فهرست مندرجات

فهرست علائم

برآورد درستنمایی ماکسیمم	MLE
برآورد درستنمایی ماکسیمم تقریبی	AMLE
تابع چگالی	pdf
زنجیر مارکف مونت کارلو	MCMC
میانگین توان دوم خطا	MSE
نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع	IId

چکیده

کوندا و جواردر (۲۰۰۵) طرح سانسور هیبرید پیشرونده نوع دوم که در آزمون های طول عمر و قابلیت اعتماد بسیار مرسوم می باشد، معرفی و به بررسی استنباطی و اثبات برخی ویژگی ها در این سانسور پرداختند. در این رساله سانسور هیبرید پیشرونده نوع دوم هنگامی که توزیع طول عمرها نمایی می باشند، بررسی می شود. از روش برآورد درستنمایی ماکسیمم برای برآورد پارامتر مجهول استفاده کرده و سپس فواصل اطمینان مختلف را محاسبه می کنیم. با استفاده از شبیه سازی، نتایج حاصل را با یکدیگر مقایسه می نماییم. همچنین به بررسی داده های سانسور هیبرید و سانسور پیشرونده نوع دوم زمانی که توزیع طول عمرها وایبل می باشند، پرداخته و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و ماکسیمم درستنمایی تقریبی و بیز را به دست می آوریم. در ادامه به عنوان کار جدید، به بررسی سانسور هیبرید پیشرونده نوع دوم با توزیع طول عمرهای وایبل پرداخته و از روش های برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی تقریبی برای برآورد پارامترهای مجهول استفاده کرده و سپس برآورد بیز را با توزیع پیشین مناسب با استفاده از نمونه گیری گیبس محاسبه می کنیم. با استفاده از شبیه سازی، به مقایسه نتایج حاصل از برآوردهای معرفی شده می پردازیم. برای درک بهتر مطالب مثال های عددی از داده های واقعی را همراه با جداول حاصل ارائه می کنیم و در پایان برنامه های کامپیوتری نوشته شده توسط نرم افزار R در فصل هفتم قرار داده شده است.

واژه‌های کلیدی: برآورد بیز، برآورد درستنمایی ماکسیمم، برآورد درستنمایی ماکسیمم تقریبی، توزیع نمایی، توزیع وایبل، سانسور هیبرید، سانسور پیشرونده نوع دوم، سانسور هیبرید پیشرونده نوع دوم، نمونه گیری گیبس.

پیشگفتار

بسیاری از اوقات در آزمون‌های طول عمر، آزمایش‌های کلینیکی، مطالعات تأثیر دوز (Dose) سم‌ها، تحقیقات زیست شناسی و دیگر زمینه‌های علم آمار، این امکان وجود دارد که زمان شکست کامل بعضی از واحدها مشاهده نشود، به این معنی که در برخی وضعیت‌ها، برای برخی از واحدها در طول آزمایش شکست اتفاق نمی‌افتد و یا از ادامهٔ آزمایش باز نمی‌مانند و به جای دانستن زمان شکست، تمام آنچه می‌دانیم این است که این واحدها طول عمری متجاوز از مقداری مانند y دارند. این محدودیت‌های پیش آمده در نمونه‌ها را سانسور گوییم. در مطالعات طبی و یا تحلیل های قابلیت اعتماد، بسیار معمول است که شکست هر واحد به بیش از یک علت مربوط باشد. به علاوه، داده های مشاهده شده اغلب سانسور شده اند. طرح سانسور هیبرید که ترکیبی از طرح های سانسور نوع یک و دو می باشد، در آزمون های طول عمر و یا آزمایشات قابلیت اعتماد بسیار سودمند است. اخیراً طرح سانسور پیشرونده نوع دوم برای تحلیل داده های با قابلیت اعتماد بسیار بالا معروف شده است. اما در این حالت ممکن است طول زمان آزمایش بسیار طولانی باشد. بنابراین طرح سانسور هیبرید پیشرونده نوع دوم معرفی می شود که ترکیبی از طرح های سانسور پیشرونده نوع دوم و سانسور هیبرید می باشد.

این رساله مشتمل بر هفت فصل است که ابتدای هر فصل شامل مقدمه ای است که جزئیات مطالب مندرج در آن فصل را توضیح می دهد، در فصل اول ابتدا مفاهیم و مقدمات مورد نیاز برای سایر فصل ها را بیان می کنیم. در فصل دوم مفاهیم وکلیاتی درباره داده‌های سانسور شده و انواع سانسورها بیان می‌کنیم. در فصل سوم توضیح مختصری در رابطه با برخی از الگوریتم‌های تکرار عددی داده می‌شود. در فصل چهارم به معرفی سانسور جدیدی به نام سانسور هیبرید پیشرونده نوع دوم پرداخته و برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامتر مجهول و فواصل اطمینان مختلف بر اساس این سانسور را در توزیع نمایی به دست می آوریم و با استفاده از شبیه سازی به مقایسه نتایج عددی می پردازیم. در فصل پنجم به تحلیل داده های سانسور شده هیبرید و داده های سانسور شده پیشرونده نوع دوم در توزیع وایبل پرداخته و MLE، AMLE و برآوردگرهای بیزی و فواصل باور را به دست می آوریم. در فصل ششم به کمک فصل های چهارم و پنجم به بررسی داده های نمونه سانسور شده هیبرید پیشرونده نوع دوم در توزیع وایبل پرداخته و MLE، AMLE و برآوردگرهای بیز و فواصل باور را با استفاده از نمونه گیری گیبس که در فصل سوم معرفی شد بررسی کرده و با استفاده از شبیه سازی نتایج حاصل را اعلام می نماییم. در انتها در فصل هفتم، برنامه های کامپیوتری مربوط به فصل های چهارم و ششم که توسط نرم افزار R

نوشته شده را قرار داده ایم.
بسیار کوشش شده است تا این رساله را با حداقل کاستی ارائه دهم اما نمی دانم تا چه اندازه در این کار موفق بوده ام. قضاوت را به خوانندگان واگذار می کنم.
در این رساله مطالبی که توسط اینجانب اثبات شده است با علامت $(*)$ و مطالبی که تماماً ایده جدید می‌باشد با $(**)$ مشخص شده‌اند.

در پایان لازم می‌دانم تشکر و قدردانی خالصانه خود را نسبت به استاد عزیز و ارجمندم، سرکار خانم دکتر حبیبی راد که زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند و همچنین جناب آقای دکتر ارقامی که سمت مشاوره این رساله را عهده دار بودند، اعلام نمایم. از داوران محترم، جناب آقای دکتر دوست پرست و سرکار خانم دکتر برات پور که حضور ایشان باعث دلگرمی اینجانب بوده تشکر می نمایم. از سرکار خانم دکتر یوسف زاده که با صبر در امر برنامه نویسی با نرم افزار R اینجانب را یاری و راهنمایی نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از همکاریهای صمیمانه مسئولین کتابخانه که در تهیه مراجع و کتب مورد نیاز اینجانب را یاری رساندند کمال تشکر و احترام را دارم. و نیز زحمات مسئولین آموزش از چشم اینجانب پوشیده نخواهد ماند. در نهایت، از کمک ها، صبر و شکیبایی بی دریغ مادر نازنینم و پدر عزیزم که نهایت عشق و ایثار را به من ارزانی کردند و مرا از تکیه کردن بی نیاز گردانیدند و در تمام مراحل زندگی مرا یاری رساندند، سپاسگزارم.

الهام بیات مختاری

شهریور ۱۳۸۸

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات

۱—۱ مقدمه

در این فصل به تعریف مفاهیم و اصطلاحات مورد نیاز در فصل‌های بعدی می پردازیم. مفاهیمی نظیر داده‌های سانسور شده، روش درستنمایی ماکسیمم، فاصله اطمینان، آمار بیز و مفاهیمی دیگر که در فصول بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۱—۲ داده‌های سانسور شده

یکی از مشکلات در مطالعه داده های زمان تا پیشامد و در واقع آنچه تحلیل بقاء را از سایر مباحث آماری جدا می کند عمل سانسور است. در تحلیل داده های بقاء مانند آزمون های طول عمر، آزمایشهای کلینیکی، مطالعات تأثیر دوز سم ها و دیگر زمینه های علم آمار، این امکان وجود دارد که زمان شکست کامل برخی از واحدها مشاهده نشود. به این معنی که در برخی وضعیت ها، برای برخی از واحدها در طول آزمایش شکست اتفاق نمی افتد و یا از ادامه آزمایش باز نمی مانند و به جای دانستن زمان شکست t، تمام آنچه می دانیم این است که این واحدها طول عمری متجاوز از مقداری مانند y دارند، در آمار سانسور زمانی رخ می دهد که تنها قسمتی از مقدار یک مشاهده معلوم باشد یا هنگامی که یک مقدار خارج از حیطه اندازه گیری روی دهد.

این محدودیت، ممکن است از روی اجبار و یا به صورت اختیاری توسط آمارگر اعمال شود. بعضی از این محدودیت ها عبارتند از: فرصت کم برای اعلام نتایج، طولانی شدن مدت آزمایش، عدم دسترسی به همه واحدها و یا مأیوس شدن از نتیجه دادن همه واحدها. این محدودیت های پیش آمده در نمونه ها را سانسور [۱] می نامند. سانسورها معمولاً به صورت های مختلفی اعمال می شوند. بعضی از انواع سانسورها عبارتند از: سانسور نوع اول [۲]، سانسور نوع دوم [۳]، سانسور تصادفی [۴]، سانسور دوگانه [۵]، سانسور هیبرید [۶] و دیگر سانسورها که در فصل بعدی به طور کامل معرفی خواهند شد. برای جزییات بیشتر دربارهٔ

[۱] Censoring
[۲] Type-I censoring
[۳] Type-II censoring
[۴] Random censoring
[۵] Double censoring
[۶] Hybrid censoring

انواع سانسورها و کاربرد آنها می توان به کتاب های آرنولد و همکاران [۷] (۱۹۹۲)، لاولس[۸] (۱۹۸۲) و نلسن[۹] (۲۰۰۴) مراجعه کرد.
یکی از اولین تلاشها در جهت تحلیل مسائل آماری که شامل داده های سانسور شده بود توسط دانیل برنولی[۱۰] (۱۷٦٦) انجام گرفت که در تحلیل شیوع بیماری آبله و اطلاعات مربوط به مرگ و میر در اثر این بیماری بود.

۱—۳ روش درستنمایی ماکسیمم

روش درستنمایی ماکسیمم[۱۱] (ML) یکی از قدیمی‌ترین و پر اهمیت‌ترین روش‌ها در نظریه برآوردهاست. برآورد ML که متداول‌ترین روش در بین استفاده کنندگان کاربردی از علم آمار است، اولین بار توسط گوس[۱۲] (۱۸۲۱) به کار گرفته شده است شد و پس از آن به صورت گسترده‌ای توسط فیشر[۱۳] (۱۹۲۵) در انتقاد از روش "برآورد گشتاوری " مورد استفاده قرار گرفت.
روش MLE عبارت است از دستورالعملی برای به دست آوردن برآوردگری به نام "برآوردگر درستنمایی ماکسیمم" و مبتنی بر تابع آماری به نام تابع درستنمایی است.

۱—۳—۱ تابع درستنمایی

فرض کنید $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ بردار n متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم $f_\theta(\underline{x})$، $\theta \in \Theta \subseteq R^k$، باشد. آنگاه برای هر مقدار داده شده $\underline{X} = \underline{x}$، تابع درستنمایی $\underline{X}$ را تابع چگالی احتمال توأم $\underline{X}$، یعنی $f_\theta(\underline{x})$، تعریف می کنیم که بصورت تابعی از θ در نظر گرفته می شود و آن را با نماد $L(\theta)$ نمایش می

[۷] Arnold et al
[۸] Lawless
[۹] Nelson
[۱۰] Daniel Bernoulli
[۱۱] Maximum likelihood
[۱۲] Guse
[۱۳] Fisher

دهیم:

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= f_\theta(x_1, ..., x_n), \\
&= L(\theta; x_1, ..., x_n), \\
&= L(.; x_1, ..., x_n).
\end{aligned}
$$

لازم به ذکر است که

الف)تابع درستنمایی $L(\theta)$ لزوماً نسبت به θ مشتق پذیر نیست.

ب) تابع درستنمایی $L(\theta)$ لزوماً یک تابع چگالی احتمال نیست.

ج) اگر $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی از خانواده چگالیهای $\{f_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$ باشد، آنگاه:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

۱-۳-۲ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم

بطور کلی، مقداری از θ را که تابع درستنمایی را ماکسیمم می کند برآوردگر درستنمایی ماکسیمم آن تابع گویند.

به عبارت دیگر باید داشته باشیم

$$L(\hat{\theta}, x_1, ..., x_n) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, ..., x_n)$$

بنابراین اگر $\delta(\underline{X})$ برآوردگری برای θ باشد، بطوریکه:

$$i) P_\theta(\delta(\underline{X}) \in \Theta) = 1$$

$$ii) L(\delta(\underline{x})) \geq L(\theta); \quad \forall \theta \in \Theta$$

آنگاه $\delta(X)$ یک برآوردگر درستنمای ماکسیمم θ تعریف می شود، که معمولاً آن را با $\hat{\theta}$ نشان می دهند.

در اغلب مواقع به خصوص برای مشتق گیری آسانتر آن است که بجای $L(\theta)$ از $l(\theta) = \ln L(\theta)$ استفاده کنیم.

۱—۴ برآورد درستنمایی ماکسیمم تقریبی

برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها (مکانی، مقیاسی) که بر اساس نمونه های کامل و یا سانسور شده می باشند، همواره مورد بحث و بررسی آماردانان واقع شده است. در برخی از توزیع ها روش درستنمایی ماکسیمم، برآوردگرهای واضح و روشنی را ایجاد نمی کند. از این رو، مطلوب است (در صورت امکان) تقریب هایی را برای این روش فراهم آوریم به طوریکه برآوردگرهایی را برای پارامترهای مکانی و مقیاسی که به صورت توابع واضحی از آماره های مرتب هستند، پدید آورد که دارای خواص بهینه باشند. به طور کلی، برآورد درستنمایی ماکسیمم تقریبی[۱۴] زمانی استفاده می شود که نمی توان $\hat{\theta}$ را مستقیماً و بطور دقیق از روش درستنمایی ماکسیمم به دست آورد.
این روش توسط بالاکریشنان [۱۵] (۱۹۸۹a, b, ۱۹۹۰b, c, d)، بالاکریشنان و وارادان [۱۶] (۱۹۹۰)، بالاکریشنان و وانگ[۱۷] (۱۹۹۰a, b) و چان[۱۸] (۱۹۸۹) معرفی و گسترش یافت. لازم به ذکر است که این روش اولین بار توسط بالاکریشنان در زمینه سانسورها مورد استفاده قرار گرفته است. علت نامگذاری آن به عنوان برآورد درستنمایی ماکسیمم تقریبی استفاده از تقریب سری تیلور می‌باشد، که نحوه استفاده از این روش به طور کامل در فصلهای بعدی بیان شده است.

۱—۵ فاصله اطمینان

اگر $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از چگالی $f(.;\theta)$ باشد و T_1 و T_2 دو آماره باشند بطوریکه $T_1 \leq T_2$ و $P_\theta[T_1 < \theta < T_2] = \gamma$ که γ به θ بستگی نداشته و برابر با $1 - \alpha$ باشد، در این صورت بازهٔ تصادفی $[T_1, T_2]$ را یک فاصله اطمینان[۱۹] 100γ درصدی برای θ و γ را ضریب اطمینان می نامیم که بصورت دلخواه توسط پژوهشگر انتخاب می شود. اغلب مقادیر ۵% و ۱% که متناظر با سطوح اطمینان ۹۵% و

[۱۴] Approximate Maximum Likelihood Estimation
[۱۵] Balakrishnan
[۱۶] Varadan
[۱۷] Wong
[۱۸] Chan
[۱۹] Confidence Interval

۹۹٪ می باشد برای α در نظر گرفته می شود.
لازم به ذکر است که تعداد کمی فاصله اطمینان دقیق شناخته شده است. بنابراین، در اکثر مواقع، نیازمند جستجوی راهی برای دستیابی به فواصل اطمینان تقریبی با دقتی در سطح قابل قبول می باشیم. یک راه برای رسیدن به فواصل اطمینان تقریبی، فاصله اطمینان مجانبی [۲۰] است که بصورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱—۵.۱ فاصله اطمینان مجانبی: بازه $[T_1, T_2]$ را فاصله اطمینان مجانبی گویند هر گاه گزاره

$$P(T_1 < \theta < T_2) = \gamma$$

به صورت حدی وقتی n به سمت بینهایت میل کند، درست باشد.

۱—۶ سری تیلور

توابعی نظیر توابع لگاریتمی، نمایی و مثلثاتی وجود دارند که به آسانی قابل محاسبه نیستند. لیکن، چند جمله‌ایها را می‌توان به جای تابع اصلی، وقتی تفاضل تابع و تقریب چند جمله‌ای به قدر کافی کوچک است، در محاسبات به کاربرد.
برای تقریب یک تابع بوسیله چند جمله‌ایها روش‌های متعددی وجود دارند. یکی از این روش ها، روشی ناشی از فرمول تیلور است، که اولین بار توسط یک ریاضیدان انگلیسی به نام بروک تیلور[۲۱] معرفی و به افتخار این ریاضیدان به سری تیلور نام گرفت. در ریاضی، سری تیلور نماینده ای از یک تابع است که بصورت مجموع نا متناهی از جملات که توسط مشتقات آن در یک نقطه محاسبه می شود، می باشد.
اگر سری تیلور حول نقطه صفر مرکزی شود، به آن سری مک لورن گویند که به افتخار ریاضیدان اسکاتلندی بنام کالین مک لورن [۲۲] نامگذاری شده است.
فرض کنید f تابع حقیقی یا مختلط مشتق‌پذیر از تمام مراتب بر بازه I شامل نقطه a باشد که a میتواند حقیقی یا مختلط باشد، در این صورت به ازای هر x در I سری توانی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

[۲۰] Asymptotic Condifence Interval
[۲۱] Brook Taylor
[۲۲] Colin Maclaurin