بسم اللّٰه الرّحمن الرّحيم

گروه ریاضی

پایان نامه تحت عنوان:

بررسی هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل‌های با بُعد کوچک و ایده‌آل‌های اوّل وابسته‌ی آن‌ها

توسط:

زهرا جواهری پسندیده

استاد راهنما:

آقای دکتر محرّم آقاپور نهر

دانشگاه اراک

زمستان ۱۳۸۸

چکیده

بررسی هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل‌های با بُعد کوچک، موضوع اصلی این رساله می‌باشد. در این راستا به بیان و اثبات چندین قضیّه می‌پردازیم .

بدین منظور فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و نوتری و نابدیهی، ($0_R \neq 1_R$)، M، $R-$مدولی متناهی مولد ناصفر و I ایده‌آلی از R و t عددی صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که برای هر $i < t$، $dimSuppH^i_I(M) \leq 1$. نشان می‌دهیم $R-$ مدول‌های $H^0_I(M), ..., H^{t-1}_I(M)$، $I-$هم‌متناهی هستند و $R-$مدول $Hom_R(R/I, H^t_I(M))$ متناهی مولد است و نتیجه می‌گیریم که اگر I ایده‌آلی با بُعد یک باشد، ($dimR/I = 1$)، آن‌گاه برای هر $i \geq 0$، $H^i_I(M)$، $I-$هم‌متناهی هستند.

هم‌چنین اثبات می‌کنیم که اگر R حلقه‌ای موضعی باشد و برای هر $i < t$، $dimSuppH^i_I(M) \leq 2$، آن‌گاه برای هر $j \geq 0$ و $i < t$، $R-$مدول‌های $Ext^j_R(R/I, H^i_I(M))$ و $Hom_R(R/I, H^t_I(M))$، لسکرین ضعیف هستند.

هم‌چنین ثابت می‌کنیم که اگر $dim_R R/I \leq 2$، آن‌گاه برای هر $i \geq 0$، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل وابسته به $H^i_I(M)$، متناهی است.

واژه‌های کلیدی :

ایده‌آل‌های اوّل وابسته، مدول‌های هم‌متناهی، بُعد متناهی، بُعد کوهمولوژی، مدول‌های هم‌مینیماکس، کوهمولوژی موضعی ، مدول‌های مینیماکس، مدول‌های لَسکرین ضعیف.

⋆ ⋆ ⋆

نمادگذاری

در سراسر این رساله R حلقه‌ای جابجایی، یکدار، نوتری و نابدیهی ($1_R \neq 0_R$) و I ایده‌آلی دلخواه از R می باشد، مگر این‌که در جایی غیر آن ذکر شود .

از نمادهای $\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}$ به ترتیب برای نمایش دادن اعداد طبیعی ، اعداد صحیح نامنفی و اعداد صحیح استفاده خواهیم کرد.

هم چنین فرض می‌کنیم $Max(R)$،$Spec(R)$،$Min(R), Min(I)$،$Jac(R)$، $supA$، $infA$، $minA$، $maxA$ به ترتیب مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R، مجموعه‌ی ایده‌آل های اوّل R، مجموعه ی ایده‌آل های اوّل مینیمال R و مجموعه‌ی ایده‌آل های اوّل مینیمال ایده‌آل I، رادیکال جیکوبسن R و سوپریمم، اینفیمم، مینیمم و ماکسیممِ مجموعه ی A باشد .

و از نماد $\leqslant$ و $\trianglelefteq$، به ترتیب برای نمایشِ زیر مدول بودن و ایده‌آل بودن استفاده خواهیم کرد و حلقه‌ی نوتری R با تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ را با نماد $(R, \mathfrak{m})$ نمایش می‌دهیم.

⋆ ⋆ ⋆

پیشگفتار تاریخی

جبرجابجایی مطالعه‌ای است روی حلقه‌ها، مدول‌ها و نگاشت‌های بین آن‌ها. به‌عنوان یکی از ابزارهای توانمند در مطالعه‌ی حلقه‌ها می‌توان به مدول‌های کوهمولوژی موضعی اشاره کرد که خود موجب پیدایش شاخه‌ای ازجبر همولوژی می‌باشد و حجم وسیعی از پژوهش‌های ریاضی‌دانان معاصررا به خود اختصاص داده‌است. اصل و منشأ پیدایش این نمونه‌ی زیبای جبری را می توان عموماً در مباحثی در هندسه و فیزیک یافت گر چه مقاله‌ی سِر[۱] در سال ۱۹۵۵، به‌نوعی حاوی اساس و بنیان مباحث کوهمولوژی بود و لیکن تا سال ۱۹۶۷ که نوشته‌های گروتندیک[۲] و هارتشورن[۳] منتشر شد تأثیرگذاری کوهمولوژی موضعی به‌عنوان ابزاری جبری چندان شناخته شده نبود.

برای R–مدول دلخواه M، i–امین مدول کوهمولوژی از M نسبت به ایده‌آل I را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H_I^i(M) := \varinjlim_{n \geq ۱} Ext_R^i(R/I^n, M)$$

به عبارتی گروتندیک و هارتشورن را می توان اوّلین کسانی دانست که مفاهیم کوهمولوژی موضعی را از علم فیزیک به زبان جبر (هندسه‌ی جبری) به‌صورت مدوّن در آوردند. گرچه این یادداشت‌ها عموماً دیدگاهی هندسی داشتند ولی به‌زودی کوهمولوژی موضعی به‌صورت دانشی لازم و ضروری برای بسیاری از ریاضی‌دانان جبر جابجایی در آمد و امروزه به‌عنوان شاخه‌ای کاملاً جبری از جبر همولوژی نیز مطرح می‌باشد.

سؤالات زیادی در باره‌ی مدول‌های کوهمولوژی موضعی وجود دارد. منشأ یکی از این سؤالات از ادغام کارهای ماتلیس[۴] و گروتندیک به‌ترتیب در سال های ۱۹۵۸ و ۱۹۶۶، بود که قضیّه‌ی زیرپیامد آن‌هاست:

---

[۱] J. P. Serre

[۲] Grothendieck

[۳] Hartshorne

[۴] Matlis

قضیّه‌ی ۱ : فرض کنید M یک مدول دلخواه روی حلقه‌ی موضعی و نوتری کامل $(R,\mathfrak{m})$ باشد. دراین‌صورت M آرتینی است اگروتنهااگر $Hom_R(R/\mathfrak{m},M)$ متناهی مولد باشد و $Supp(M)=\{\mathfrak{m}\}$.

از طرفی هارتشورن در سال ۱۹۶۷، ثابت کرد که برای هر R–مدول متناهی مولد M، روی حلقه‌ی موضعی و نوتری $(R,\mathfrak{m})$، به‌ازای هر $i\geq 0$، مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ آرتینی‌اند.

این مطلب انگیزه خوبی فراهم کرد تا گروتندیک در سال‌های ۶۹—۱۹۶۸، حدس زیر را بر مبنای تعویض $\mathfrak{m}$، با یک ایده‌آل دلخواه I در تعقیب حکم فوق ارائه نماید.

حدس گروتندیک:

فرض کنید M روی حلقه موضعی نوتری $(R,\mathfrak{m})$ یک مدول متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت برای هر $i\geq 0$، مدول‌های $Hom_R(R/I,H^i_I(M))$ متناهی مولد هستند.

دیری نگذشت که هارتشورن در سال ۱۹۷۰، با ارائه‌ی مثال نقض زیر نشان داد که حتّی اگر R حلقه‌ی موضعی منظّم باشد حدس گروتندیک منفی است. بدین ترتیب خط بطلانی بر حدس گروتندیک کشیده شد.

مثال نقض هارتشورن:

فرض کنید $R=K[[x,y,u,v]]$، حلقه‌ی سری های صوری توانی چهار متغیّره با ضرایب در میدان K باشد. قرار می‌دهیم : $I=(x,u)$ و $M=\dfrac{R}{(xy-uv)}$ در این صورت مدول $Hom_R(R/I,H^2_I(M))$ متناهی مولد نیست.

هم‌چنین هارتشورن در همان سال، مفهوم I–هم‌متناهی برای R–مدول دلخواهِ M را به صورت زیر مطرح کرد:

تعریف : R–مدول M یک مدول I–هم‌متناهی است اگر $Supp_R(M) \subseteq V(I)$ و برای هر $i \geq 0$، مدول های $Ext^i_R(R/I, M)$ متناهی مولد باشند.

مدول‌های هم‌متناهی نسبت به یک ایده‌آل نخستین بار توسّط هارتشورن در سال ۱۹۶۷، تعریف شد. هدف از طرح بررسی این نوع مدول‌ها جواب دادن به برخی سؤالات عنوان شده از طرف گروتندیک در سمینار هندسه‌ی جبری‌اش در سال ۱۹۶۲ بود که این نوع مدول‌ها توسّط خود هارتشورن و بعدها ریاضی‌دانان دیگر از جمله هونیکه و دانشجویانش مورد مطالعه بیشتر قرار گرفت. به‌علاوه هارتشورن حدس گروتندیگ رابا طرح یک سؤال به‌صورت زیر کامل‌تر کرد:

پرسش هارتشورن:

> کدامین حلقه‌ی R و ایده‌آل I از آن است که برای هر مدول متناهی مولد M و هر $i \geq 0$، مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^i_I(M)$ یک مدول I–هم‌متناهی می‌باشد؟

هارتشورن در ادامه‌ی کارهایش ثابت کرد اگر R حلقه‌ای موضعی منظّم کامل و M یک R–مدول متناهی مولد باشد آن‌گاه به ازای هر $i \geq 0$ ، مدول های $H^i_I(M)$ تحت هر یک از شرایط زیر I–هم‌متناهی می شوند:

(آ) I ایده‌آل اوّلی باشد به طوری که $dim_R R/I = 1$.

(ب) I یک ایده‌آل اصلی ناصفر باشد.

کارهای هارتشورن انگیزه‌ی خوبی ایجاد کرد تا ریاضی‌دانان با تقلیل شرایط، پرسش او را جواب دهند. اینک کارهای انجام شده در مورد قسمت (الف) از حکم اخیر را شرح می‌دهیم:

در سال ۱۹۹۱ ، هونیکه[۵] و کُخ[۶] مطلب زیر را ثابت نمودند:

قضیّه‌ی ۲ : فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی گرنشتاین موضعی و کامل و I ایده‌آلی از R باشد

---

[۵] Hunike

[۶] Koh

به طوری که $dimR/I = ۱$، در این صورت به ازای هر $i, j \geq ۰$ و هر دو R–مدول متناهی مولد N, M با شرط $Supp_R(N) \subseteq V(I)$، مدول های $Ext^i_R(N, H^j_I(M))$ متناهی مولدند. به‌ویژه به ازای هر $j \geq ۰$، $H^j_I(M)$، I–هم‌متناهی هستند.

سه سال بعد، دلفینو ثابت کرد می توان شرط گرنشتاین در قضیّه‌ی ۲ را با جایگزین کردن یکی از شرایط زیر ضعیف تر کرد:

۱) R هم‌مشخّص[۷] است.

۲) اگر k حلقه‌ی ضرایب R[۸] با پارامتر یک شکل سازی[۹] x باشد آن‌گاه $x \in r(I)$.

۳) اگر x, k همان مفاهیمی باشند که در (۲) ذکر شد آن گاه $x \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in Min(I)} \mathfrak{p}$.

بعد از انجام این کار ، دِلفینو[۱۰] به کمک مارلی [۱۱] در سال ۱۹۹۷ و یوشیدا به‌طور جداگانه ، قضیّه‌ی زیر را ثابت نمودند:

قضیّه‌ی ۳ : فرض کنید R یک حلقه‌ی موضعی و نوتری و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $dimR/I = ۱$، در این صورت برای هر R–مدول متناهی مولد M و هر $i \geq ۰$، مدول‌های $H^i_I(M)$، I–هم‌متناهی هستند.

در راستای قسمت (ب) از کارهای هارتشورن، یوشیدا[۱۲] در سال ۱۹۹۵، ثابت کرد که اگر مدول M دارای بُعد تصویری متناهی باشد یا حلقه‌ی R، موضعی باشد آن گاه برای هر ایده‌آل اصلی I و هر $i \geq ۰$، مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^i_I(M)$، I–هم متناهی هستند.

کاوازاکی در سال ۱۹۹۸، با حذف شرط موضعی بودن R، قضیّه‌ی زیر را ثابت نمود:

---

[۷] equicharacteristic

[۸] coefficient ring

[۹] uniformizing parameter

[۱۰] Delfino

[۱۱] Marly

[۱۲] Yoshida

قضیّه‌ی ۴ : فرض کنید M یک R–مدول باشد هم‌چنین فرض کنیم $x \in R$ و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $r(I) = r(Rx)$. در این صورت برای هر R–مدول متناهی مولد N با شرط $Supp_R(N) \subseteq V(I)$، برای هر $i, j \geq ۰$، مدول های $Ext^i_R(N, H^j_I(M))$ متناهی‌مولدند. به‌ویژه برای هر $i \geq ۰$، $H^i_I(M)$ مدولی I–هم‌متناهی است.

سرانجام پروفسور ملکرسون در سال ۲۰۰۵، شرط اصلی بودن ایده‌آل I را با شرط ضعیف‌تر $cd(I) = ۱$ عوض کرد، که در آن منظور از $cd(I)$ بُعد همولوژیکی I، یعنی بزرگ‌ترین اندیس i است به‌طوری‌که $H^i_I(R) \neq ۰$.

قضیّه‌ی ۵ : فرض کنید $cd(I) = ۱$. دراین‌صورت اگر M مدولی متناهی‌مولد باشد آن‌گاه برای هر مدول متناهی‌مولد N با شرط $Supp_R(N) \subseteq V(I)$، به‌ازای هر j, i، مدول‌های $Ext^i_R(N, H^j_I(M))$ متناهی‌مولدند. به‌ویژه برای هر $i \geq ۰$، $H^i_I(M)$ مدولی I–هم‌متناهی است.

⋆ ⋆ ⋆

فهرست مندرجات

⋆ ⋆ ⋆

فصل ۱

مقدّمه

این فصل مشتمل بر دو بخش است. بخش اوّل را به تعاریف و قضایای اوّلیه از جبر جابجایی و جبر همولوژی که در این پایان نامه مورد نیازند، اختصاص می دهیم و در بخش دوّم به مقدّماتی از جبر کوهمولوژی موضعی می‌پردازیم.

۱.۱ مقدّماتی از جبر جابجایی و جبر همولوژی

۱.۱.۱ تعریف.

فرض کنید M، R−مدولی دلخواه باشد. مجموعه ی مقسوم علیه‌های صفر M را با نماد $Z(M)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت

$$Z(M) := \{r \in R \ / \ \exists m \in M \ \mid \ m \neq ۰ \ , \ rm = ۰\}$$

تعریف می‌کنیم.

۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنید N، R−زیر مدولی از M و I ایده‌آلی از R باشد، تعریف می‌کنیم:

$$(N :_M I) := \{m \in M \ \mid \ Im \subseteq N\}$$

$(N :_M I)$، R−زیرمدول M و شامل N می‌باشد.

۳.۱.۱ تعریف.

منظوراز پوچسازR–مدول M، $(\circ :_R M)$ است که آن‌را با$Ann_R(M)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Ann_R(M) := \{r \in R \mid \forall m \in M \quad rm = \circ\}$$

۴.۱.۱ قضیّه‌ی اجتناب از ایده‌آل های اوّل.

فرض کنید $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$، $(n \geq 2)$، ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند که حداکثر دو تا از آن ها اوّل نباشند. هم‌چنین فرض کنید S زیر گروهی جمعی از R باشد که نسبت به ضرب بسته است، دراین‌صورت اگر $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ باشد، آن‌گاه iی موجود است که $1 \leq i \leq n$ و $S \subseteq \mathfrak{p}_i$.

برهان: به[۲۷؛ قضیّه‌ی (۶۱.۳)] مراجعه شود. □

۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. تعریف می‌کنیم:

$$r(I) := \{a \in R : a^n \in I \text{ که به طوری باشد موجود } n \in \mathbb{N} \text{ چون عددی}\}$$

$r(I)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R است که شامل I می‌باشد. این ایده‌آل را رادیکال ایده‌آل R می‌نامیم. به‌ویژه ایده‌آل $r(\circ)$ را رادیکال پوچ R می‌نامیم وباعلامت $\mathfrak{n}_R$ نمایش می‌دهیم.

۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنید R یک حلقه و E زیر مجموعه‌ای از R باشد. تعریف می‌کنیم:

$$V(E) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid E \subseteq \mathfrak{p}\}$$

اگر ایده‌آل I از R توسط زیرمجموعه‌ی E از R تولید شود آن‌گاه $V(E) = V(I)$. به سادگی ثابت می شود $V(\circ) = Spec(R)$ و $V(R) = V(1) = \emptyset$. اگر $\{E_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های R باشد آن‌گاه $V(\bigcup_{i \in I} E_i) = V(\sum_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$. هم‌چنین اگر I وJ دو ایده‌آل از R باشند آن‌گاه $V(I) = V(r(I))$ و$V(I \bigcap J) = V(IJ) = V(I) \bigcup V(J)$.

نتایج فوق نشان می‌دهد که گردایه‌ی $f = \{V(I)/I \trianglelefteq R\}$ تحت اتحاد تعداد متناهی و اشتراک تعداد دلخواه بسته است.

۷.۱.۱ تعریف.

فرض کنید M، یک R–مدول باشد. زیرمدول سره‌ی N از M را یک زیرمدول اولیّه نامیم اگر برای هر $a \in R$، همریختی $f_a : M/N \xrightarrow{\times a} M/N$ یا یک به یک باشد یا پوچ توان.

به‌عبارت معادل برای هر $a \in R$ و هر $n \in M$، اگر $an \in N$ و $n \notin N$، آن‌گاه $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $a^t M \subseteq M$.

فرض کنید N زیرمدول اولیّه‌ی M است به‌طوری‌که $r(0 :_R M/N) = \mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اوّل باشد دراین‌صورت N را یک زیرمدول $\mathfrak{p}$–اولیّه می‌نامیم.

۸.۱.۱ لم.

فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{m} = r(I)$ ایده‌آل ماکسیمالی از R است. دراین‌صورت I، ایده‌آلی $\mathfrak{m}$–اولیّه می‌باشد.

برهان: به[۲۷؛ قضیّه‌ی (۹.۴)]مراجعه شود. □

۹.۱.۱ قضیه و تعریف.

فرض کنید N زیر مدول سره‌ای از M باشد، تجزیه‌ی اولیّه‌ی N عبارت است از اشتراک تعداد متناهی از زیرمدول‌های اولیّه‌ی M که برابر N باشد:

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_n \quad ; \quad r(0 :_R M/N_i) = \mathfrak{p}_i$$

این تجزیه را تجزیه‌ی اولیّه‌ی مینیمال گوئیم اگر

۱) $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌های اوّل متمایز باشند.

۲) به‌ازای هر عدد طبیعی j که $1 \le j \le n$ داشته باشیم $\bigcap_{i \neq j} N_i \nsubseteq N_j$

ومی‌گوئیم N تجزیه پذیر است اگر تجزیه‌ای اولیّه داشته باشد.

شایان ذکر است که مجموعه‌ی $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ از هر تجزیه‌ی اولیّه‌ی مینیمال N مستقل است واگر $N = N_1 \cap \cdots \cap N_n$ به طوری که $r(0 :_R M/N_i) = \mathfrak{p}_i$ یک تجزیه‌ی اولیّه ی مینیمال برای زیر مدول ِصفر باشد مجموعه‌ی $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ را مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی M می‌نامیم و

آن‌را با نماد $Ass_R(M)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ دراین‌صورت $\mathfrak{p} \in Ass_R M$ اگروتنهااگر عضوی از M مانند x موجود باشد که $\mathfrak{p} = (\circ :_R x)$. لذااگر $\mathfrak{p} \in Ass_R M$ آن‌گاه همریختی یک به یکی مانند $f : R/\mathfrak{p} \longrightarrow M$ موجود است.

برهان: به[۲۷؛ قضیّه‌ی (۱۸.۴) و(۱۷.۴)] مراجعه شود. □

۱۰.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده آل اوّلی‌از R و $I_1, \cdots, I_n$ ایده آل‌هایی دلخواه از R باشند. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) iی موجود است که $1 \leq i \leq n$ و $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۲) $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۳) $\prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

برهان: به[۲۷؛ لم (۵۵.۳)] مراجعه شود. □

۱۱.۱.۱ نتیجه.

فرض کنید $I_1, ..., I_n$ ایده آل‌هایی از R باشند و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ که $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. در این‌صورت به‌ازای هر عدد طبیعی j که$1 \leq j \leq n$، $I_j = \mathfrak{p}$.

برهان: به[۲۷؛ قضیّه‌ی (۹.۴)] مراجعه شود. □

۱۲.۱.۱ قضیه.

اگر $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ که($n \geq 2$) خانواده‌ای از ایده آل‌های دو به دو متباین (برای هر $1 \leq i, j \leq n$ که $i \neq j$ باشد $I_i + I_j = R$)حلقه ی R باشد آن‌گاه

۱) I_n و $\bigcap_{i=1}^{n-1} I_i$ متباین‌اند .

۲) $\bigcap_{i=1}^{n} I_i = \prod_{i=1}^{n} I_i$

برهان: به [۲۷؛ قضیّه‌ی (۵۹.۳)] مراجعه شود. □

۱۳.۱.۱ تعریف.

فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R و $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ تجزیه‌ی اوّل مینیمالی برای I باشد. به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$. در این صورت ایده‌آل های $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ به طور منحصر به فرد توسط I تعیین می‌شوند و به انتخاب تجزیه‌ی اوّل مینیمال I بستگی ندارند. هرکدام از $\mathfrak{p}_i$ هارا یک ایده‌آل اوّل مینیمال وابسته به I می‌نامیم و تعریف می‌کنیم : $ass_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$.
هم‌چنین $Min(I)$ دقیقاً اعضای مینیمال $ass_R(I)$ می‌باشد.
به وضوح اگر R حلقه‌ای نوتری باشد، آن‌گاه $ass_R(I) = Ass_R(R/I)$ و ایده‌آل های اوّل مینیمال شامل I دقیقاً همان اعضای مینیمال $ass_R(I)$ هستند.

۱۴.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M، R–مدول و R حلقه‌ای نوتری باشد دراین‌صورت $Ass_R(M) \neq \emptyset$ اگروتنهااگر $M \neq 0$.

برهان: به[۲۷؛ نتیجه‌ی (۳۵.۹)]مراجعه شود. □

۱۵.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M، R–مدولی ناصفر و R حلقه‌ای نوتری باشد دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) هر عضو ماکسیمال از مجموعه‌ی $\{(0 :_R x) \mid 0 \neq x \in M\}$ یک ایده‌آل اوّل وابسته به M است و به‌خصوص $Ass_R(M) \neq \emptyset$.

۲) $\bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(M)} \mathfrak{p} = Z(M)$.

برهان : به[۲۷؛ نتیجه‌ی (۳۶.۹)] مراجعه شود. □

۱۶.۱.۱ قضیه.

اگر $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ رشته‌ای دقیق از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها باشد، آن‌گاه

$$Ass_R(M) \subseteq Ass_R(N) \subseteq Ass_R(M) \cup Ass_R(L)$$

برهان : به[۲۰؛ قضیّه‌ی (۶.۳)]مراجعه شود. □

۱.۱.۱۷ تعریف.

فرض کنید M یک R–مدول باشد. مقصود از محمل M، مجموعه‌ی

$$\{\mathfrak{p} \in SpecR \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

است. این مجموعه را با $Supp_R(M)$ (و یا $Supp(M)$) نشان می‌دهیم.

۱.۱.۱۸ قضیه.

فرض کنید M یک R–مدول باشد. دراین‌صورت $Supp_R(M) = \emptyset$ اگر وتنها اگر $M = 0$.

برهان : به [۲۷؛ لم (۹.۱۵)] مراجعه شود. □

۱.۱.۱۹ لم ناکایاما.

فرض کنید M یک R–مدول متناهی مولد، I ایده‌آلی از R و $I \subseteq Jac(R)$ به‌طوری‌که $IM = M$ در این‌صورت $M = 0$.

برهان: به [۲۷؛ لم (۸.۲۴)] مراجعه شود. □

۱.۱.۲۰ قضیه.

فرض کنید $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق و کوتاهی ازR–مدول ها و R–همریختی ها باشد در این صورت

$$Supp_R(N) = Supp_R(L) \bigcup Supp_R(M)$$

برهان: به [۴ ؛ فصل ۲ بخش ۴] مراجعه شود. □

۱.۱.۲۱ قضیه.

فرض کنید M یک R–مدول متناهی مولد باشد. دراین‌صورت

۱) $Supp_R(M) = V(Ann_R(M))$.

۲) $Supp_R(M/IM) = V(I + Ann_R(M))$.

برهان: برای قسمت (۱) به [۲۷؛ لم (۹.۲۰)] و برای قسمت (۲) به[۴؛ فصل ۲ بخش ۴] مراجعه شود. □

۲۲.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M , N، R-مدول‌هایی متناهی‌مولد باشند دراین‌صورت

$$Supp_R(M \otimes_R N) = Supp_R(M) \cap Supp_R(N)$$

برهان: به [۴ ؛ فصل ۲ بخش ۴] مراجعه شود. □

۲۳.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری وM یک R-مدول باشد، دراین‌صورت

۱) اگر M متناهی‌مولد باشد، آن‌گاه $Ass_R(M)$ مجموعه‌ای متناهی است.

۲) $Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$

۳) مجموعه عناصر مینیمال مجموعه‌های $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ با هم مساویند.

برهان: به[۲۰؛ قضیّه‌ی (۵.٦)] مراجعه شود. □

۲۴.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، M، یک R-مدول باشد دراین‌صورت هر عضو $Supp_R(M)$ شامل عضوی از$Ass_R(M)$ است.

برهان: با توجّه به (۲۳.۱.۱ قسمت (۳))، حکم به‌راحتی نتیجه می‌شود. □

۲۵.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M یک R-مدول و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $I \subseteq Ann_R(M)$. در این صورت M ساختار R/I-مدولی دارد. به‌علاوه زیرمجموعه‌ای از M، R-زیرمدول است اگروتنهااگر R/I-زیرمدول باشد.

برهان: به [۲۷؛ قضیّه‌ی (۱۹.٦)] مراجعه شود. □

۲٦.۱.۱ تذکّر.

بنابر لم قبل نتیجه می شود که M یک R-مدول نوتری (آرتینی) است اگروتنهااگر به‌عنوان R/I-مدول، نوتری (آرتینی) باشد.

۲۷.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M، R−مدولی آرتینی باشد. دراین‌صورت مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل وابسته‌ی M متناهی است و $Ass_R(M) \subseteq Max(R)$ و $Ass_R(M) = Supp_R(M)$.

برهان: با توجّه به قضیّه‌ی (۲۴.۱.۱) و [۲۷؛ تمرین (۴۳.۹)] حکم برقرار است. □

۲۸.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت nی از N موجود است به‌طوری‌که $r(I)^n \subseteq I$. به‌ویژه برای tی از N، $\mathfrak{n}_R^t = \circ$.

برهان: به[۲۷؛ لم (۲۱.۸)] مراجعه شود. □

۲۹.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M یک R−مدول باشد، دراین‌صورت M یک R−مدول نوتری است اگر وتنهااگر هر زیرمدول M متناهی مولد باشد.

برهان: به[۲۷؛ لم (۱۳.۷)] مراجعه شود. □

۳۰.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ ایده‌آل‌هایی اوّل از حلقه‌ی R باشند به‌طوری‌که $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. اگر ایده‌آل اوّل سره‌ای بین آن‌ها موجود باشد، آن‌گاه تعداد نامتناهی ایده‌آل اوّل بین آن‌ها موجود می‌باشد.

برهان: به [۱۵؛ قضیّه‌ی (۱۴۴)] مراجعه شود. □

۳۱.۱.۱ تعریف.

بلندی ایده‌آل اوّل $\mathfrak{p}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$ht_R\mathfrak{p} := \begin{cases} sup\{n \in \mathbb{N}_\circ : \text{موجود باشد } \mathfrak{p} \text{ مختوم به } n \text{ به طول } R \text{ زنجیری اکید ازایده‌آل های اول}\} & \text{اگر موجود باشد} \\ \infty & \text{اگرموجود نباشد} \end{cases}$$

هم‌چنین بعد حلقه‌ی R را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dimR := \begin{cases} sup\{ht_R\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Spec(R)\} & \text{اگر موجود باشد} \\ \infty & \text{اگرموجود نباشد} \end{cases}$$

۳۲.۱.۱ تعریف.

اگر M یک R–مدول و I ایده‌آلی اوّل از حلقه‌ی R باشد، به‌طوری‌که $\mathfrak{p} \in Supp_R(M)$ دراین‌صورت بلندی ایده‌آل اوّل $\mathfrak{p}$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$ht_M\mathfrak{p} := \begin{cases} sup\{n \in \mathbb{N}_\circ : \text{موجود باشد}\ \ \mathfrak{p}\ \text{مختوم به}\ \ M\ \text{از عناصر محمل}\ \ n\ \text{زنجیری اکید به طول}\} & \text{اگر موجود باشد} \\ \infty & \text{اگرموجود نباشد} \end{cases}$$

حال ارتفاع I نسبت به M که با نماد ht_MI نشان داده می شود عبارت است از

$$ht_MI := inf\{ht_M\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Supp_R(M), I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

هنگامی‌که از ارتفاع ایده‌آل I بدون ذکر مدولی صحبت می‌کنیم، بدین معناست که حلقه‌ی R را به‌عنوان R–مدول و ارتفاع I را نسبت به R در نظر گرفته ایم. دراین حالت ارتفاع I را با نماد ht_RI و یا در صورت مشخّص بودن حلقه با علامت $ht(I)$ نشان می‌دهیم.

۳۳.۱.۱ تعریف.

بُعد R– مدول M را با dim_RM $(dimM)$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$dim_RM := \begin{cases} sup\{n \in \mathbb{N}_\circ : \text{موجود باشد}\ \ M\ \text{از عناصر محمل}\ \ n\ \text{زنجیری اکید به طول}\} & \text{اگر موجود باشد} \\ \infty & \text{اگرموجود نباشد} \end{cases}$$

اگر $M = \circ$ آن‌گاه بنابر قرارداد می‌نویسیم $dim_RM = -۱$.

اگر $dim_R(M) = n$ در این‌صورت قرار می‌دهیم :

$$Assh_R(M) := \{\mathfrak{p} \in Ass_RM \quad | \quad dim_R(R/\mathfrak{p}) = n\}$$

۳۴.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $\circ \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \circ$ رشته‌ی دقیق از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها

باشد، به‌طوری‌که $dim_R M < \infty$. دراین‌صورت

$$dim_R N = max\{dim_R L, dim_R M\}$$

برهان: با توجّه به قضیّه‌ی (۲۰.۱.۱) حکم به‌راحتی به‌دست می‌آید. □

۳۵.۱.۱ لم.

فرض کنید $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ رشته ی دقیق و کوتاهی از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها باشد در این‌صورت $dim_R N \leq dim_R M$ و $dim_R M/N \leq dim_R M$.

برهان: بنابر قضیّه‌ی (۲۰.۱.۱)، $Supp_R(M) = Supp_R(N) \cup Supp_R(M/N)$ ولذا $Supp_R(N) \subseteq Supp_R(M)$ که طبق تعریفِ بُعد مدول، $dim_R N \leq dim_R M$ همین‌طور $Supp_R(M/N) \subseteq Supp_R(M)$ و در نتیجه $dim_R M/N \leq dim_R M$.□

۳۶.۱.۱ قضیه.

اگر M یک R–مدول متناهی مولد باشد، آن‌گاه $dim_R M = dim_R\ R/Ann_R(M)$.

برهان: با توجّه به قضیّه‌ی (۲۱.۱.۱) قسمت (۱))، حکم به‌راحتی به‌دست می آید. □

۳۷.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد و $M \neq 0$ یک R–مدول متناهی مولد باشد و $x \in \mathfrak{m} \setminus Z(M)$، در این‌صورت $dim_R M/xM = dim_R M - 1$.

برهان: به [۲۰؛ فصل ٦، لم ۵] مراجعه شود. □

۳۸.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد و M یک R–مدول متناهی مولد باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{m}M = 0$ در این‌صورت $dim_k M < \infty$، که در آن $k = R/\mathfrak{m}$.

برهان: به‌وضوح برقرار است. □