بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی (جبر)

زیرگروه ها و ایدال های فازی تعمیم یافته

توسط:

روجا یوسفی

استاد راهنما:

دکتر راضیه محجوب

استاد مشاور:

دکتر علی معدنشکاف

اسفند ۱۳۹۲

تقدیم به:

روح آسمانی پدرم

و

مادرانه ترین مادر دنیا، مادرم

قدردانی

سپاس خدایی را که ستایش گران نمی توانند حق سپاسش را ادا کنند و حساب گران از شمارش نعمت های بی پایانش عاجزند، خدایی که نه کلام، گنجایش تعریفش را دارد و نه زمان، فرصت شمارششش را.

اکنون که با لطف خدای مهربان، مرحله ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می دانم از خانواده مهربانم که در تمام مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده اند، سپاس گزاری کنم.

هم چنین از استاد راهنمای فرهیخته ام سرکار خانم دکتر راضیه محجوب که در طول مدت انجام این پایان نامه با دقت و ژرف نگری، متانت، صبر وشکیبایی راهنمایی ام فرمودند خالصانه تشکر و قدردانی می نمایم.

از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر علی معدنشکاف به خاطر رهنمودهای علمی شان سپاسگزارم و نیز از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر بهمنی و جناب آقای دکتر ذوالفقاری که قبول زحمت نمودند و داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه با توجه به مفاهیم تعلق به یک مجموعه فازی و شبه تصادفی با یک مجموعه فازی، رده وسیعی از زیرگروه های فازی با نام $(\in, \in \vee q_k)$- زیرگروه های فازی معرفی شده که زیرگروه های فازی رزنفلد و $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه های فازی را در بر دارند. همچنین خواص پایه ای این رده از زیرگروه ها بیان می شود و به خصوص این زیرگروه ها با زیرگروه های ترازشان کاملاً مشخص می شوند. در ادامه مفهوم زیرگروه نرمال و شبه نرمال فازی مطرح شده و در نهایت به مفهوم $(\in, \in \vee q)$- ایدال های فازی پرداخته و خواص اساسی آن ها بیان می شود.

واژه‌های کلیدی: $(\in, \in \vee q_k)$- زیرگروه(حلقه یا ایدال) فازی، $(\in, \in \vee q_k)$- زیرگروه فازی نرمال(شبه نرمال)، زیرمجموعه تراز، q_k- زیرمجموعه تراز (بسته)، q- زیرمجموعه تراز (بسته).

فهرست مطالب

پیشگفتار

حل برخی از مسائل پیچیده در اقتصاد، مهندسی، علوم اجتماعی و... اغلب به‌دلیل نادقیق بودن متغیرهای موجود در آن مسائل با مشکل مواجه می‌شود. در حقیقت ریاضیات سنتی اغلب قادر به پاسخگویی این مسائل نیست. برای برقراری ارتباط با چنین متغیرهایی نظریه‌های متفاوتی موجود است که در میان آن‌ها نظریه احتمالات و نظریه مجموعه‌های فازی جایگاه ویژه‌ای دارند.

نظریه مجموعه‌های فازی اولین بار توسط زاده [۲۳] دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵ معرفی شد. بنابراین سال ۱۹۶۵ سال تولد این نظریه می‌باشد. بعد از آن مورالی [۱] [۱۹] به تعریف تعلق یک نقطه فازی به یک مجموعه‌ی فازی پرداخت. مفهوم شبه واقعی بودن یک نقطه فازی با یک مجموعه فازی که در [۲۰] معرفی شده است نقش مهمی در توسیع بعضی از انواع زیرمجموعه های فازی دارد.

به تدریج نظریه مجموعه‌های فازی گذری در سایر گرایش‌های ریاضی باز کرد که جبر نیز از این قاعده مستثنی نبود. شروع این گذر مقاله‌ای بود که توسط رزنفلد [۲] با عنوان گروه‌های فازی [۲۱] عرضه شد، اما باکات و داس [۳] [۴و۵]، (α, β)- زیرگروه‌های فازی را با توجه به مفاهیم تعلق و شبه واقعی معرفی کردند که حاصل این تلاش معرفی $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه‌های فازی بود که تعمیم زیرگروه فازی تعریف شده توسط رزنفلد است. لیو [۴] [۱۵] زیرگروه فازی نرمال را معرفی کرد که بعدها توسط باکات [۳و۶] و باکات و داس [۳] و یوان [۵] و همکارانش [۲۲] گسترش پیدا کرد.

در این پایان‌نامه رده وسیع‌تری از $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه‌های فازی که $(\in, \in \vee q_k)$- زیرگروه‌های فازی می‌باشند معرفی شده است و این زیرگروه‌ها توسط زیرگروه‌های ترازشان کاملاً مشخص شده اند. در حقیقت $(\in, \in \vee q_k)$- زیرگروه‌های فازی دربرگیرنده $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه‌های فازی و خود زیرگروه‌های

---

[۱] Muraly

[۲] Rozenfeld

[۳] Bhakat Das

[۴] Liu

[۵] Yuan

فازی تعریف شده توسط رزنفلد هستند.

در نهایت تعمیم ایدال فازی، $(\in, \in \vee q)$- ایدال فازی که توسط لیو معرفی شده را بیان و خواص آن در این پایان نامه بررسی شده ا ست.

در فصل اول این پایان نامه تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز فصل‌های بعدی بیان شده است. در فصل دوم انواع زیرگروه‌های تراز و زیرگروه‌های فازی تعمیم یافته، بررسی شده است. همچنین زیرگروه‌های فازی تشکیل شده از اجتماع زیرگروه‌های فازی و زیرگروه‌های فازی تعمیم یافته تولید شده مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در فصل سوم $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه‌های فازی نرمال و شبه نرمال معرفی شده است، سپس با بیان قضایایی ویژگی‌های این زیرگروه‌ها بررسی شده است.

در فصل چهارم مفهوم $(\in, \in \vee q)$- ایدال‌های فازی و خواص آن‌ها بیان شده است.

عمده مطالب این پایان‌نامه از مراجع [۳]، [۴]، [۶] و [۱۹] آورده شده است.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

در این فصل هدف ما بیان تعاریف اولیه مجموعه‌های فازی است که در فهم بهتر مفاهیم سایر فصل‌ها نقش مهمی دارند.

تعریف ۱.۰.۱. فرض کنید G یک مجموعه ناتهی باشد. هر تابع $\lambda : G \to [0,1]$ را یک زیرمجموعه فازی از G می‌نامیم.

اگر $x \in G$ و $t \in (0,1]$، آنگاه زیرمجموعه فازی λ از مجموعه G تعریف شده به شکل

$$\lambda(y) = \begin{cases} t & \text{اگر } y = x \\ 0 & \text{اگر } y \neq x \end{cases}$$

را که در آن $t \in (0,1]$ است، یک نقطه فازی با محمل x و مقدار t می نامیم و با نماد x_t نشان می دهیم.

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه فازی از G باشند. در این‌صورت $\mu \cup \nu$ و $\mu \cap \nu$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) $(\mu \cup \nu)(x) = \max(\mu(x), \nu(x)); \qquad \forall x \in G.$

۲) $(\mu \cap \nu)(x) = \min(\mu(x), \nu(x)); \qquad \forall x \in G.$

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه فازی از G باشند. می گوییم $\mu \subseteq \nu$ است اگر برای هر $x \in G$، $\mu(x) \leq \nu(x)$.

تعریف ۴.۰.۱. فرض کنید $f : G \to H$ یک تابع باشد و μ و ν به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از G و H باشند. در این‌صورت زیرمجموعه‌های فازی $f(\mu)$ از H و $f^{-1}(\nu)$ از G را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:
برای هر $y \in H$،

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\{\mu(x) \mid x \in G,\ f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ اگر} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

و برای هر $x \in G$، $f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$.

تعریف ۵.۰.۱. می گوییم زیرمجموعه فازی λ از G خاصیت سوپریمم دارد اگر برای هر زیرمجموعه غیر تهی T از G، $a \in T$ موجود باشد به طوری که $\lambda(a) = \sup\{\lambda(t)\ ;\ t \in T\}$.

تعریف ۶.۰.۱. فرض کنید λ و μ دو زیرمجموعه فازی از G باشند. در این‌صورت $\lambda \circ \mu$ یک زیرمجموعه فازی از G است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda \circ \mu(z) = \sup\{\min\big(\lambda(x), \mu(y)\big)\ ;\ z = xy\}$$

تعریف ۷.۰.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. زیرمجموعه فازی λ از G را یک زیرگروه فازی (رزنفلد) از G می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in G$ داشته باشیم:

۱) $\lambda(xy) \geq \min\big(\lambda(x), \lambda(y)\big)$

۲) $\lambda(x^{-1}) \geq \lambda(x)$.

فصل ۲

زیرگروه های فازی

زیرگروه فازی رزنفلد را در فصل ۱ تعریف کردیم. در این فصل، $(\in, \in \vee q)-$ زیرگروه فازی را تعریف می‌کنیم که در حقیقت زیرگروه فازی رزنفلد در آن صدق می کند. سپس به تعریف $(\in, \in \vee q_k)-$ زیر گروه فازی می پردازیم که حالت کلی زیر گروه‌های فازی است. در حقیقت $(\in, \in \vee q)-$ زیرگروه فازی و در نتیجه زیرگروه فازی رزنفلد از $(\in, \in \vee q_k)-$ زیر گروه فازی نتیجه می شوند.

۱.۲ انواع زیرمجموعه‌های تراز از یک زیرمجموعه فازی

تعریف ۱.۱.۲. برای زیرمجموعه فازی λ از مجموعه G، نقطه ی فازی x_t را

(آ۱) متعلق به λ می نامیم و با نماد $x_t \in \lambda$ نشان می دهیم اگر $\lambda(x) \geq t$؛

(آ۲) شبه واقعی با λ می نامیم و با نماد $x_t q \lambda$ نشان می دهیم اگر $\lambda(x) + t > ۱$.

فرض کنید $t \in (۰, ۱]$ و $k \in [۰, ۱)$. در این صورت برای نقطه فازی x_t و زیرمجموعه فازی λ از مجموعه G می گوییم:

ب۱) $x_t q_k \lambda$ اگر $\lambda(x) + t + k > ۱$؛

ب۲) $x_t \in \vee q_k \lambda$ اگر $x_t \in \lambda$ یا $x_t q_k \lambda$؛

ب۳) $x_t \underline{q} \lambda$ اگر $\lambda(x) + t \geq ۱$؛

ب۴) $x_t \underline{q}_k \lambda$ اگر $\lambda(x) + t + k \geq ۱$؛

ب۵) $x_t \overline{\alpha} \lambda$ اگر $x_t \alpha \lambda$ برقرار نباشد که در آن $\alpha \in \left\{ q_k, \in \vee q_k, q, \underline{q}_k \right\}$.

در قضیه زیر رفتار زیرگروههای فازی تحت همریختی های گروهی بررسی می شوند.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید G و H دو گروه و $f : G \to H$ یک همریختی گروهی باشد و فرض کنید λ و μ به ترتیب زیرگروه‌های فازی از G و H باشند. در این‌صورت
۱) $f^{-1}(\mu)$ زیرگروه فازی از G است.
۲) $f(\lambda)$ زیرگروه فازی از $f(G)$ است.

اثبات. فرض کنید $x, y \in G$ و $a, b \in H$ باشند. فرض کنید λ زیرگروه فازی G باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned}
f(\lambda)(ab) &= \sup\big\{\lambda(z) \mid z \in G\ ,\ f(z) = ab\big\} \\
&\geq \sup\big\{\lambda(xy) \mid x, y \in G\ ,\ f(x) = a\ ,\ f(y) = b\big\} \\
&\geq \sup\big\{\min\{\lambda(x), \lambda(y)\} \mid x, y \in G\ ,\ f(x) = a\ ,\ f(y) = b\big\} \\
&= \min\big\{\big(\sup\big\{\lambda(x) \mid x \in G\ ,\ f(x) = a\big\}\big), \big(\sup\big\{\lambda(y) \mid y \in G\ ,\ f(y) = b\big\}\big)\big\} \\
&= \min\{f(\lambda)(a), f(\lambda)(b)\}
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
f(\lambda)(a^{-1}) &= \sup\big\{\lambda(x) \mid x \in G\ ,\ f(x) = a^{-1}\big\} \\
&\geq \sup\big\{\lambda(x) \mid x \in G\ ,\ f(x) = a\big\} \\
&= f(\lambda)(a).
\end{aligned}$$

لذا $f(\lambda)$ زیرگروه فازی H است.
همچنین، اگر μ زیرگروه فازی از H باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\mu)(xy) &= \mu\big(f(xy)\big) = \mu\big(f(x) \cdot f(y)\big) \\
&\geq \min\{\mu\big(f(x)\big), \mu\big(f(y)\big)\} \\
&= \min\{f^{-1}(\mu)(x), f^{-1}(\mu)(y)\} \\
&= f^{-1}(\mu)(x) \cdot f^{-1}(\mu)(y)
\end{aligned}$$

و

$$f^{-1}(\mu)(x^{-1}) = \mu\big(f(x^{-1})\big) = \mu\big(f(x)^{-1}\big) \geq \mu\big(f(x)\big) = f^{-1}(\mu)(x).$$

لذا $f^{-1}(\mu)$ زیرگروه فازی G است. $\square$

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید λ یک زیرمجموعه فازی از مجموعه G و $t \in (0, 1]$ باشد. در این صورت

الف) مجموعه $\lambda_t = \{x \in G \mid \lambda(x) \geq t\}$ را زیرمجموعه تراز G می نامیم.

ب) مجموعه $Q(\lambda_t) = \{x \in G \mid x_t q \lambda\}$ را q- زیرمجموعه تراز G می نامیم.

پ) مجموعه $Q_k(\lambda_t) = \{x \in G \mid x_t q_k \lambda\}$ را q_k- زیرمجموعه تراز G می نامیم.

ت) مجموعه $\underline{Q}(\lambda_t) = \big\{x \in G \mid x_t \underline{q} \lambda\big\}$ را q- زیر مجموعه تراز بسته G می نامیم.

ج) مجموعه $\underline{Q}_k(\lambda_t) = \Big\{x \in G \mid x_t \underline{q}_k \lambda\Big\}$ را q_k- زیرمجموعه تراز بسته G می نامیم.

چ) مجموعه $U(\lambda_t) = \{x \in G \mid x_t \in \vee q \lambda\} = \lambda_t \cup Q(\lambda_t)$ را $(\in \vee q)$- زیرمجموعه تراز G می نامیم.

ح) مجموعه $U_k(\lambda_t) = \{x \in G \mid x_t \in \vee q_k \lambda\} = \lambda_t \cup Q_k(\lambda_t)$ را $(\in \vee q_k)$- زیرمجموعه تراز G می نامیم.

خ) مجموعه $\underline{U}_k(\lambda_t) = \{x \in G \mid x_t \in \vee q_k \lambda\} = \lambda_t \cup \underline{Q}_k(\lambda_t)$ را $(\in \vee q_k)$- زیرمجموعه تراز بسته G می نامیم.

توجه کنید که برای هر $t \in (0, 1]$ و $k \in [0, 1)$، $\lambda_t \subseteq U(\lambda_t) \subseteq U_k(\lambda_t)$ می باشد. اما عکس این رابطه در حالت کلی برقرار نیست. مثال زیر این مطلب را تایید می کند.

مثال ۴.۱.۲. فرض کنید λ زیرمجموعه فازی از مجموعه $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ به صورت $\lambda = (0/6, 0/3, 0/8, 0/2, 0/5, 0/6)$ باشد. در این صورت

$$\lambda_{0/55} = \{a, c, f\} \neq U(\lambda_{0/55}) = \{a, c, e, f\} \neq U_{0/23}(\lambda_{0/55}) = \{a, b, c, e, f\}$$

در حقیقت $\lambda_{0/55} \subsetneqq U(\lambda_{0/55}) \subsetneqq U_{0/23}(\lambda_{0/55})$.

گزاره ۵.۱.۲. فرض کنید λ زیرمجموعه فازی از مجموعه G باشد. در این صورت برای هر $m, n \in [0, 1)$، اگر $m < n$، آنگاه برای هر $t \in (0, 1]$، $U_m(\lambda_t) \subseteq U_n(\lambda_t)$.

اثبات.

$$\begin{aligned} U_m(\lambda_t) &= \{x \in G \mid x_t \in \vee q_m \lambda\} \\ &= \{x \in G \mid \lambda(x) \geq t \text{ یا } \lambda(x) + t + m > ۱\} \\ &\subseteq \{x \in G \mid \lambda(x) \geq t \text{ یا } \lambda(x) + t + n > ۱\} \\ &= \{x \in G \mid x_t \in \vee q_n \lambda\} = U_n(\lambda_t). \end{aligned}$$

توجه کنید اگر $t > r$، آنگاه ممکن است $k \in [۰, ۱)$ موجود باشد به طوری که $U_k(\lambda_t)$ زیر مجموعه $U_k(\lambda_r)$ نباشد. در مثال ۴.۱.۲، $b \in U_{۰/۱}(\lambda_{۰/۷})$ اما $b \notin U_{۰/۱}(\lambda_{۰/۴۷})$. □

گزاره ۶.۱.۲. فرض کنید λ و μ دو زیرمجموعه فازی از مجموعه G باشند. در این صورت

۱) $U_k\left((\lambda \cup \mu)_t\right) = U_k(\lambda_t) \cup U_k(\mu_t)$؛

۲) $U_k\left((\lambda \cap \mu)_t\right) = U_k(\lambda_t) \cap U_k(\mu_t)$،

۳) $U_k\left((\lambda \cup (\mu \cap \nu))_t\right) = U_k\left((\lambda \cup \mu)_t\right) \cap U_k\left((\lambda \cup \nu)_t\right)$؛

۴) $U_k\left((\lambda \cap (\mu \cup \nu))_t\right) = U_k\left((\lambda \cap \mu)_t\right) \cup U_k\left((\lambda \cap \nu)_t\right)$.

اثبات. ۱) داریم

$$\begin{aligned} x \in U_k\left((\lambda \cup \mu)_t\right) &\Longleftrightarrow x_t \in \vee q_k(\lambda \cup \mu) \\ &\Longleftrightarrow (\lambda \cup \mu)(x) \geq t \text{ یا } (\lambda \cup \mu)(x) + t > ۱ - k \\ &\Longleftrightarrow (\lambda(x) \geq t \text{ یا } \mu(x) \geq t) \text{ یا } (\lambda(x) + t > ۱ - k \text{ یا } \mu(x) + t > ۱ - k) \\ &\Longleftrightarrow (\lambda(x) \geq t \text{ یا } \lambda(x) + t > ۱ - k) \text{ یا } (\mu(x) \geq t \text{ یا } \mu(x) + t > ۱ - k) \\ &\Longleftrightarrow x_t \in \vee q_k \lambda \text{ یا } x_t \in \vee q_k \mu \\ &\Longleftrightarrow x \in U_k(\lambda_t) \text{ یا } x \in U_k(\mu_t) \\ &\Longleftrightarrow x \in U_k(\lambda_t) \cup U_k(\mu_t) \end{aligned}$$

پس $U_k\left((\lambda \cup \mu)_t\right) = U_k(\lambda_t) \cup U_k(\mu_t)$.

۲) داریم

$$\begin{aligned}
x \in U_k\left((\lambda \cap \mu)_t\right) &\Longleftrightarrow x_t \in \vee q_k(\lambda \cap \mu)\\
&\Longleftrightarrow (\lambda \cap \mu)(x) \geq t \text{ یا } (\lambda \cap \mu)(x) + t > ۱ - k\\
&\Longleftrightarrow (\lambda(x) \geq t, \mu(x) \geq t) \text{ یا } (\lambda(x) + t > ۱ - k, \mu(x) + t > ۱ - k)\\
&\Longleftrightarrow (\lambda(x) \geq t \text{ یا } \lambda(x) + t > ۱ - k), (\mu(x) \geq t \text{ یا } \mu(x) + t > ۱ - k)\\
&\Longleftrightarrow x_t \in \vee q_k\lambda, x_t \in \vee q_k\mu\\
&\Longleftrightarrow x \in U_k(\lambda_t), x \in U_k(\mu_t)\\
&\Longleftrightarrow x \in (U_k(\lambda_t) \cap U_k(\mu_t))
\end{aligned}$$

پس $U_k\left((\lambda \cap \mu)_t\right) = U_k(\lambda_t) \cap U_k(\mu_t)$.

۳) داریم

$$\begin{aligned}
x \in U_k\left((\lambda \cup (\mu \cap \nu))_t\right) &\Longleftrightarrow x \in U_k(\lambda_t) \cup U_k(\mu \cap \nu)_t\\
&\Longleftrightarrow x \in U_k(\lambda_t) \cup (U_k(\mu_t) \cap U_k(\nu_t))\\
&\Longleftrightarrow x \in (U_k(\lambda_t)) \cup (U_k(\mu_t)) \cap (U_k(\lambda_t) \cup U_k(\nu_t))\\
&\Longleftrightarrow x \in U_k\left((\lambda \cup \mu)_t\right) \cap U_k\left((\lambda \cup \nu)_t\right)
\end{aligned}$$

پس $U_k\left((\lambda \cup (\mu \cap \nu))_t\right) = U_k\left((\lambda \cup \mu)_t\right) \cap U_k\left((\lambda \cup \nu)_t\right)$.

۴) داریم

$$\begin{aligned}
x \in U_k\left((\lambda \cap (\mu \cup \nu))_t\right) &\Longleftrightarrow x \in U_k(\lambda_t) \cap U_k(\mu \cup \nu)_t\\
&\Longleftrightarrow x \in U_k(\lambda_t) \cap (U_k(\mu_t) \cup U_k(\nu_t))\\
&\Longleftrightarrow x \in (U_k(\lambda_t)) \cap (U_k(\mu_t)) \cup (U_k(\lambda_t) \cap U_k(\nu_t))\\
&\Longleftrightarrow x \in U_k\left((\lambda \cap \mu)_t\right) \cup U_k\left((\lambda \cap \nu)_t\right)
\end{aligned}$$

پس $U_k\left((\lambda \cap (\mu \cup \nu))_t\right) = U_k\left((\lambda \cap \mu)_t\right) \cup U_k\left((\lambda \cap \nu)_t\right)$. □

با قرار دادن $k = 0$ در گزاره فوق، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۷.۱.۲. فرض کنید μ و ν زیرمجموعه های فازی از G باشند در این صورت

۱) $U\left((\lambda \cup \mu)_t\right) = U(\lambda_t) \cup U(\mu_t)$؛

۲) $U\left((\lambda \cap \mu)_t\right) = U(\lambda_t) \cap U(\mu_t)$؛

۳) $U\left((\lambda \cup (\mu \cup \nu))_t\right) = U\left((\lambda \cup \mu)_t\right) \cap U\left((\lambda \cup \mu)_t\right)$؛

۴) $U\left((\lambda \cap (\mu \cup \nu))_t\right) = U\left((\lambda \cap \mu)_t\right) \cup U\left((\lambda \cap \mu)_t\right)$.

گزاره ۸.۱.۲. برای هر زیرمجموعه فازی λ از مجموعه G داریم:

$$U_k(\lambda_t)^c \subseteq \lambda^c_{1-t} \cap \lambda^c_{t+k}$$

که λ^c متمم λ می باشد و برای هر $x \in G$، $\lambda^c(x) = 1 - \lambda(x)$.

اثبات.

$$\begin{aligned}
x \in U_k(\lambda_t)^c &\Longrightarrow x \notin U_k(\lambda_t) \Longrightarrow x \overline{\in \vee q_k} \lambda \\
&\Longrightarrow x_t \overline{\in} \lambda \ , \ x_t \overline{q}_k \lambda \\
&\Longrightarrow \lambda(x) < t \ , \ \lambda(x) + t + k \leq 1 \\
&\Longrightarrow \lambda^c(x) = 1 - \lambda(x) > 1 - t \ , \ \lambda^c(x) = 1 - \lambda(x) \geq t + k \\
&\Longrightarrow x \in \lambda^c_{1-t} \ , \ x \in \lambda^c_{t+k} \\
&\Longrightarrow x \in \lambda^c_{1-t} \cap \lambda^c_{t+k}
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$U_k(\lambda_t)^c \subseteq \lambda^c_{1-t} \cap \lambda^c_{t+k}$$

□

با قرار دادن $k = 0$ در گزاره فوق، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۹.۱.۲. برای زیرمجموعه فازی λ از مجموعه G داریم:

$$U(\lambda_t)^c \subseteq \lambda^c_t \cap \lambda^c_{1-t}$$

نتیجه ۱۰.۱.۲. برای زیرمجموعه فازی λ از مجموعه G داریم:

$$U(\lambda_t)^c \subset \lambda_t^c \cup \lambda_{1-t}^c$$

اثبات. $\lambda_t^c \cap \lambda_{1-t}^c \subseteq \lambda_t^c \cup \lambda_{1-t}^c$ و همچنین با استفاده از نتیجه ۹.۱.۲ داریم:

$$U(\lambda_t)^c \subseteq \lambda_t^c \cap \lambda_{1-t}^c \subseteq \lambda_t^c \cup \lambda_{1-t}^c$$

□

در مثال زیر می بینیم که عکس رابطه فوق در حالت کلی ممکن است برقرار نباشد:

مثال ۱۱.۱.۲. فرض کنید $G = \{a, b, c\}$ و $\lambda = (0/2, 0/6, 0/4)$. در این‌صورت $\lambda^c = (0/8, 0/4, 0/6)$ و

$$a \in \left\{\lambda_{0/2}^c \cap \lambda_{0/8}^c\right\} \subset \left\{\lambda_{0/2}^c \cup \lambda_{0/8}^c\right\}$$

اما $a \notin U(\lambda_{0/2})^c$.

گزاره ۱۲.۱.۲. برای زیرمجموعه های فازی λ و μ از مجموعه G داریم:

$$(U_k(\lambda_t) \cup U_k(\mu_t))^c \subseteq \lambda_{1-t}^c \cap \mu_{1-t}^c \cap \lambda_{t+k}^c \cap \mu_{t+k}^c \quad .$$

اثبات.

$$(U_k(\lambda_t) \cup U_k(\mu_t))^c = (U_k(\lambda_t))^c \cap (U_k(\mu_t))^c$$

از طرفی طبق گزاره ۸.۱.۲ داریم:

$$(U_k(\lambda_t))^c \subseteq \lambda_{1-t}^c \cap \lambda_{t+k}^c$$

و

$$(U_k(\mu_t))^c \subseteq \mu_{1-t}^c \cap \mu_{t+k}^c$$

بنابراین

$$(U_k(\lambda_t) \cup U_k(\mu_t))^c \subseteq \lambda_{1-t}^c \cap \mu_{1-t}^c \cap \lambda_{t+k}^c \cap \mu_{t+k}^c$$

□

گزاره ۱۳.۱.۲. برای زیرمجموعه فازی λ و μ از مجموعه G داریم:

$$U(\lambda_t \cup \mu_t)^c \subseteq \lambda^c_{1-t} \cap \mu^c_{1-t} \quad .$$

اثبات.

$$\begin{aligned} U(\lambda_t \cup \mu_t)^c = U\left((\lambda \cup \mu)_t)\right)^c &\subseteq U\left((\lambda \cup \mu)_t\right)^c \cap U\left((\lambda \cup \mu)_{1-t}\right)^c \\ &\subseteq \left((\lambda \cup \mu)_{1-t}\right)^c = (\lambda^c \cap \mu^c)_{1-t} = \lambda^c_{1-t} \cap \mu^c_{1-t}. \end{aligned}$$

□

۲.۲ زیر گروه های فازی تعمیم یافته

تعریف ۱.۲.۲. زیرمجموعه فازی λ از گروه G را یک $(\in, \in)$- زیرگروه فازی از G می نامیم اگر برای هر $x, y \in G$ و $t, r \in (0, 1]$، داشته باشیم

(ب۵) اگر $x_t \in \lambda$ و $y_r \in \lambda$، آنگاه $(xy)_{\min(t,r)} \in \lambda$؛

(ب۶) اگر $x_t \in \lambda$، آنگاه $x_t^{-1} \in \lambda$.

باکات و داس [۴] یک $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه فازی را به صورت زیر تعریف کرده اند:

تعریف ۲.۲.۲. زیرمجموعه فازی λ از گروه G را $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه فازی از G می نامیم اگر برای هر $x, y \in G$ و $t, r \in (0, 1]$،

(۱) اگر $x_t, y_r \in \lambda$، آنگاه $(xy)_{\min(t,r)} \in \vee q\lambda$؛

(۲) $\lambda(x^{-1}) \geq \lambda(x)$.

دقت کنید که شرط (۲) در تعریف ۲.۲.۲ با شرط زیر معادل است،

(′۲) اگر $x_t \in \lambda$، آنگاه $x_t^{-1} \in \lambda$.

زیرا فرض می کنیم $\lambda(x^{-1}) \geq \lambda(x)$ و فرض می کنیم $x_t \in \lambda$. در این صورت

$$x_t \in \lambda \Rightarrow \lambda(x) \geq t \Rightarrow \lambda(x^{-1}) \geq \lambda(x) \geq t \Rightarrow x_t^{-1} \in \lambda.$$

برعکس، فرض می کنیم برای هر $x \in G$ و $t \in (0, 1]$، اگر $x_t \in \lambda$، آنگاه $x_t^{-1} \in \lambda$.
فرض می کنیم $\lambda(x^{-1}) < \lambda(x)$. در این صورت $t \in (0, 1]$ موجود است به طوری که $\lambda(x^{-1}) < t \leq \lambda(x)$. یعنی $x_t \in \lambda$ اما $x_t^{-1} \bar{\in} \lambda$ که تناقض است.

صورت تعمیم یافته تعریف ۲.۲.۲ از یک $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه فازی بصورت زیر است:

تعریف ۳.۲.۲. زیرمجموعه فازی λ از گروه G را $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه فازی از G می نامیم هر گاه برای هر $x, y \in G$ و هر $t, r \in (0, 1]$، شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) اگر $x_t \in \lambda$ و $y_r \in \lambda$، آنگاه $(xy)_{\min(t,r)} \in \vee q\lambda$؛

(۲) اگر $x_t \in \lambda$، آنگاه $x_t^{-1} \in \vee q\lambda$.

تذکر ۴.۲.۲. دقت کنید که اگر λ با تعریف ۲.۲.۲ یک $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه فازی از گروه G باشد آنگاه λ با تعریف ۳.۲.۲ نیز یک $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه فازی از G خواهد بود.

اما عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۵.۲.۲. فرض کنید $G = \{a, b, c\}$ یک گروه دوری با عمل ضرب تعریف شده باشد و فرض کنید λ زیرمجموعه فازی از G با $\lambda(a) = ۰/۷$ و $\lambda(b) = ۰/۸$ و $\lambda(c) = ۰/۹$ باشد. در این صورت λ، $(\in, \in \vee q)$- زیرگروه فازی از G طبق تعریف ۳.۲.۲ هست اما طبق تعریف ۲.۲.۲ نیست زیرا

$$\lambda(c) = ۰/۹ \Longrightarrow c_{۰/۹} \in \lambda \Longrightarrow b_{۰/۹} = c_{۰/۹}^{-1} \in \vee q\lambda$$

اما

$$۰/۸ = \lambda(b) = \lambda(c^{-1}) < \lambda(c) = ۰/۹$$

.

در ادامه به تعریف کلی تری از زیرگروه های فازی می پردازیم که زیرگروه فازی تعریف شده توسط رزنفلد و زیرگروه های فازی تعریف شده در تعریف ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲ حالت خاصی از آن می باشند:

تعریف ۶.۲.۲. زیرمجموعه فازی λ از گروه G یک $(\in, \in \vee q_k)$- زیرگروه فازی قوی از G نامیده می شود هر گاه برای هر $x, y \in G$ و $t, r \in (0, 1]$ داشته باشیم:

پ۱) اگر $x_t \in \lambda$ و $y_r \in \lambda$، آنگاه $(xy)_{\min(t,r)} \in \vee q_k\lambda$؛

پ۲) $\lambda(x^{-1}) \geq \lambda(x)$