. 1992. *Ordered Cones and Approximation*, Lecture Notes in Mathematics 1517, Springer verlag, Heidelberg- Berlin-New York.
- 4- Meyer- Niebreg, P. 1991. *Banach Lattices*, Springer, Berlin.
- 5- Roth, W. 2005. *Boundedness and Connectedness Components for Locally Convex Cones*, New Zealand Journal of Mathematics 34, 143-158.
- 6- Roth, W. 2000. *Hahn-Banach type theorems for Locally Convex Cones*, Journal of the Australian Mathematical Society (Series A) 68, No. 1, 104-125.
- 7- Roth, W. 1998. *Locally Convex Cones as Generalizations of Locally Convex Vector Spaces*, Far East. Journal of Mathematical Sciences, Special Volume, Part II 215-245.
- 8- Roth, W. 2009. *Locally Convex Lattice Cones*, Journal of Convex Analysis Volume 16, No. 1, 1-31.

9- Roth, W. 2002. *Separation Properties for Locally Convex Cones*, Journal of Convex Analysis, 9 (1), 301-307.

10- Rudin, W. 1966. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York.

11- Schäfer, H. H. 1974. *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer, Berlin.

12- Schäfer, H. H. 1980. *Topological Vector Spaces*, Springer, New York.

13- Willard, S. 1970. *General Topology*, Addison-Wesley, Reading.

واژه‌نامه

<i>Bounded above</i>	از بالا کراندار
<i>Bounded below</i>	از پایین کراندار
<i>Reflexive</i>	بازتابی
<i>Closure</i>	بستار
<i>Anti - symmetric</i>	پادمتقارن
<i>Base</i>	پایه
<i>Local base</i>	پایه موضعی
<i>Convexhull</i>	پوش محدب
<i>Preorder</i>	پیش ترتیب
<i>Weak preorder</i>	پیش ترتیب ضعیف
<i>Order continuous</i>	پیوسته ترتیبی
<i>Uniformly continuous</i>	بطور یکنواخت پیوسته
<i>Linear functional</i>	تابع خطی
<i>Sublinear functional</i>	تابع زیرخطی
<i>Extended superlinear functional</i>	تابع زبرخطی توسیع یافته
<i>Upper topology</i>	توپولوژی بالایی
<i>Lower topology</i>	توپولوژی پایینی
<i>Discrete topology</i>	توپولوژی گسسته
<i>Symmetric topology</i>	توپولوژی متقارن
<i>Net</i>	تور
<i>Cauchy net</i>	تور کوشی

<i>Distributive</i>	توزیع پذیر
<i>Commutative</i>	تعویض پذیر
<i>Absorbing</i>	جاذب
<i>Subcone</i>	زیر مخروط
<i>Neighborhood system</i>	سیستم همسایگی
<i>Associative</i>	شرکت پذیر
<i>Pseudometric</i>	شبه متریک
<i>Increasing</i>	صعودی
<i>Solid</i>	صلب
<i>Linear operator</i>	عملگر خطی
<i>Topological vector space</i>	فضای برداری توپولوژیک
<i>Locally convex topological vector space</i>	فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب
<i>Ordered vector space</i>	فضای برداری مرتب
<i>Cancellation law</i>	قانون حذف
<i>Polar</i>	قطبی
<i>Transitive</i>	متعدی
<i>Symmrtric</i>	متقارن
<i>Directed set</i>	مجموعه جهتدار
<i>Convex</i>	محدب
<i>Cone</i>	مخروط
<i>Preordered cone</i>	مخروط پیش مرتب
<i>Dual cone</i>	مخروط دوگان

<i>Ordered cone</i>	مخروط مرتب
<i>Locally convex upward lattice cone</i>	مخروط مشبکه بالایی موضعاً محدب
<i>Locally convex downward lattice cone</i>	مخروط مشبکه پایینی موضعاً محدب
	مخروط مشبکه کامل بالایی موضعاً محدب
<i>Locally convex upward complete lattice cone</i>	
	مخروط مشبکه کامل پایینی موضعاً محدب
<i>Locally convex downward complete lattice cone</i>	
<i>Locally convex complete lattice cone</i>	مخروط مشبکه کامل موضعاً محدب
<i>Locally convex lattice cone</i>	مخروط مشبکه موضعاً محدب
<i>Locally convex cone</i>	مخروط موضعاً محدب
<i>Full locally convex cone</i>	مخروط موضعاً محدب پُر
<i>Lattice</i>	مشبکه
<i>Vector lattice</i>	مشبکه برداری
<i>Topological vector lattice</i>	مشبکه برداری توپولوژیک
<i>Upper boundedness component</i>	مؤلفه کرانداری بالا
<i>Lower boundedness component</i>	مؤلفه کرانداری پایین
<i>Symmetric boundedness component</i>	مؤلفه کرانداری متقارن
<i>Zero components</i>	مؤلفه‌های صفر
<i>Decreasing</i>	نزولی
<i>Embedding</i>	نشاننده
<i>Extreme point</i>	نقطه اکسترم
<i>Face</i>	وجه

<i>Upper neighborhood</i>	همسایگی بالایی
<i>Lower neighborhood</i>	همسایگی پایینی
<i>Upper relative neighborhood</i>	همسایگی نسبی بالایی
<i>Lower relative neighborhood</i>	همسایگی نسبی پایینی
<i>Symmetric relative neighborhood</i>	همسایگی نسبی متقارن
<i>Symmetric neighborhood</i>	همسایگی متقارن
<i>Order convergence</i>	همگرای ترتیبی
<i>Pointwise convergence</i>	همگرای نقطه به نقطه
<i>Lattice homomorphism</i>	هومومورفیسم مشبکه
<i>Upward lattice homomorphism</i>	هومومورفیسم مشبکه بالایی
<i>Downward lattice homomorphism</i>	هومومورفیسم مشبکه پایینی
<i>Monotone</i>	یکنوا

Surname: Adelifar	Name: Kurdistan
Title of thesis: Locally convex lattice cones	
Supervisor: Dr. M. R. Motallebi	
Graduate degree: M. Sc.	Major: Pure of Mathematics
Specialty: Analysis	University: Mohaghegh Ardabili
Faculty: Sciences	Graduation date: 26/1/2011
Number of pages: 98	
Keywords: Locally convex cone, lattice, order convergence	
<p>Abstract: In this thesis we investigate lattice structures on locally convex cones that are ordered cones that carry a locally convex topology. Examples include the extended reals $\overline{\mathbb{R}}$, cones of $\overline{\mathbb{R}}$-valued functions and cones of convex subsets of a locally convex vector space. The case of order completeness, where bounded below sets have suprema and infima, is of particular interest. Finally we define and study the notions, order completeness, order continuous linear operators and lattice homomorphisms.</p>	



Department of Mathematics and Applications

Locally convex lattice cones

Supervisor

Dr. Mohammad Reza Motallebi

By

Kurdistan Adelifar

University of Mohaghegh Ardabili

2011, January

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی