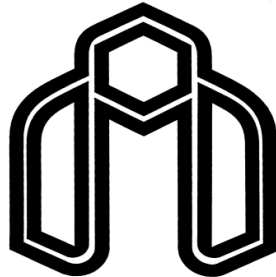


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک  
گروه تبدیل انرژی

## بررسی عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگرا

دانشجو:

سبحان مسیبه درچه

استاد راهنما:

دکتر محمد محسن شاه مردان

استاد مشاور:

دکتر محمود نوروزی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمستان ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سبحان مسیبه درچه

تحت عنوان:

بررسی عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگرا

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

| امضاء | اساتید مشاور                         | امضاء | اساتید راهنما                               |
|-------|--------------------------------------|-------|---|
|       | نام و نام خانوادگی :<br>محمود نوروزی |       | نام و نام خانوادگی :<br>محمد محسن شاه مردان |
|       | نام و نام خانوادگی :                 |       | نام و نام خانوادگی :                        |

| امضاء | نماینده تحصیلات تکمیلی                 | امضاء | اساتید داور                            |
|-------|--|-------|--|
|       | نام و نام خانوادگی :<br>محمود چهارطاقی |       | نام و نام خانوادگی :<br>محسن نظری      |
|       |  |       | نام و نام خانوادگی :<br>پوریا اکبرزاده |
|       |  |       | نام و نام خانوادگی :                   |
|       |  |       | نام و نام خانوادگی :                   |

تقدیم به

پدرم،

مادرم

و همسر آینده‌ام!

## تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه اساتید محترم آقای دکتر محمد محسن شاه‌مردان و آقای دکتر محمود نوروزی که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

## تعهد نامه

اینجانب سبجان مسیبه درچه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان "بررسی عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگرا" تحت راهنمایی دکتر محمد محسن شاه مردان و دکتر محمود نوروزی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در این تحقیق، جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرای متقارن محوری به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی در حالت کلی در مختصات استوانه‌ای ارائه شده‌اند و سپس روابط کلی معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک (مدل CEF) ارائه و توابع ویسکومتریک لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و دوم با استفاده از مدل کاریو-یاسودا ارائه شده است. در ادامه، روش عددی مورد استفاده تشریح و معادلات حاکم در این تحقیق، با استفاده از روش تفاضل محدود به صورت صریح گسسته‌سازی شده‌اند. جهت پایداری عددی بیشتر، شبکه عددی جابجا شده به کار گرفته شد تا پارامترهای جریان به یکدیگر جفت شده و حل عددی همگرایی بهتری پیدا کند. جهت حل پیمایش زمان مجازی، از روش تراکم‌پذیری مصنوعی استفاده شده تا فشار نیز مانند پارامترهای دیگر جریان در هر زمان محاسبه شود. نتایج عددی برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک شامل خطوط جریان، توزیع سرعت، توزیع فشار، تنش برشی، لزجت، دما، ناسلت و ... ارائه و در ذیل به گزیده‌ای از نتایج حاصله از این حل عددی اشاره شده است.

- خاصیت الاستیک سیال، باعث کاهش بیشینه سرعت محور در مرکز می‌شود.
- افت فشار سیال نیوتنی در مقایسه با سیال نیوتنی تعمیم‌یافته (رقیق‌شونده) و ویسکو-الاستیک بیشتر می‌باشد.
- کاهش اندیس توانی  $n$ ، باعث افت فشار کمتر و افزایش خاصیت الاستیک باعث افزایش افت فشار می‌شود.

- طول جریان در حال توسعه سیال رقیق‌شونده و ویسکوالاستیک از سیال نیوتنی بیشتر می‌باشد. در حالت کلی، کاهش اندیس توانی، باعث افزایش طول در حال توسعه جریان و افزایش خاصیت الاستیک باعث کاهش این طول می‌شود.
- گردابه‌های ایجاد شده در جریان سیال در تبدیل واگرا، برای سیال ویسکوالاستیک و رقیق‌شونده بزرگتر از سیال نیوتنی می‌باشد. در حالت کلی، کاهش اندیس توانی  $n$  باعث افزایش طول گردابه و افزایش اختلاف تنش اول باعث کاهش این طول می‌شود و اختلاف تنش دوم تاثیری بر گردابه‌ها ندارد.
- نرخ برش تعمیم‌یافته سیال در کنار دیواره‌ها و در منطقه‌ای که تغییر سطح مقطع وجود دارد به شدت بالاست و همین امر باعث کاهش لزجت سیال در این مناطق می‌شود.
- نرخ برش تعمیم‌یافته سیال در خط مرکزی در قسمت توسعه‌یافته جریان و مناطق مرکزی گردابه‌ها مقادیر کوچکی دارد و همین امر باعث می‌شود لزجت بی‌بعد سیال تقریباً به مقدار یک برسد.
- توزیع ناسلت در تبدیل همگرا و واگرا به دلیل وجود دیواره عمودی در محل تغییر سطح مقطع، در این منطقه دارای بیشینه محلی می‌باشد و پس از آن به مقدار ثابتی میل می‌کند.
- ناسلت سیال ویسکوالاستیک بیشتر از سیال نیوتنی می‌باشد.



## فهرست مطالب

|  |    |
|--|----|
| فصل ۱. مقدمه   | ۱  |
| ۱-۱- مقدمه   | ۲  |
| ۲-۱- طبقه بندی سیالات ویسکوالاستیک                       | ۲  |
| ۳-۱- پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک         | ۶  |
| ۴-۱- معادلات متشکله مواد و سیالات ویسکوالاستیک           | ۶  |
| ۴-۱-۱- مدل‌های ویسکوالاستیک خطی                          | ۷  |
| ۴-۱-۲- مدل‌های ویسکوالاستیک غیر خطی                      | ۹  |
| فصل ۲. پیشینه تحقیق                                      | ۱۵ |
| ۱-۲- جریان سیال در تبدیل واگرا                           | ۱۶ |
| ۱-۱-۲- جریان سیال در تبدیل واگرای صفحه‌ای                | ۱۶ |
| ۲-۱-۲- جریان سیال در تبدیل واگرای متقارن محوری           | ۲۶ |
| ۳-۱-۲- جریان سیال در تبدیل همگرا                         | ۲۹ |
| فصل ۳. معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت              | ۳۳ |
| ۱-۳- مقدمه   | ۳۴ |
| ۲-۳- پارامترهای بی بعد جریان                             | ۳۴ |
| ۳-۳- معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی مربوطه           | ۳۵ |
| ۴-۳- معادله حاکم بر انتقال حرارت و شرایط مرزی مربوطه     | ۳۸ |
| ۵-۳- معادله متشکله سیال ویسکوالاستیک (مدل CEF)           | ۴۰ |
| ۶-۳- معادله ساختاری سیال CEF در دستگاه مختصات استوانه‌ای | ۴۴ |
| فصل ۴. روش عددی  | ۴۶ |
| ۱-۴- مقدمه   | ۴۷ |
| ۲-۴- تحلیل عددی جریانهای دائمی                           | ۴۷ |
| ۳-۴- شبکه محاسباتی                                       | ۴۸ |
| ۴-۴- گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت     | ۵۰ |
| ۵-۴- شکل گسسته معادلات حاکم                              | ۵۱ |
| ۶-۴- شرایط مرزی جریان و انتقال حرارت                     | ۵۵ |
| ۷-۴- پایداری عددی  | ۵۷ |
| ۸-۴- الگوریتم حل عددی                                    | ۵۸ |
| فصل ۵. بررسی نتایج                                       | ۶۱ |
| ۱-۵- مقدمه   | ۶۲ |

- ۶۲-۵-۲- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه.....
- ۶۴-۵-۳- ارزیابی صحت نتایج.....
- ۶۵-۵-۴- حل میدان جریان.....
- ۶۶-۵-۴-۱- حل میدان جریان برای تبدیل همگرا متقارن محوری.....
- ۷۰-۵-۴-۲- حل میدان جریان برای تبدیل واگرای متقارن محوری.....
- ۸۶-۵-۵- حل میدان دما برای جریان در تبدیل همگرای متقارن محوری.....
- ۹۰-۵-۶- حل میدان دما برای جریان در تبدیل واگرای متقارن محوری.....
- ۹۳-۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادها.....

## فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان. ۴.....
- شکل (۲-۱) طرح شماتیک جریان برشی ساده (جریان کوئت). ۴.....
- شکل (۱-۲) مقایسه خطوط جریان برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک (مدل UCM). ۱۷.....
- شکل (۲-۲) مقایسه خطوط جریان برای سیال غیرنیوتنی در  $Re_{gen} = 0.0001$ . ۱۸.....
- شکل (۳-۲) شکل شماتیک پدیده شاخه‌ای شدن در تبدیل واگرای صفحه‌ای. ۱۹.....
- شکل (۴-۲) تغییرات فشار بدون بعد در راستای محور مرکزی. ۲۱.....
- شکل (۵-۲) تغییرات طول گردابه با رینولدز تعمیم‌یافته برای سیال رقیق‌شونده. ۲۲.....
- شکل (۶-۲) اثر افزایش رینولدز بر شاخه‌ای شدن جریان سیال ویسکوالاستیک. ۲۳.....
- شکل (۷-۲) تغییرات طول گردابه نسبت به رینولدز برای سیال نیوتنی، کوآدراتیک و توانی. ۲۳.....
- شکل (۸-۲) خطوط جریان سیال ویسکوالاستیک در  $Re=40$ . ۲۵.....
- شکل (۹-۲) خطوط جریان سیال ویسکوالاستیک در اعداد رینولدز مختلف. ۲۶.....
- شکل (۱۰-۲) خطوط جریان سیال نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری ۱:۳ در  $Re=100$ . ۲۶.....
- شکل (۱۱-۲) توزیع فشار سیال نیوتنی، اولدریوید بی و PPT در محور مرکزی. ۳۰.....
- شکل (۱۲-۲) توزیع سرعت محوری در محور تقارن برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک. ۳۰.....
- شکل (۱-۳) شکل شماتیک تبدیل همگرا و واگرا. ۳۶.....
- شکل (۱-۴) شبکه جابجاشده و نحوه تخصیص پارمترهای جریان و انتقال حرارت روی آن. ۴۹.....
- شکل (۱-۵) خطوط جریان در تبدیل همگرا در  $Re=20$  برای الف) سیال نیوتنی ب) سیال ویسکوالاستیک ( $n = 0.9, We = 0.05, \chi = 0.1$ ). ۶۷.....
- شکل (۲-۵) توزیع سرعت محوری سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در  $Re=20$ . ۶۸.....
- شکل (۳-۵) توزیع سرعت سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در مقطع انتهایی. ۶۸.....
- شکل (۴-۵) توزیع لزجت در نواحی مختلف هندسه مسئله برای سیال ویسکوالاستیک. ۶۹.....
- شکل (۵-۵) توزیع فشار محوری برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا. ۷۰.....
- شکل (۶-۵) خطوط جریان سیال نیوتنی تعمیم‌یافته. ۷۰.....
- شکل (۷-۵) توزیع سرعت محوری سیال نیوتنی تعمیم‌یافته. ۷۳.....
- شکل (۸-۵) پروفیل سرعت سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در  $Re=20$  در مقطع  $\frac{x}{D} = \frac{1}{2}$ . ۷۳.....
- شکل (۹-۵) توزیع نرخ برش و لزجت بدون بعد سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در محور تقارن. ۷۵.....
- شکل (۱۰-۵) پروفیل لزجت و نرخ برش بدون بعد سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در مقطع  $\frac{x}{D} = 20$ . ۷۷.....
- شکل (۱۱-۵) توزیع فشار بدون بعد سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در محور تقارن به‌ازای  $Re=20$ . ۷۸.....
- شکل (۱۲-۵) توزیع سرعت سیال ویسکوالاستیک در مقاطع مختلف. ۷۸.....

- شکل (۵-۱۳) توزیع سرعت محوری در  $Re = 20$  ..... ۷۹
- شکل (۵-۱۴) توزیع تنش برشی  $\frac{\tau_w D}{\eta_0 U}$  در  $Re = 20$  ..... ۸۰
- شکل (۵-۱۵) توزیع الف) لزجت ب) اختلاف تنش عمودی اول ج) اختلاف تنش عمودی دوم ..... ۸۲
- شکل (۵-۱۶) توزیع فشار سیال نیوتنی تعمیم یافته و ویسکوالاستیک در محور تقارن ..... ۸۳
- شکل (۵-۱۷) مقایسه خطوط جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در نسبت های مختلف ..... ۸۶
- شکل (۵-۱۸) توزیع دمای متوسط سیال نیوتنی در طول لوله به ازای  $Re=60$  و  $Pr=0/85$  ..... ۸۷
- شکل (۵-۱۹) مقدار ناسلت سیال نیوتنی در طول لوله به ازای  $Re=60$  و  $Pr=0/85$  ..... ۸۷
- شکل (۵-۲۰) توزیع دما در تبدیل همگرا در  $Re=20$  و  $Pr=0/5$  ..... ۸۸
- شکل (۵-۲۱) توزیع ناسلت در  $Re=20$  و  $Pr=0/5$  ..... ۹۰
- شکل (۵-۲۲) توزیع دمای خط مرکزی در  $Re=20$  و  $Pr=2$  ..... ۹۱
- شکل (۵-۲۳) توزیع دمای متوسط در  $Re=20$  و  $Pr=2$  ..... ۹۱
- شکل (۵-۲۴) توزیع ناسلت در  $Re=20$  و  $Pr=2$  برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک ..... ۹۲

## فهرست جداول

- جدول (۱-۲) طول گردابه بدون بعد سیال نیوتنی در اعداد رینولدز و نسبت‌های واگرایی مختلف. .... ۲۷
- جدول (۱-۵) خواص شبکه‌بندیهای مختلف مورد استفاده برای تبدیل همگرا. .... ۶۳
- جدول (۲-۵) خواص شبکه‌بندیهای مختلف مورد استفاده برای تبدیل واگرا. .... ۶۳
- جدول (۳-۵) بیشینه سرعت سیال نیوتنی در در تبدیل همگرا برای ۳ نوع شبکه‌بندی. .... ۶۴
- جدول (۴-۵) طول گردابه در تبدیل واگرا برای ۳ نوع شبکه‌بندی با خطاهای نسبی در  $Re=20$ . .... ۶۴
- جدول (۵-۵) مقایسه طول گردابه‌های حل عددی با نتایج الیویرا و همکاران [۲۶]. .... ۶۵
- جدول (۶-۵) مجموعه پارامترهای در نظر گرفته شده در این تحقیق. .... ۶۶
- جدول (۷-۵) طول گردابه در  $Re=20$  به‌ازای خواص غیرنیوتنی مختلف. .... ۸۴

## فصل ۱. مقدمه

## ۱-۱- مقدمه

در این فصل، مروری کوتاه بر مکانیک سیالات غیرنیوتنی مخصوصا سیالات ویسکوالاستیک صورت می‌گیرد. در ابتدا تفاوت سیالات نیوتنی با سیالات غیرنیوتنی تشریح شده است. سپس بحث کوتاهی روی چند معادله ساختاری سیالات ویسکوالاستیک انجام شده است.

## ۱-۲- طبقه‌بندی سیالات ویسکوالاستیک

سیال نیوتنی سیالی است که اولاً تنش تسلیم نداشته باشد و ثانياً تنش برشی آن با نرخ برش رابطه خطی داشته باشد. نسبت تغییرات تنش به نرخ برش که برای سیال نیوتنی همواره مقداری ثابت می‌باشد لزجت نامیده می‌شود. سیال غیرنیوتنی نیز به سیالی گفته می‌شود که حداقل یکی از شرایط سیال نیوتنی را نداشته باشد. این سیالات به سه گروه زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

- سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان
- سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان
- سیالات ویسکوالاستیک

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان، سیالاتی هستند که رابطه تنش برشی و لزجت در آن‌ها به صورت غیرخطی می‌باشد. در حالت‌های خاصی این گروه از سیالات دارای تنش تسلیم نیز هستند. در این گونه از مواد، برای اینکه ماده جریان پیدا کند این است که تنش به حد خاصی برسد و در تنش‌های کمتر از این مقدار مانند یک جامد عمل می‌کند و تنش را تحمل می‌کند. پلاستیک بینگهام یکی از معروفترین موادی است که دارای تنش تسلیم می‌باشد. خمیردندان یک مثال ساده برای سیالات دارای تنش تسلیم می‌باشد که باید تنش برشی از حد مشخصی بیشتر شود که آن جریان پیدا کند. سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان که بدون تنش تسلیم هستند به نام سیالات نیوتنی تعمیم‌یافته معروف هستند و به دو گروه تقسیم می‌شوند:

سیالات شبه پلاستیک

سیالات دایلاتنت

لزجت این مواد به صورت یک تابع از نرخ برش سیال می‌باشد. مدل‌های زیادی برای ارائه این رابطه بین لزجت و نرخ برش ارائه شده است. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین این مدل‌ها، مدل توانی است که در آن لزجت به عنوان یک تابع توانی نرخ برش در نظر گرفته می‌شود [۱]. یکی از اشکالات این مدل، این است که لزجت در نرخ برش صفر برابر مقداری نامحدود می‌شود. البته عکس این قضیه نیز صادق است، یعنی لزجت در نرخ برش‌های بزرگ بسیار کوچک می‌شود. مدل‌های دیگری نیز مانند مدل کراس، مدل کاریو-یاسودا و مدل راینر-فیلیپوف از جمله مدل‌های نیوتنی تعمیم‌یافته هستند که مشکل مدل توانی را ندارند [۲]. در این مدل‌ها، لزجت در نرخ برش صفر و لزجت در نرخ برش‌های بالا معمولاً مقداری ثابت به دست می‌آید که آن‌ها را به ترتیب با  $(\eta_0)$  و  $(\eta_\infty)$  نمایش می‌دهند. معمولاً با افزایش ثابت‌های مدل‌های غیرنیوتنی، رفتار تنش وابسته به نرخ برش بهتر مدل می‌شود.

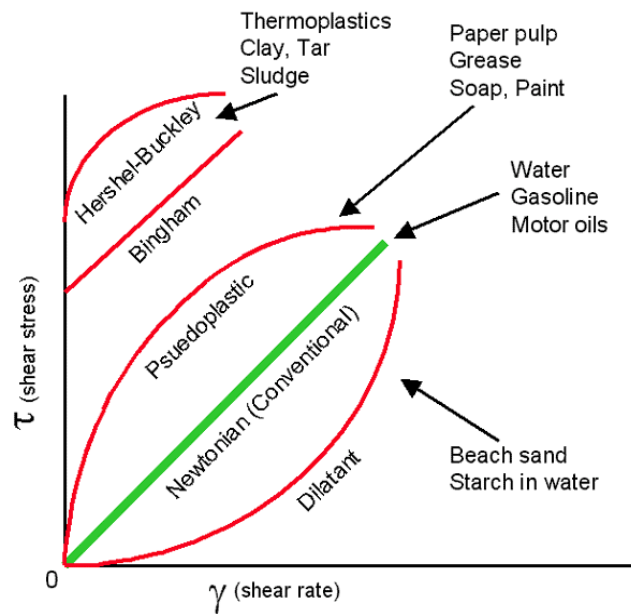
سیالات شبه پلاستیک، سیالاتی هستند که افزایش نرخ برش باعث کاهش لزجت آن‌ها می‌شود. سیالات دایلاتنت رفتاری عکس این حالت از خود نشان می‌دهند. در اکثر مدل‌های غیرنیوتنی به ازای اندیس توانی کوچکتر از ۱ ( $n < 1$ ) رفتار شبه پلاستیک و به ازای اندیس توانی بزرگتر از ۱ ( $n > 1$ ) رفتار دایلاتنت دارند. شایان ذکر است برای  $n = 1$  سیال رفتار نیوتنی از خود نشان می‌دهد. شکل (۱-۱) رفتار تنش در برابر نرخ برش را برای انواع سیالات نمایش می‌دهد.

در سیالات غیرنیوتنی تابع زمان، لزجت تابعی از نرخ برش و زمان می‌باشد. در این مواد، با اعمال نرخ برش، ساختمان ماده مدام تغییر می‌کند (لزجت نیز تغییر می‌کند) تا اینکه لزجت به یک مقدار ثابتی برسد.

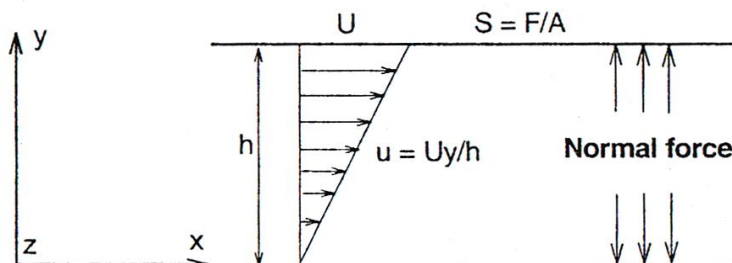
گروه سوم از سیالات غیرنیوتنی، سیالات ویسکوالاستیک هستند که همزمان خواص ویسکوز سیال و الاستیک جامد را دارا می‌باشند. ساده‌ترین آزمایشی که در مورد رفتار سیال ویسکوالاستیک می‌توان



به آن اشاره کرد، آزمایش جریان برشی ساده می‌باشد. جریان سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی را در نظر بگیرید (شکل (۲-۱) را ببینید) که صفحه بالایی با سرعت  $U$  حرکت می‌کند. اگر صفحه بالایی ناگهان متوقف شود تنش به طور آنی صفر نمی‌شود. این در حالی است که برای سیال نیوتنی تنش سریعاً صفر می‌شود [۴]. پس از توقف صفحه بالایی در جریان برش سیال ویسکوالاستیک، این صفحه کمی عقب برمی‌گردد. این بازگشت، به خاصیت الاستیک سیال برمی‌گردد.



شکل (۱-۱) منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان [۳].



شکل (۲-۱) طرح شماتیک جریان برشی ساده (جریان کوئت) [۴].

خاصیت دیگر سیالات ویسکوالاستیک این است که این مواد معمولاً هنگامی که سیلان پیدا کنند، تنش‌های عمودی نابرابر پیدا می‌کنند. در جریان برشی ساده سیال نیوتنی، تنش عمودی همواره مقداری ثابت است که برابر با فشار استاتیکی می‌باشد. این در حالی است که در جریان برشی سیال ویسکوالاستیک، بین تنش‌های عمودی اختلاف وجود دارد. در جریان برش ساده، اگر جهت جریان را جهت  $x$  و راستای تغییرات سرعت را جهت  $y$  بنامیم، اختلاف تنش عمودی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \quad (1-1)$$

حال، اگر جهت راستگرد عمود بر جهت‌های  $x$  و  $y$  را جهت  $z$  بنامیم، می‌توان اختلاف تنش عمودی دوم را نیز به صورت زیر تعریف کرد [۲]:

$$N_1 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \quad (2-1)$$

ثابت‌های اختلاف تنش عمودی نیز بر اساس روابط (1-1) و (2-1) به دست می‌آیند [۲]:

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \quad (3-1)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \quad (4-1)$$

که در آن،  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  ثابت‌های تنش عمودی اول و دوم و  $\dot{\gamma}$  نرخ برش می‌باشد. همانطور که قبلاً اشاره شد لزجت در سیالات غیرنیوتنی تابعی از نرخ برش می‌باشد. بنابراین برای سیال ویسکوالاستیک می‌توان بر اساس تنش برشی و نرخ برش، لزجت سیال ویسکوالاستیک را به دست آورد [۲]:

$$\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}} \quad (5-1)$$

بر اساس روابط مذکور، لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و دوم در سیال ویسکوالاستیک همگی تابعی از نرخ برش می‌باشد.

### ۱-۳- پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک

معمولا برای بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک، از دو عدد بی بعد دبورا و وایزنبرگ استفاده می‌کنند. عدد دبورا، بر اساس نسبت زمان آسودگی از تنش به زمان مشخصه تعریف می‌شود. نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از لزجت سیال را نیز به صورت عدد وایزنبرگ نمایش می‌دهند [۴]:

$$De = \lambda\omega = \lambda/T \quad (۶-۱)$$

$$Wi = \lambda\dot{\gamma} \quad (۷-۱)$$

که در آن،  $\lambda$  زمان مشخصه ماده (زمان آسودگی از تنش)،  $T$  زمان مشخصه جریان،  $\omega$  فرکانس مشخصه جریان و  $\dot{\gamma}$  نرخ برش جریان می‌باشد. هر چه اعداد دبورا و وایزنبرگ برای یک ماده کوچکتر باشد ماده شانس جریان یافتن بیشتری پیدا می‌کند.

### ۱-۴- معادلات متشکله مواد و سیالات ویسکوالاستیک

منظور از معادله متشکله، معادله‌ای است که قادر به بیان رابطه بین تنش و تغییر شکل یک ماده مشخص باشد. در این بخش مروری اجمالی بر معادلات متشکله سیالات ویسکوالاستیک صورت می‌گیرد. معادله متشکله سیال نیوتنی توسط اسحاق نیوتن بیان شد [۵].  
قانون پایه یک سیال نیوتنی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{ij} = (-P + \lambda \dot{\epsilon}_{kk}) \delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} \quad (۸-۱)$$

در رابطه (۸-۱)،  $P$  فشار استاتیکی،  $\dot{\epsilon}$  نرخ برش و  $\lambda$  و  $\eta$  ثابتهای ویسکوز هستند.

به‌طور کلی برای مواد ویسکوالاستیک می‌توان بی‌نهایت معادله متشکله در نظر گرفت! این معادلات می‌توانند به اشکال متنوعی رابطه‌ای بین بسط مشتقات و انتگرال‌های تنش و نرخ برش را در بر بگیرند.

می‌توان معادلات متشکله را به دو دسته معادلات خطی و غیر خطی نیز تقسیم نمود. در ادامه در مورد این معادلات بحث شده و تعدادی از معروف‌ترین این معادلات معرفی می‌شوند.

### ۱-۴-۱- مدل‌های ویسکوالاستیک خطی

مدل‌های ویسکوالاستیک خطی بر پایه تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی ارائه شده‌اند. به عبارتی این مدل‌ها از ترکیب‌های مختلف مجموعه‌ای از فنرها و دمپرهای خطی حاصل شده‌اند. لذا معادله متشکله هر مدل ویسکوالاستیک خطی به شکل زیر قابل بیان است [۶،۷]:

$$(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \lambda_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}) \tau_{ij} = \eta_0 (1 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \xi_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}) \gamma_{ij} \quad (9-1)$$

در رابطه (۹-۱)، مقادیر  $\lambda_i$  و  $\xi_i$  به ترتیب زمان آسودگی از تنش و زمان تاخیر سیال از مرتبه  $i$  بوده و  $\eta_0$  لزجت در نرخ برش صفر،  $\tau_{ij}$  تنش برشی و  $\gamma_{ij}$  نرخ برش است. همچنین مقادیر  $m$  و  $n$  بصورت  $n = m$  یا  $n = m + 1$  با هم رابطه دارند. بنابراین با انتخاب اختیاری مقادیر  $n$  و  $m$  می‌توان مدل ویسکوالاستیک جدیدی را برای یک ماده تشکیل داد. در اینجا ثابت‌های زمانی مرتبه پایین از ثابت‌های زمانی مرتبه بالا غالب تر هستند. همچنین به ازای  $\lambda_i = \xi_i = 0$  مدل مشابه سیالات نیوتنی خواهد بود. مقدار نرخ برش ( $\gamma_{ij}$ ) نیز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (10-1)$$

که در رابطه (۱۰-۱)،  $u$  سرعت و  $x$  جهت مختصات است. مدل‌های ویسکوالاستیک خطی برای شبیه‌سازی جریان محلول‌های رقیق پلیمری و سوسپانسیون‌های رقیق ذرات کروی جامد در سیالات نیوتنی بسیار مناسب هستند. اصولاً پاسخ این مدل‌ها برای تغییر شکل‌های کوچک با فیزیک جریان سازگار بوده اما پاسخ آن برای تغییر شکل‌های بزرگ پرخطا است. استفاده از این مدل‌ها در محاسبات مربوط به تجهیزات رئومتر و برای تغییر شکل‌های کوچک متداول است.