دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش آنالیز

عنوان

انتگرال پیچشی روی برخی ازکلاس های توابع تحلیلی

استاد راهنما

دکتر رسول آقالاری

پژوهشگر

الهام یوسف زاده

شهریور۱۳۹۱

دانشگاه ارومیه

برای دریافت درجه در رشته

، گرایش

عنوان

اساتید راهنما

استاد مشاور

پژوهشگر


بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر و مادرم

سپاسگزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. وظیفه ی خود می دانم که از جناب آقای دکتر رسول آقالاری استاد راهنمای عزیز کمال تشکر و قدر دانی داشته باشم همچنین از جناب آقایان دکتر آزادی و دکتراستادباشی و دکتر شمس تشکر و سپاسگزاری را دارم. ازکلیه استادهای گرامی دوران تحصیلم، که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

واژه‌های کلیدی:

تابع بطور یکنواخت k-محدب،تابع بطور یکنواخت k-ستاره گون، انتگرال پیچشی، ضرب پیچشی، پیروی دیفرانسیل.

چکیده:

در این پایان نامه خواص پیچشی توابع کلاس های بطور یکنواخت k- محدب و توابع k- ستاره گون معرفی شده در مرجع های[۵] و [۷] را در نظر می گیریم. ما مسأله ی پایداری انتگرال پیچشی جفت های مشخص از چنین کلاسهایی را بررسی می کنیم و همچنین کرانهای بالا و پایینی را برای شعاع پایداری آنها به دست می آوریم. در این پایان نامه بعضی از نتایج به دست آمده در مرجع [۲] را بهبود می بخشیم.

فهرست مطالب

مقدمه

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف مشتق

فرض کنیم Ω یک مجموعه باز و $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییمf در $z_{\circ} \in \Omega$ مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{z \to z_{\circ}} \frac{f(z) - f(z_{\circ})}{z - z_{\circ}}$$

موجود باشد و آن را با $f'(z_{\circ})$ نشان می دهیم. هرگاه f در هر نقطه $z_{\circ} \in \Omega$ مشتق پذیر باشد می گوییم f در Ω تحلیلی است. همچنین گوییم f در نقطه ی $z_{\circ} \in \Omega$ تحلیلی است هرگاه در یک همسایگی از $z_{\circ}$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۱.۱.۱. قرص واحد و قرص واحد سفته را در صفحه اعداد مختلط به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\mathcal{U} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$$

$$U^* = \{z : z \in C, \circ < |z| < \text{۱}\}$$

نکته

مجموعه توابع تحلیلی بر U را با $H(U)$ نمایش داده می شود.

نکته

تابع تعریف شده f در Ω به وسیله سری توانی قابل نمایش است هرگاه برای هر قرص $D(a,r) \subset \Omega$ یک سری مانند $\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

مشتق سری توانی

هرگاه f به وسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f, f' \in H(\Omega)$ نیز با سری توانی قابل نمایش است(منظور از $H(\Omega)$ مجموعه توابع تحلیلی بر Ω می باشد) در واقع به ازای هر $z \in D(a,r)$ اگر $f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n(z-a)^n$ آنگاه به ازای این zها داریم:

$$f'(z) = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-\text{۱}}$$

.

۱.۱.۱ لم شوارتز

فرض کنیم $f \in H(U)$ به طوری که

(۱)برای هر $z \in U$ داشته باشیم $|f(z)| \leq \text{۱}$

(۲)همچنین $f(\circ) = \circ$

در این صورت برای هر $z \in U$، $|f(z)| \leq |z|$ و $|f'(\circ)| \leq \mathbf{1}$. بعلاوه اگر $|f'(\circ)| = \mathbf{1}$ یا برای $z \neq \circ$یی واقع در U داشته باشیم $|f(z)| = |z|$، آنگاه عدد ثابت cای موجود است به طوری که $|c| = \mathbf{1}$ و $f(z) = cz$ برای هر $z \in U$.

برهان: به مرجع [۱۱]مراجعه کنید.

نکته

تابعی که در لم شوارتز[۱] صدق کند به تابع شوارتز معروف است و همچنین قرار می دهیم:

$$B = \{\omega \in H : \omega(\circ) = \circ, |\omega(z)| < \mathbf{1}, z \in U\}$$

تعریف ۲.۱.۱. هر عدد مختلط $z \neq \circ$ یک جهت از مبداء را تعیین می کند که با

$$A[z] = \frac{z}{|z|}$$

بر دایره ی یکه تعریف می شود. فرض کنیم f یک نگاشت از ناحیه ی Ω به توی صفحه باشد، $z_\circ \in \Omega$ و $z_\circ$ دارای همسایگی سفته ی $D^*(z_\circ; r) \subset \Omega$ باشد که در آن $f(z) \neq f(z_\circ)$. گوییم f در $z_\circ$ زاویا را حفظ می کند اگر

$$\lim_{r \to \circ} e^{i\theta} A[f(z_\circ + re^{i\theta}) - f(z_\circ)], \qquad r > \circ, \quad \circ \leq \theta \leq \mathbf{2}\pi$$

[۱]Schwarz Lemma

موجود و مستقل از θ باشد.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنیم f ناحیه ی Ω را به توی صفحه بنگارد. هرگاه $f'(z_0)$ در نقطه ای مانند $z_0 \in \Omega$ موجود بوده و $f'(z_0) \neq 0$ ، در این صورت f زوایا را در z_0 حفظ می کند. بر عکس، هرگاه دیفرانسیل f در z_0 موجود و مخالف صفر بوده و f در z_0 زوایا را حفظ کند، در این صورت $f'(z_0)$ موجود ومخالف صفر می باشد.*

برهان. : به مرجع [۱۱]مراجعه کنید.

نگاشتهایی که خاصیت حفظ زوایا دارند ویا به عبارت دیگر مشتقشان همواره مخالف صفر می باشد، نگاشتهای همدیس[۲] نامیده می شوند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم a, b, c و d اعداد مختلطی باشند که $ad - bc \neq 0$, نگاشت

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

را تبدیل موبیوس[۳] گوییم. هرگاه خانواده ی $\mathfrak{F}$ از تمام خطوط مستقیم ودوایر تشکیل شده باشد در این صورت $\mathfrak{F}$ به وسیله ی این تبدیل موبیوس حفظ می شود. (یعنی به خط یا دایره می برد).

[۲] conformalmaps
[۳] Möbius transformation

اصل مدول ماکزیمم

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ و $\mathbb{D}(a,r) \subset \Omega$. در این صورت*

$$|f(a)| \leq max|f(a+re^{i\theta})|, \qquad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \tag{۱.۱}$$

تساوی در (۱.۱) برقرار است اگر و تنها اگر f در Ω ثابت باشد.

برهان. : به مرجع [۱۱]مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۱.۱. *(قضیه نگاشت باز) هرگاه تابع f بر ناحیه ی Ω تحلیلی باشد ولی ثابت نباشد، آنگاه f باز است.*

برهان. : به مرجع [۱۱]مراجعه کنید. □

۲.۱ توابع همساز

تعریف ۱.۲.۱. تابع حقیقی مقدار u را در U همساز [۴] گوییم هرگاه مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد و در معادله

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

که به معادله لاپلاس[۵] مشهور است، صدق کند .

[۴] Harmonic
[۵] Laplace's equation

تعریف ۲.۲.۱. اگر u و v توابع همساز بر ناحیه Ω باشند، گوییم v مزدوج همساز u است هرگاه در هر نقطه Ω توابع u و v در معادلات کوشی ریمان صدق کند

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

تعریف ۳.۲.۱. اگر u و v توابع حقیقی همساز در یک ناحیه همبند ساده Ω باشند، آنگاه تابع پیوسته $f = u + iv$ که بر Ω تعریف می شود بر Ω همساز نامیده می شود .

قضیه ۴.۲.۱. *اگر $f = u + iv$ در Ω همساز باشد، آنگاه f بر Ω تحلیلی است اگر و فقط اگر قسمت موهومی آن بر Ω مزدوج همساز قسمت حقیقی آن باشد .*

برهان. : به مرجع [۱۱]مراجعه کنید. □

قضیه ۵.۲.۱. *هر تابع تحلیلی همساز است.*

برهان. : به مرجع [۱۱]مراجعه کنید.

□

۳.۱ توابع تک ارز

تعریف توابع تک ارز[۶]

تابع $f(z)$ را روی U تک ارز گوییم هرگاه برای هر $z_۱$ و $z_۲$ در U که $z_۱ \neq z_۲$ داشته باشیم $f(z_۱) \neq f(z_۲)$.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه تمام توابع تحلیلی f که در دیسک واحد

$$U = \{z : z \in C, |z| < ۱\}$$

تعریف شده و در شرایط نرمالیزه $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$ صدق می کنند را با $\mathcal{A}$ نشان می دهیم، می توان دید هر $f \in \mathcal{A}$ دارای بسط تیلور به فرم زیر می باشد:

$$f(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} a_k z^k, \qquad |z| < ۱$$

و زیر کلاس های $\mathcal{A}$ که شامل توابع تک ارز می باشد را با S نمایش می دهیم.

تعریف تابع موضعا تک ارز

تابع $f(z)$ را در نقطه $z \in U$ موضعا تک ارز گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ تک ارز باشد.

[۶] Univalent

مثال

تابع $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots$ را در نظر می گیریم این تابع در Uتحلیلی و تک ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد و به تابع کوبه[۷] معروف است.

تعریف ۲.۳.۱. دامنه $D \subset \mathbb{C}$ را نسبت به z_0 ستاره گون[۸] گوییم، هرگاه هر پاره خطی که نقاط D را به z_0 وصل می کند، داخل D قرار گیرد.

تعریف ۳.۳.۱. تابع f را ستاره گون گوییم هرگاه این تابع، دیسک واحد را به طور همدیس به مجموعه ای بنگارد که نسبت به مبداء ستاره گون باشد. رده ی توابع ستاره گون را با S^* نمایش می دهیم.

قضیه ۴.۳.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ ستاره گون است اگر وفقط اگر*

$$Re(zf'(z)/f(z)) > 0$$

برهان. : به مرجع [۱]مراجعه کنید.

□

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید α یک عدد حقیقی باشد که $0 \leq \alpha < 1$ ، تابع f را ستاره گون از مرتبه ی α گوییم هرگاه

$$Re(zf'(z))/f(z)) > \alpha$$

[۷] Koebe Function
[۸] starlike

مجموعه ی چنین توابعی را با نماد $S^*(\alpha)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۳.۱. مجموعه ی $E \subset U$ را محدب[۹] گوییم، هرگاه نسبت به هر نقطه اش ستاره گون باشد. به عبارت دیگر هرگاه پاره خط واصل هر دو نقطه از E تماماً در E واقع شود.

تعریف ۷.۳.۱. تابع f را یک تابع محدب گوییم هرگاه دیسک واحد را به طور همدیس به یک مجموعه ی محدب تصویر کند. رده ی چنین توابعی را با CV نشان می دهیم.

قضیه ۸.۳.۱. *تابع $f \in CV$ اگر و تنها اگر*

$$Re(1 + zf''(z)/f'(z)) > 0$$

برهان. : به مرجع [۱]مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید α یک عدد حقیقی باشد بطوریکه $0 \leq \alpha < 1$ ، تابع f را محدب از مرتبه ی α گوییم هرگاه

$$Re\Big\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big\} > \alpha$$

مجموعه ی چنین توابعی را با نماد CV_α نمایش می دهیم.

قضیه ۱۰.۳.۱. *(قضیه ی الکساندر) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در U باشد بطوریکه $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. در این صورت $f \in CV$ اگروتنهااگر $zf'(z) \in S^*$.*

---
[۹] convex

برهان. فرض کنیم $g(z)=zf'(z)$، در این صورت $\frac{zg'(z)}{g(z)}=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}$. حال اگر $f\in CV$، آنگاه $Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>0$. بنابراین $g(z)\in S^*$ و در نتیجه $zf'(z)\in S^*$. برعکس، فرض کنیم $zf'(z)\in S^*$ پس $g(z)\in S^*$ لذا $Re\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\}>0$ و در نتیجه $f\in CV$.

۴.۱ پیروی دیفرانسیلی

تعریف ۱.۴.۱. می گوییم تابع f پیرو تابع تحلیلی g است و می نویسیم $f\prec g$ در U یا به طور معادل

$$f(z)\prec g(z),\qquad z\in U$$

هرگاه یک تابع تحلیلی شوارتز $\omega(z)$ که $\omega(0)=0$ و $|\omega(z)|<1$ موجود باشد به طوری که

$$f(z)=g(\omega(z)),\qquad z\in U \tag{۲.۱}$$

نکته

واضح است که

$$f(z)\prec g(z),\qquad z\in U\Longrightarrow f(0)=g(0),\qquad f(U)\subset g(U)$$

قضیه ۲.۴.۱. *هرگاه f و g دو تابع تحلیلی در U باشند بطوریکه $g(z)$ در U یک به یک باشد*

آنگاه داریم:

$$f(z) \prec g(z), \qquad z \in U \Longleftrightarrow f(0) = g(0), \qquad f(U) \subset g(U)$$

برهان. فرض کنیم $(z \in D)$ و $f(z) \prec g(z)$ لذا تابع تحلیلی ω بر U وجود دارد چنانکه

$$\omega(0) = 0 \quad , \quad |\omega(z)| < 1 \quad , \quad f(z) = g(\omega(z)) \qquad (z \in D)$$

در نتیجه داریم

$$f(0) = g(\omega(0)) = g(0)$$

حال نشان می دهیم $f(U) \subset g(U)$. اگر $z \in U$، آنگاه چون $\omega(z) \in U$ پس

$$\forall z \in U \quad f(z) = g(\omega(z)) \subset g(U), \quad f(U) \subset g(U)$$

برعکس:

فرض کنیم $f(0) = g(0), f(U) \subset g(U)$، ثابت می کنیم $f \prec g$.

چون تابع $g : U \to C$ یک به یک است، پس معکوس آن یعنی g^{-1} بر $g(U)$ تحلیلی است .

حال تابع $\omega : U \to C$ را با ضابطه $\omega(z) = g^{-1}(f(z))$ در نظر می گیریم .طبق فرض داریم $f(U) \subset g(U)$، در این صورت $g^{-1}(f(U)) \subset U$ و لذا

$$\omega(z) = g^{-1}(f(z)) \subset U, \quad |\omega(z)| < 1$$

از طرفی طبق فرض $f \in H(U)$ و $g^{-1} \in H(U)$ ، چون ترکیب توابع تحلیلی ، تحلیلی است