دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای در یافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

رده‌ای اصلاح شده از روش‌های رانگ—کوتای تعمیم یافته برای مسائل سخت

اساتید راهنما

دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور

دکتر صداقت شهمراد

پژوهشگر

مهدی احمدی

بهمن ۱۳۸۸

بِسْمِ اللّٰهِ الرّحمنِ الرّحيم

خدایا، بر محمّد و آل محمّد (ص) درود فرست و چون تو را بخوانم دعایم را قبول فرما و هرگاه ندایت کنم ندایم را بشنو و چون با تو مناجات کنم به حالم توجه فرما که به سوی تو گریخته‌ام و در حضورت ایستاده با پریشانی، زاری می‌کنم و به ثوابی که نزد توست امیدوارم و تو از دلم آگاهی و حاجتم را می‌دانی و درونم را می‌شناسی وهیچ امری از دنیا وآخرتم بر تو پنهان نیست.

خدایا، هر که تو معرّفش باشی هرگز مجهول و بی‌نام نشود و هر که به تو پناه آورد خوار نگردد و هر که به او توجه کنی بنده دیگری نشود، هر که به تو راه یافت روشن شد و هر که به تو پناه برد پناه یافت و من به درگاهت پناه آورده‌ام پس تو حس ظنّم را به رحمتت نا امید مکن.

خدایا، من قدرت بازگشت از معصیت را ندارم مگر آنکه تو به لطفت بیدارم گردانی و چنانچه تو می‌خواهی باشم و شکر تو را گویم چرا که به کرمت داخل کرده و قلبم را از پلیدی‌های غفلت پاک گردانیدی.

خدایا، مرا به نور مقام عزّتت که نشاطش از هر لذّت بالاتر است بپیوند تا آن که فقط تو را بشناسم و از غیر تو روی برگردانم و ترسان و مراقب تو باشم، ای خدای با جلال و بزرگوار.

خدایا، حمد و ثنا مخصوص توست حمد ابدی، دائم و بی‌انتها که همیشه برایت افزوده شود و فنا نپذیرد چنانچه تو دوست داری و بپسندی.

خدایا، دلی ده که مشتاق نزدیکی تو باشد و زبانی که سخن راستش به سویت بالا رود و نظر حقیقت بینی که تقّرب تو جوید.

خدایا، حاجتم را رد مکن، دست طمعم را از درگاهت محروم مگردان و آرزویم را از لطفت قطع مساز.

خدایا، اگر خوارم می‌خواستی، هدایتم نمی‌کردی و اگر رسوایم می‌خواستی عافیتم نمی‌دادی.

((مناجات شعبانیه حضرت علی (ع)))

تقدیم به:

مادر مهربان و دلسوزم

تقدیر و تشکر

با سپاس از زحمات بی شائبه و گرانقدر اساتید راهنمای گرامی دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی و دکتر غلامرضا حجتی که با راهنمایی‌های ارزندهٔ خود در کلیه مراحل سمینار و پایان‌نامه عامل اصلی پیشبرد آن بودند، و همچنین از استاد مشاور گرامی دکتر صداقت شهمراد در خصوص کلیه زحمات و مساعدت‌هایش تشکر و قدردانی می‌کنم و همچنین از پرفسور راجو[1] که مثل یک استاد راهنما به من کمک کرده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم.

از مادر مهربانم و پدر مرحومم که مایه‌های فکری خود را به تربیت اولیه آنها و مساعدتشان مدیونم کمال تشکر را دارم، همچنین از خواهران و برادرانم و از دوستان عزیزم که مرا در تهیه این پایان نامه یاری کرده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم.

[1] J. Rojo

نام خانوادگی دانشجو: احمدی نام: مهدی

عنوان: رده‌ای اصلاح شده از روش‌های رانگ—کوتای تعمیم یافته برای مسائل سخت

اساتید راهنما: دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی ، دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور: دکتر صداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۹۴

کلید واژه‌ها: روش‌های رانگ—کوتای تعمیم یافته، معادلات دیفرانسیل معمولی سخت، پایداری خطی، تقریبات پاده

چکیده

در این پایان‌نامه خانواده جدیدی از فرمول‌های p–مرحله‌ای را برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت معرفی می‌کنیم، که رده‌ای اصلاح شده از روش‌های رانگ—کوتای تعمیم یافته است. با استفاده از این روش، تنها با دو مرحله به یک روش مرتبه سه و تنها با سه مرحله به یک روش مرتبه چهار، که هر دو دارای شرایط پایداری جالبی، از جمله A–پایداری و L–پایداری می‌باشند، می‌رسیم. از جمله مزیت‌های روش این است که به محاسبه ماتریس ژاکوبین نیازی نیست و همچنین وضعیت مشابهی برای مساله معادله دیفرانسیل در حالت اسکالر وجود دارد.

فهرست مطالب

۱.۰ مقدمه

در طی دهه اخیر تحقیقات زیادی به منظور یافتن شرایط پایداری خوب روی روش‌ها برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت انجام شده است. تقریباً همه چنین روش‌هایی از لحاظ مشخصه ضمنی هستند.

بیشترین الگوریتم‌های استفاده شده به طور گسترده روی فرمول‌های چند گامی خطی مثل BDF[2] بنا شده‌اند. ولی از نتیجه دالکوئیست[3] (هیچ روش چند گامی خطی مرتبه بزرگتر از دو نمی‌تواند A−پایدار باشد) بنابراین این فرمول‌ها برای برخی مسائل سخت مناسب نیستند.

هر چند فرمول‌های رانگ−کوتای ضمنی به خاطر شرایط پایداری خوب (برای مثال A−پایداری و L−پایداری) به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند، اما نیاز به حل معادلات جبری غیر خطی در هر گام، باعث شده وقتی این فرمول‌ها برای برخی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل بزرگ به کار برده می‌شوند، بسیار هزینه بر هستند.

با استفاده از روش‌های DIRK[4] (که روش‌های رانگ−کوتای نیمه صریح یا نیمه ضمنی نامیده می‌شود)، هزینه جبری تجزیه LU کاهش یافته است. با در نظر گرفتن روش‌های SDIRK[5] و SIRK[6]، حتی ممکن است هزینه جبری تجزیه LU را بیشتر کاهش دهیم. (برای جزئیات بیشتر به [۱۰و۹] رجوع کنید).

روش‌های دیگری نیز به منظور کاهش هزینه محاسبه هر گام با در نظر گرفتن روش‌های به طور خطی ضمنی ساخته شده‌اند، در این روش‌ها نیاز برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی چنانچه قبلا اشاره شد، به وسیله تکرار نیوتن برطرف می‌شود (بنابرین مستلزم محاسبات تابع اضافی برای هر تکرار

Backward Differentiation Formule[2]

Dahlquist[3]

Diagonally implicit Runge-Kutta[4]

Singly diagonally implicit Runge-Kutta methods[5]

Singly implicit Runge-Kutta methods[6]

در هر گام می‌باشد). چنین فرمول‌هایی دارای مزیت‌های محاسباتی هستند که فقط حل دستگاه معادلات خطی جبری در هر گام لازم است.

از میان روش‌های گوناگون رانگ—کوتا، می‌توان به روش‌های رزنبراک [7] و روش‌های رزنبراک—وَنِر [8] [۱۶] اشاره کرد. این فرمول‌ها، مستلزم محاسبه ماتریس ژاکوبین دقیق در هر گام هستند. بنابراین وقتی محاسبه ماتریس ژاکوبین مشکل است، محاسبات هزینه بر می‌شوند. به این خاطر، بسط‌هایی از روش‌های رزنبراک که در آن ماتریس ژاکوبین برای تعدادی از گام‌ها ثابت است، در نظر گرفته می‌شود، طوری که هزینه محاسبات کاهش می‌یابد. علاوه بر این، روش‌های نوع رزنبراک که در آن ماتریس ژاکوبین بیشتر مورد نیاز نیستند، در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین روش‌های وَنِر [9]، روش‌های MROW [10] [۲۰] و روش‌های رانگ—کوتای تعمیم یافته [۱۹] در این رده قرار دارند. برای بررسی بیشتر برخی از این روش‌ها به [۱۰] مراجعه شود.

در [۳و۴]، مثال‌هایی از روش‌های دو مرحله‌ای به طور خطی ضمنی و صریح از مرتبه سه برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی اسکالر خودگردان نشان داده شده است، که نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبین ندارند. برخی از آنها A–پایدار و L–پایدار می‌باشند. همچنین در مقایسه با روش‌های رانگ—کوتا تا اندازه ای آزمایشات عددی خوبی از خود نشان داده‌اند. در [۱] چگونگی ایجاد خانواده یک پارامتری از روش‌های دو مرحله‌ای صریح (یا به طور خطی ضمنی) از یک تابع داده شده R شرح داده شده است. که R تابع پایداری روش می‌باشد.

هدف این پایان نامه معرفی شکل کلی روش‌های جدید p–مرحله‌ای صریح برای انتگرال گیری عددی معادلات دیفرانسیل معمولی خودگردان برای حالت اسکالر و دستگاه است. در فصل دوم این روش‌ها را برای مسائل اسکالر مطالعه می‌کنیم. در فصل سوم حالت اسکالر را به حالت دستگاه تعمیم می‌دهیم. این روش‌ها، تعمیمی از روش‌های رانگ—کوتای صریح برای رسیدن به مرتبه و نتایج پایداری

[7] Rosenbrock methods

[8] Rosenbrock-Wanner methods

[9] Wanner methods

[10] Modified Rosenbrock-Wanner

بهتر با تعداد مراحل یکسان می‌باشند. در واقع از نظریه بوچر می‌دانیم که یک روش رانگ—کوتای p-مرحله‌ای صریح نمی‌تواند مرتبه ای بزرگتر از p داشته باشد. علاوه بر این، تابع پایداری چنین روش‌هایی چندجمله‌ای است، بنابراین هیچ یک از آنها A-پایدار نیست. با استفاده از روش جدید نشان خواهیم داد که به دست آوردن فرمول‌های صریح A-پایدار و L-پایدار برای مسائل اسکالر خود گردان از مرتبه ۳ و ۵ به ترتیب فقط با ۲ و ۳ مرحله امکان پذیر است و همچنین به دست آوردن فرمول‌های صریح A-پایدار و L-پایدار برای مسائل دستگاه خود گردان از مرتبه ۳ و ۴ به ترتیب فقط با ۲ و ۳ مرحله امکان پذیر است. برای مثال در [۵] یک روش دو مرحله‌ای از مرتبه سه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جدا شده که L-پایدار می‌باشند ارائه داده شده است.

این پایان نامه بر اساس مقالات زیر تهیه شده است:

J. Alvarez, J. Rojo, *An improved class of generalized Runge-Kutta methods for stiff problems, Part I: The scalar case*, Appl. Math. Comput. 130 (2002) 537-560.

J. Alvarez, J. Rojo, *An improved class of generalized Runge-Kutta methods for stiff problems, Part II: The separated system case*, Appl. Math. Comput. 159 (2004) 717-758.

فصل ۱

مقدمات و تعاریف اولیه

۱.۱ مساله مقدار اولیه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ و $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ است. فرض کنید مساله جواب منحصر به فردی دارد.

روش‌های عددی برای این نوع دستگاه معادلات دیفرانسیل، الگوریتم‌هایی هستند که جدولی از مقادیر تقریبی جواب $y(x)$ را در نقاط مشخصی از بازه $[x_0, x_N]$ به نام نقاط گرهی[1] به دست می‌آورند. که نقاط گرهی به صورت

$$x_n = x_0 + nh \qquad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$x_0 = a, \qquad x_N = b,$$

مشخص می‌شوند، که در آن h طول گام نامیده می‌شود.

روش معروف اویلر[2] از اولین و اساسی‌ترین روش‌های حل عددی مسائل مقدار اولیه است که آن را می‌توان اساس روش‌های دیگر دانست. برای حل عددی مساله مقدار اولیه (۱.۱) به روش اویلر مقادیر تقریبی $y_0, y_1, y_2, \dots$ برای $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots$ از رابطه

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 1, 2 \dots,$$

$$y(x_0) = y_0.$$

[1] node, gride point

[2] Euler

به دست می‌آیند. در این روش ملاحظه می‌شود: y_n تنها به y_{n-1} وابسته است و مقادیر $y_{n-2}, y_{n-3}, \ldots$ در محاسبه‌ی y_n هیچ نقشی ندارند، در هر گام تابع f تنها یک بار محاسبه می‌شود و فقط از تابع f استفاده می‌شود نه مشتقات آن، به عبارت دیگر جمله‌ای شامل $y''(x), y'''(x), \ldots$ وجود ندارد. در نتیجه تعمیم‌های روش اویلر در جهات زیر صورت گرفته است:

- روش‌های چند گامی خطی[3]

  روش‌هایی که در آن y_n به مقادیر $y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}$ $(k \geq 2)$ نیز وابسته باشد، به عنوان مثال

$$y_n = y_{n-2} + 2hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

- روش‌های رانگ—کوتا[4]

  روش‌هایی که در آنها f بیش از یک بار محاسبه شود، به عنوان مثال

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1} + \frac{1}{2}hf(x_{n-1}, y_{n-1})).$$

- روش سری تیلور[5]

  روش‌هایی که در آنها علاوه بر $y'(x)$، از عبارات $y''(x), y'''(x), \ldots$ نیز استفاده شود.

[3] Linear multistep methods

[4] Runge-Kutta methods

[5] Taylor series method

۱.۱.۱ روش‌های چند گامی خطی

فرض کنید مقادیر تقریبی $y(x)$ در k نقطه $x_n = x_0 + nh, \ \ n = 0, 1, \ldots, k-1$ معلوم باشد،

$$y_n \simeq y(x_n), \ \ n = 0, 1, \ldots, k-1.$$

یک روش k-گامی خطی برای حل (۱.۱) در حالت کلی به صورت

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} \ = \ h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \tag{۲.۱}$$

است، که در آن ضرایب α_j و β_j اعداد حقیقی ثابت هستند و $\alpha_k \neq 0$، و α_0 و β_0 هر دو باهم صفر نیستند، و $f_n = f(x_n, y_n)$.

چون طرفین رابطه (۲.۱) را بدون به هم خوردن تساوی می‌توان در یک عدد ثابت ضرب کرد، در نتیجه ضرایب α_j و β_j بطور منحصر بفرد تعیین نمی‌شوند. برای رفع این مشکل همواره فرض می‌کنیم $\alpha_k = 1$. روش (۲.۱) را صریح[6] گویند اگر $\beta_k = 0$ و ضمنی[7] گویند هرگاه $\beta_k \neq 0$. برای یک روش صریح معادله (۲.۱)، مقدار y_{n+k} را بر حسب $f_{n+j}, \ \ j = 0, 1, \ldots, k-1$ و y_{n+j} که تا این مرحله محاسبه شده‌اند، به دست می‌دهد. برای روش ضمنی داریم

$$y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g, \tag{۳.۱}$$

که g تابع معلومی از مقادیر قبلاً محاسبه شده $f_{n+j}, \ \ j = 0, 1, \ldots, k-1$ و y_{n+j} است. هرگاه معادله دیفرانسیل (۱.۱) خطی باشد، آنگاه (۳.۱) نیز نسبت به y_{n+k} خطی است و به آسانی قابل حل است. وقتی f غیر خطی باشد، آنگاه یک جواب یکتا برای y_{n+k} وجود دارد که می‌توان آن را با انتخاب دلخواه $y_{n+k}^{[0]}$ از رابطه بازگشتی

$$y_{n+k}^{[s+1]} \ = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) + g,$$

---

[6] explicit

[7] implicit

محاسبه کرد، به شرطی که $0 \leq M < 1$ که M ثابت لیپ شیتس[8] عبارت طرف راست (۳.۱) نسبت به y_{n+k} است. اگر L ثابت لیپ شیتس f نسبت به y باشد، آنگاه می‌توان M را برابر $Lh|\beta_k|$ اختیار کرد. معادله (۳.۱) جواب یکتا برای y_{n+k} دارد اگر

$$h < \frac{1}{L|\beta_k|}.$$

عملگر تفاضلی[9] زیر را متناظر با روش چند گامی خطی (۲.۱) تعریف می‌کنیم

$$L[y(x); h] = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j y(x + jh) - h\beta_j y'(x + jh)\right]. \qquad (۴.۱)$$

با استفاده از بسط تیلور y و y' حول نقطه x داریم

$$L[y(x); h] = C_0 y(x) \; + \; C_1 h y'(x) \; + \; C_2 h^2 y''(x) \; + \cdots + \; C_q h^q y^{(q)}(x) \; + \cdots, \qquad (۵.۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k), \\ C_q &= \frac{1}{q!}\left(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + k^q\alpha_k\right) \\ &\quad - \frac{1}{(q-1)!}\left(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \cdots + k^{q-1}\beta_k\right), \qquad q = 2, 3, \ldots \; . \end{aligned} \qquad (۶.۱)$$

تعریف ۱.۱ روش چند گامی خطی (۲.۱) را همگرا[10] گوییم هرگاه برای تمامی مسائل مقدار اولیه (۱.۱) که در شرایط قضیه وجود و منحصربفردی جواب صدق می‌کنند، برای تمام مقادیر $x \in [a, b]$ داشته باشیم

[8] Lipschitz constant

[9] difference operator

[10] convergent

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} y_n = y(x_n),$$

و تمامی جوابهای y_n از معادله تفاضلی (۲.۱) در شرط $y_\eta = \eta_\mu(h)$ که $\lim_{h\to 0}\eta_\mu(h) = \eta$ برای $\mu = 0, 1, 2, \dots, k-1$ صدق کنند.

تعریف ۲.۱ روش چند گامی خطی (۲.۱) را از مرتبه p گوییم هرگاه در عملگر تفاضلی (۴.۱) داشته باشیم

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0, \qquad C_{p+1} \neq 0,$$

C_{p+1} ثابت خطا نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱ روش چند گامی خطی (۲.۱) را سازگار[11] گوییم هرگاه از مرتبه $p \geq 1$ باشد.

به وضوح دیده می‌شود که روش چند گامی خطی (۲.۱) سازگار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j.$$

برای روش چند گامی خطی (۲.۱) چندجمله‌های مشخصه[12] اول و دوم را به ترتیب با $\rho(\zeta)$ و $\sigma(\zeta)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j, \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j.$$

با استفاده از روابط فوق نتیجه می‌شود که روش چند گامی خطی (۲.۱) سازگار است اگر و تنها اگر

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho'(1) = \sigma(1).$$

[11] consistent

[12] characteristic polynomials

برای یک روش سازگار چندجمله‌ای مشخصه $\rho(\zeta)$ همواره یک ریشه برابر $+1$ خواهد داشت که آن را ریشه اصلی[13] گوییم و با ζ_1 نشان می‌دهیم. بقیه ریشه‌ها را ریشه‌های کاذب[14] گوییم و هنگامی رخ می‌دهند که تعداد گام‌های روش بیشتر از یک باشد. یعنی هنگامی که معادله دیفرانسیل مرتبه اول با معادله تفاضلی مرتبه بیشتر از یک جایگزین شود.

تعریف ۴.۱ روش چند گامی خطی (۲.۱) را صفر–پایدار[15] گوییم هرگاه همه ریشه‌های $\rho(\zeta)$ داخل و روی دایره واحد بوده و ریشه‌هایی که روی دایره قرار می‌گیرند، ساده باشند.

قضیه ۵.۱ سازگاری و صفر–پایداری باهم شرط لازم و کافی برای همگرایی هستند.

نکته: روش تک گامی سازگار لزوما صفر–پایدار است و در نتیجه همگراست.

تعریف ۶.۱ چندجمله‌ای پایداری[16] روش (۲.۱) به صورت

$$\pi(r,\bar{h}) = \rho(r) - \bar{h}\sigma(r)$$

تعریف می‌شود که در آن $\bar{h} = h\lambda$.

به وضوح وقتی $\bar{h} = 0$، ریشه‌های r_s از چندجمله‌ای پایداری منطبق بر ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $\rho(\zeta)$ هستند، که با فرض صفر–پایداری، در داخل یا روی دایره واحد قرار دارند. با فرض سازگاری و صفر–پایداری، $\rho(\zeta)$ یک ریشه ساده در $+1$ دارد که آن را با ζ_1 نشان دادیم. فرض کنید $r_1(\bar{h})$ ریشه‌ای از $\pi(r,\bar{h}) = 0$ باشد که $\lim r_1(\bar{h}) = 1$ وقتی $\bar{h} \longrightarrow 0$. این ریشه را ریشه اصلی می‌نامند.

[13] principal root

[14] spurious roots

[15] zero-stable

[16] stability polynomial

تعریف ۷.۱ روش چند گامی خطی (۲.۱) را پایدار مطلق[17] گوییم هرگاه داشته باشیم

$|r_s(\bar{h})| < 1, \quad s = 1, 2, \ldots, k$

ناحیه پایداری مطلق برای روش چند گامی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A = \{\bar{h} \in C \ : \ |r_s(\bar{h})| \leq 1; \quad s = 1, 2, \ldots, k\}.$$

تعریف ۸.۱ روش چند گامی خطی (۲.۱) را A–پایدار[18] گوییم هرگاه

$$\{\bar{h} \in C \ : \ Re(\bar{h}) < 0\} \subset A.$$

مناسب‌ترین روش برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل سخت روش‌های A–پایدار است، ولی این دسته از روش‌ها بسیار محدود هستند.

تعریف ۹.۱ روش چند گامی خطی (۲.۱) را L–پایدار[19] گوییم هرگاه اولاً A–پایدار بوده و ثانیاً هرگاه روی مساله آزمون $y' = \lambda y$ به کار ببریم، برای $\bar{h} \to -\infty$، $\lim y_n = 0$.

یک روش برای تعیین ناحیه پایداری مطلق، استفاده از روش مکان هندسی ریشه[20] است. در این روش پس از به دست آوردن $\pi(r, \bar{h}) = \rho(r) - \bar{h}\sigma(r)$، آن را نسبت به $\bar{h}$ حل می کنیم (با استفاده از روش‌های عددی مانند روش نیوتن—رافسون). سپس نمودار $|r_s|, \quad s = 1, 2, \ldots, k$ را نسبت به $\bar{h}$ رسم می‌کنیم. مقادیری از r را که روی دایره واحد هستند انتخاب می‌کنیم. مقادیر $\bar{h}$ متناظر با این نقاط، مرز ناحیه

absolute stable[17]

A-stable[18]

L-stable[19]

root locus method[20]