بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش هندسه

موضوع:

بررسی مترهای فینسلری از انحنای S ثابت

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر بهمن رضایی

نام دانشجو:

سمیه سیدقادری کانی سهراب

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

و بعد از مدتها، پس از پیمودن راه های فراوان که با حضور شیرین اساتید عزیزم، با راهنمایی ها و دغدغه های فراوانشان و شیطنت های زیبای آن دوران، نگاه های پدر مادرم، با چشم های پر از برق شوق، و زیبایی حضور همسرم در کنارم، که خستگی های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده، امیدوارم بتوانم در آینده ی نزدیک جوابگوی این همه محبت آنها باشم ...

اکنون، با احترام فراوان برای تلاش همه ی این عزیزان برای موفقیت من ....

این پایان نامه را به پدر و مادرم، اساتید عزیز و همسر مهربانم تقدیم میکنم

امیدوارم قادر به درک زیبایی های وجودشان باشم .

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...
سپاس آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدرم سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.
به پاس قدر دانی از اسطوره زندگیم، پناه خستگیم ، همسرم که با قلبی آکنده از عشق و معرفت محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است .
از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر بهمن رضایی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛
و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر اسدی و جناب آقای دکتر جانفدا که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند؛ و دوستان عزیزم کمال تشکر و قدردانی را دارم .

سمیه سیدقادری کانی سهراب

شهریور ۱۳۹۳

چکیده

در این پایان‌نامه، مترهای فینسلری از انحنای S ثابت را مطالعه می‌کنیم. ابتدا مترهای راندرزی با انحنای S غیرصفر(ثابت) که انحنای H صفر دارند را بررسی خواهیم کرد، که مثال نقضی برای قضیه‌ای در [۱۲] می‌باشند. سپس با استفاده از ساخته های لی شن ، نشان می‌دهیم که (α,β) ـ مترهایی با انحنای S ثابت دلخواه در هر بعد وجود داشته و غیرراندرزی می‌باشند.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان‌نامه، انحناهای فینسلری روی منیفلد راندرزی مورد بررسی قرار می گیرد، کمیت‌های غیر ریمانی و (α, β)ـ مترها محور اصلی بحث می‌باشند. هندسه اقلیدسی روی فضاهای مسطح بنا نهاده شده است، اما جهان طبیعت بر پایه فضاهای مسطح شکل نگرفته است. پس به یک هندسه جدید برای بررسی ساختارهای طبیعی نیاز بود. گاوس [۱] با مطالعه رویه‌های دو بعدی در $\mathbb{R}^n$ اولین گام در جهت هندسه نامسطح را برداشت. مطالعه متر فینسلر برای اولین بار توسط ریمان [۲] در سال ۱۸۵۴ آغاز شد. با معرفی منیفلدها که به طور موضعی همئومورف با فضاهای اقلیدسی هستند، راهی جدید برای ریاضیات و سایر شاخههای علوم باز شد. متر ریمانی برای اندازه‌گیری فاصله بین دو نقطه، طول خم‌ها، زاویه بین بردارها و ... روی منیفلدها بکار می‌رود. متر ریمان با یک ضرب داخلی مثبت معین و طول قوس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds = F(x^۱, ..., x^n; dx^۱, ..., dx^n)$$

که در آن $F(x, y)$ وقتی $y \neq ۰$ باشد، یک تابع مثبت روی کلاف مماس TM است. که نسبت به y همگن از درجه یک است. ریمان هم‌چنین مفهوم انحنا را که میزان خمیدگی یک رویه را اندازه می۲گیرد، معرفی کرد. در واقع رویه‌ها با انحنای صفر در هندسه ریمانی همان صفحه‌های اقلیدسی هستند. هندسه ریمان توسط لوی چیویتا و کریستوفل که مفهوم یک التصاق بدون تاب و سازگار با متریک را روی منیفلدهای ریمانی معرفی کردند، گسترش پیدا کرد. در سال ۱۹۱۸ پائول فینسلر [۳]در رساله دکترای خود به بررسی حالت عمومی ریمان از دیدگاه حساب تغییرات پرداخت و متر عمومی ریمان را معرفی کرد. هندسه عمومی، یعنی هندسه ریمان بدون محدودیت مربعی بودن به هندسه فینسلر مشهور شد.

---

[۱] Gauss
[۲] Riemann
[۳] P.Finsler

کارتان [1] در سال ۱۹۳۴ رساله‌اش را در مورد فضاهای فینسلر منتشر کرد و نشان داد که امکان تعریف ضرایب التصاق به نحوی که لم ریچی برقرار باشد، وجود دارد که به التصاق کارتان معروف شد. پروفسور اکبرزاده [2] در رساله دکترای خود این التصاق را به صورت سرتاسری تعریف کرد. اکبرزاده در سال ۱۹۶۳، نظریه جدید فضاهای فینسلر را بر مبنای نظریه التصاق‌های روی کلاف‌های تاری مطرح کرد. بلترامی [3] در سال ۱۸۶۶ نشان داده بود که هر متر ریمانی موضعاً مسطح تصویری است اگر و فقط اگر دارای انحنای برشی ثابت باشد، بر همین اساس اکبرزاده در سال ۱۹۸۸ نشان داد که یک منیفلد فینسلر فشرده و بدون کران، موضعاً مینکوفسکی است اگر و تنها اگر انحنای پرچمی آن معادل صفر باشد.

در حال حاضر هندسه فینسلر موضوعی مدرن است که شامل قضایا و تکنیک‌های متعدد، قابل مقایسه با هر موضوع دیگر در هندسه دیفرانسیل است. مطالعه هندسه فینسلری بسیار پیچیده‌تر از مطالعه هندسه ریمانی می‌باشد. لذا برای درک معانی هندسی در کمیت‌های مختلف هندسه فینسلری، می‌توان با مطالعه مترهای ساده فینسلری یعنی مترهای راندرزی شروع کرد. مترهای راندرزی یکی از مهم‌ترین مترهای فینسلری بوده که به شکل مجموع یک متر ریمانی و یک ۱ـ فرمی بیان می‌شوند و جوابی برای مسأله زرملو می‌باشد. ابتدا در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه ای در مورد منیفلدهای ریمانی و مفاهیمی که در این پایان نامه کاربرد دارند، مطرح خواهیم کرد. سپس در فصل دوم به معرفی التصاق و انحنا در فضاهای فینسلری می‌پردازیم. فصل سوم مترهای راندرزی که گونه‌ای از (α,β)ـ مترها می‌باشد با انواعی از انحناها مورد بررسی قرار می‌دهد. در فصل چهارم که هدف اصلی این پایان نامه می‌باشد مترهای فینسلری با انحنای S ثابت و قضایای اصلی مرتبط با پایان نامه را بااستفاده از مفاهیم مقدماتی که در فصل اول و دوم و سوم مطرح شده اند، بررسی و ثابت می‌شوند. هدف اصلی این پایان نامه آوردن مثال نقضی برای قضیه‌ای در [۱۲] خواهد بود. هم‌چنین در این فصل وجود مترهای راندرزی با انحنای S غیر صفر (ثابت) و از انحنای H صفر ، ثابت می‌شود. این پایان نامه براساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

- Mo, X., Wang, X., *On Finsler metrics of constant S-curvature*. Bull.Korrean Math.Soc, 50, ano.2, pp.639-648, 2013.

[1] Cartan
[2] Akbarzadeh
[3] Belteramy

فصل ۱

هندسه ریمانی

۱.۱ مقدمه

هندسه ریمانی برای اولین بار توسط ریمان [۱] در سال ۱۸۶۸ مطرح شد. این هندسه تعمیمی از هندسه دیفرانسیل روی رویه ها می‌باشد. در هندسه رویه‌ها که بیشتر توسط گاوس مورد مطالعه قرار گرفته است یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس بر رویه تعریف می‌گردد که توسط این ضرب می‌توان طول بردارهای مماس بر رویه $\mathbb{R}^۳$ را به دست آورد که اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود و بعدها منجر به تعریف متر ریمان شد.

۲.۱ مفاهیم وتعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه X مفروض است، زیر مجموعه‌ی$\tau \subseteq P(X)$ را که دارای خواص زیر باشد یک توپولوژی روی X نامیده و زوج (X,τ) را یک **فضای توپولوژی** می‌نامیم:

۱) $\emptyset$ و X عضو مجموعه τ باشند.

۲) τ تحت اجتماع دلخواه بسته باشد.

۳)τ تحت اشتراک متناهی بسته باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم Xیک فضای برداری باشد، X را فضای اقلیدسی گوییم هرگاه دارای یک

[۱] Riemann

ضرب داخلی باشد. فضای Xرا مجهز به یک ضرب داخلی گوییم هرگاه یک تبدیل دو خطی

$$T : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

با خواص زیر وجود داشته باشد:

$$T(x,y) = T(y,x) \qquad (۱);$$

$$.\forall x,y \in x \qquad T(x,y) \geqslant \circ \qquad ,T(x,x) = \circ \Longleftrightarrow x = \circ \qquad (۲)$$

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم Xیک فضای توپولوژی و n یک عدد ثابت باشد، Xرا فضای توپولوژی موضعاً اقلیدسی گوییم هرگاه به ازای هر$x \in X$ همسایگی باز U حول x وجود داشته باشد که هومرف[۱]بایک باز $\mathbb{R}^n$باشد.

تعریف ۱.۲.۴. فضای توپولوژی X را یک منیفلد توپولوژی گوییم هرگاه هاسدروف بوده و دارای پایه شمارا و موضعاً اقلیدسی باشد.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنیم (X,τ)فضای توپولوژی و$Y \subseteq X$ در این صورت می‌توان روی Y توسط توپولوژی X یک توپولوژی القا کرد که به این توپولوژی، توپولوژی القایی گوییم. در واقع مجموعه‌های باز این توپولوژی، اشتراک اعضای τباY در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنیم Xیک منیفلد توپولوژی باشد در این صورت زوج (x,u)که

$$x : u \longrightarrow x(u) \subseteq \mathbb{R}^n$$

یک هومرفیسم می‌باشد را یک کارت مختصاتی گوییم. در این صورت دو کارت(x,u)و(y,v) از یک منیفلد توپولوژی را C^∞ـ سازگار گویند هرگاه نگاشت تغییر کارت زیر:

$$xoy^{-۱} : y(u \cap v) \longrightarrow x(u \cap v);$$

C^∞ـ دیفئومرفیسم باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, u_\alpha) | \alpha \in I\}$ را از کارت‌های ـ C^∞ سازگار منیفلد M را به طوری که u_αها پوششی باز برای آن نیز باشند یک اطلس C^∞ برای منیفلد توپولوژی M گویند.

تعریف ۱.۲.۷. فرض کنیم M یک منیفلد توپولوژی از بعد nو $\mathcal{A}$ یک اطلس C^∞ روی M باشد. دراین صورت زوج $(M,\mathcal{A})$ را یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از رده C^∞ می‌نامیم.

[۱] Homeomorph

تعریف ۸.۲.۱. مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای مماس بر M در نقطه p را فضای مماس بر M در نقطه p نامیده و با T_pM نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_pM := \{X_p : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

که نگاشت‌های X_p دارای دو خاصیت خطی ولایب نیتزی هستند.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم$f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ و$p \in M$ در این صورت:

$$\begin{aligned} f_{*_p} &: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \\ X_p &\longmapsto f_{*_p}(X_p) : C^\infty_{f(p)}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto (f_{*_p}(X_p))g := X_p(gof). \end{aligned}$$

f_{*_p} را مشتق fدر نقطه p می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. یک منحنی C^∞روی منیفلد M عبارت‌است از نگاشت هموار

$$\begin{aligned} C &: (a,b) \longrightarrow M \\ t &\longmapsto C(t) \end{aligned}$$

و هم‌چنین اگر $(a,b) = I$,$t_\circ \in (a,b)$ و $\mathcal{A}_\mathcal{I} = \{(I,Id)\}, \{\frac{d}{dt}|_{t_\circ}\} \subseteq T_{t_\circ}I$ آن‌گاه

$$c'(t_\circ) = c_{*_{t_\circ}}(\frac{d}{dt}|_{t_\circ})$$

در این صورت $c'(t)$را بردار سرعت خم یا منحنی $c(t)$ در $t = t_\circ$می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M مفروض است. کلاف مماس M را با TM نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \{(p, X_p) | p \in M, X_P \in T_pM\}.$$

کلاف مماس به صورت چهارتایی $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ نشان داده می‌شود کهπ نگاشت تصویری نامیده

و به صورت زیر می‌باشد:

$$\pi : TM \longrightarrow M$$
$$(p, X_p) \longmapsto p$$

اگر $p \in M$ آن‌گاه $\pi^{-1}(p)$ را تار کلاف در نقطه p گوییم و هر بخش کلاف مماس را یک میدان برداری روی M می‌نامیم.

قضیه ۱.۲.۱۲. *اگر M^n یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر C^k باشد آن‌گاه TM یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر $2n$ بعدی از رده C^{k-1} می‌باشد.*

برهان. به [[۲۵] ، قضیه ۲ ۰ ۲] رجوع شود. □

تعریف ۱.۲.۱۳. به ازای هر نقطه $p \in M$ و $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ نگاشت برگردان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_p^* : T^*_{f(p)}N \longrightarrow T_p^*M$$
$$\omega_{f(p)} \longmapsto f_p^*(\omega_{f(p)}) : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X_p \mapsto f_p^*(\omega_{f(p)})X_p := \omega_{f(p)} f_{*_p} X_p$$

این نگاشت دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) f_p^* در هر نقطه p خطی است.
۲)اگر $p \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} M$ آن‌گاه $(gof)_p^* = f_p^* o g_{f(P)}^*$
۳)ماتریس نمایش f_p^* ترانهاده ماتریس نمایش f_{*_p} می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۴. منیفلد M مفروض است کلاف مماس دوگان روی M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \omega_P | p \in M, \omega_p \in T_P^*M\}.$$

هر بخش از کلاف T^*M را یک میدان یک فرمی روی M می‌نامیم، یعنی

$$\omega : M \longrightarrow T^*M$$
$$p \longmapsto \omega_p \in T_P^*M$$

مجموعه میدان های یک فرمی روی M را با$\Omega^{1}(M)$ نشان می‌دهیم. این فضا یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$و یک $C^{\infty}(M)$ـ مدول می‌باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری باشد هرگاه نگاشت :

$$[,]: V \times V \longrightarrow V$$
$$(u,w) \longrightarrow [u,w]$$

با خواص زیر تعریف شده باشد:

۱)$[u,w] = -[w,u].$

۲)$[u_1 + u_2, w] = [u_1, w] + [u_2, w].$

۳)$[u, w_1 + w_2] = [v, w_1] + [v, w_2].$

۴)$[v,[u,w]] + [w,[v,u]] + [u,[w,v]] = 0$(اتحاد ژاکوبی).

$(V,[,])$ را یک جبر لی گویند.

تعریف ۱۶.۲.۱. χ_M مجموعه میدان‌های برداری با کروشه لی، جبر لی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[,]: \chi_M \times \chi_M \longrightarrow \chi_M$$
$$(X,Y) \longmapsto [X,Y] := XY - YX.$$

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم Vیک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد نگاشت kـ خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$t: V \times V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, v, \cdots, v_k) \longmapsto t(v_1, v_2, \cdots, v_k)$$

نگاشت t را یک تانسور از مرتبه ی $\binom{0}{k}$یا به طور خلاصه از مرتبه k گوییم و مجموعه چنین نگاشت‌هایی را با $L_k(V)$ نشان می‌دهیم. تانسور t ازمرتبه k را متقارن گوییم هرگاه به ازای هر i و j

$$t(v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = t(v_1, v_2, \cdots, v_j, \cdots, v_i \cdots, v_k).$$

وآن را متناوب گوییم هرگاه به ازای هر i و j

$$t(v_۱, v_۲, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = -t(v_۱, v_۲, \cdots, v_j, \cdots, v_i \cdots, v_k).$$

در حالت کلی اگر δ یک عضو از گروه جایگشت های σ_k روی مجموعه متناهی $k, \cdots, ۲, ۱$ باشد آن‌گاه
الف) t متقارن است هرگاه :

$$t(v_۱, v_۲, \cdots, v_k) = t(v_{\delta(۱)}, \cdots, v_{\delta(k)})$$

ب)t متناوب است هرگاه:

$$t(v_۱, \cdots, v_k) = \mathrm{Sgn}\delta \cdot t(v_{\delta(۱)}, \cdots, v_{\delta(k)})$$

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم که t یک تانسور از مرتبه k و متناوب باشد در این صورت t را یک kـ فرمی روی V می‌نامیم. مجموعه چنین نگاشت‌هایی را با A_kV نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و$p \in M$ دراین صورت تانسور از مرتبه k در نقطه p عبارت‌است از نگاشت kـ خطی زیر:

$$t_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

مجموعه این تانسورها را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$L_k(T_pM) = \{t_p : T_PM \times \cdots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

می‌توان ثابت کرد که اگر (x, u) کارتی از M باشد آن‌گاه

$$\{dx^{i_۱}_{|_p} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}_{|_p}\} \subseteq L_k(T_pM)$$

پایه‌ای برای فضای $L_k(T_pM)$ می‌باشد که در آن $۱ \leq i_۱, \cdots, i_k \leq n$. مجموعه k – فرم ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A_k(T_pM) : \{t_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \xrightarrow{\text{k− خطی و متناوب}} \mathbb{R}\};$$

که از بعد $\binom{n}{k}$ و نسبت به کارت (x, u) دارای پایه زیر می‌باشد

$$\{dx^{i_۱}_{|_p} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}_{|_p}\} \subseteq A_k(T_pM)$$

که در آن $۱_۱ < i_۲ < \cdots < i_k \leq n$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم Mیک منیفلد دیفرانسیلپذیر و$p \in M$ در این‌صورت:

$$L_k(TM) = \bigsqcup_{p\in M} L_k(T_pM) = \{(p, t_p)|p \in M, t_p \in L_k(T_pM)\}$$

را کلاف تانسوری از مرتبه k روی منیفلد Mنامیده وبه صورت چهارتایی $(L_k(TM), \pi, M, \mathbb{R}^{n^k})$ نیز نشان داده می‌شود که نگاشت تصویری به صورت زیر است:

$$\pi : L_k(TM) \longrightarrow M$$
$$(p, t_p) \longmapsto p.$$

هر بخش از این کلاف را یک میدان تانسوری از مرتبه $\binom{0}{k}$ می‌نامیم.

قضیه ۲۱.۲.۱. *اگر M^nیک منیفلد دیفرانسیل پذیر از رده C^rباشد آن‌گاه $L_k(TM)$ یک منیفلد دیفرانسیل پذیر ازرده C^{r-1} و از بعد $(n + n^K)$ خواهد بود.*

برهان. به [[۲۵]، قضیه ۴ ۰ ۲] رجوع شود. □

به طور مشابه کلاف k − فرمی‌ها روی منیفلد Mبه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda^k(TM) = A_k(TM) = \bigsqcup_{p\in M} A_k(T_pM) = \{(p, t_p)|p \in M, t_p \in A_k(T_pM)\}$$

قضیه ۲۲.۲.۱. *اگر M^n یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از رده C^r باشد آن‌گاه$A_k(TM) = \Lambda^k(T^*M)$ یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از رده C^{r-1}واز بعد $(n + (\binom{n}{k}))$می‌باشد.*

برهان. به [[۲۵]، قضیه ۴ ۰ ۳] رجوع شود. □

۱.۲.۱ منیفلد ریمانی

تعریف ۲۳.۲.۱. یک متر ریمانی [۱] روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M^n عبارت است از یک تانسور از مرتبه $\binom{0}{2}$ که متقارن و معین مثبت می‌باشد، یعنی:

$$g : M \longrightarrow \otimes^0_2(TM)$$
$$x \longmapsto g_x \in \otimes^0_2(T_xM);$$

[۱] Riemannian metric

که تانسور ۲ ـ خطی g_x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_x : T_xM \times T_xM \xrightarrow{\text{دوخطی}} \mathbb{R}$$
$$(X_x, Y_x) \longmapsto g_x(X_x, Y_x).$$

۱) $g_x(X_x, Y_x) = g_x(Y_x, X_x)$ (متقارن)

۲) $g_x(X_x, X_x) = \circ \Longleftrightarrow X_x = \circ$ ، $g_x(X_x, X_x) \geq \circ,$ (معین مثبت)

تعریف ۲۴.۲.۱. منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M همراه با متر ریمان g که در (۲۳.۲.۱) بیان شد، منیفلد ریمانی [1] نام دارد.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم Mیک منیفلد ریمانی و U زیرمجموعه بازی از Mباشد و فرض کنیم $p \in M$و$X_p, Y_p \in T_pM$ و$\mathcal{A}$ یک اطلس در M باشد که $(x, U) \in \mathcal{A}$. در این صورت شکل موضعی gبه صورت زیر بیان می‌شود:

$$X_p = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|_p}, Y_p = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}_{|_p}$$
$$g(X_p, Y_p) = g(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|_p}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}_{|_p} = X^i(p) Y^j(p) g(\frac{\partial}{\partial x^i}_{|_p}, \frac{\partial}{\partial x^j}_{|_p}).$$

تعریف می‌کنیم $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ بنابراین خواهیم داشت :

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$$
$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنیم که $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ یک نگاشت باشد و M وN به ترتیب دارای مترهای ریمانی $g_۱$ و$g_۲$ باشند. در این صورت f را ایزومتری گوییم هرگاه به ازای هر $p \in M$ داشته باشیم:

$$g_{۱_p}(X_p, Y_p) = g_{۲_{f(p)}}\Big(f_{*_p}(X_p), f_{*_p}(Y_p)\Big) \qquad (۱.۱)$$

قضیه ۲۷.۲.۱. *فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد. در این صورت M یک متر ریمانی می‌پذیرد.*

برهان. به [[۲۶]، قضیه ۱۰۴۰۱] رجوع شود. □

[1] Riemannian manifold

یکریختی موسیقیایی: فرض کنیم Eیک فضای برداری باشد، در این صورت هر تانسور از نوع $\binom{1}{p}$مانند $t : E \times \cdots \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ را می‌توان توسط یک نگاشت چندخطی مانندt_1 معرفی نمود، که در آن $t_1 : E \times \cdots \times E \longrightarrow E$ وبرعکس. ارتباط بین t و t_1و عکس آن توسط دو یکریختی موسوم به یکریختی‌های موسیقیایی[1] برقرار می‌گردد. علت استفاده از این نام‌گذاری شباهت عمل این یکریختی‌ها با علائم موسیقی شارپ[2]یا فلت [3]و خاصیت آنها در زیر و بم کردن صدا در نوت‌های موسیقی است که در این جا به مفهوم بالا و پایین بردن زیرنویس‌ها از این نام استفاده می‌شود. روی منیفلدهای ریمانی، وجود متر ریمانی موجب می‌گردد تا وجود چنین ارتباطی بین هر بردار و دوگان آن همیشه برقرار گردد.

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. در این صورت یک یکریختی بین TMوT^*M توسط متر g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\flat : TM \longrightarrow T^*M$$
$$X \longmapsto \flat(X)$$

که:

$$\flat(X)(Y) := g(X, Y).$$

وارون $\flat$، نیز یک یکریختی می‌باشد که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\sharp : T^*M \longrightarrow TM$$

عملگرهای $\flat$ و$\sharp$ را به ترتیب عملگر فلت و شارپ می‌نامیم.
اگر $X = X^j \partial_j \in \chi(M) = \Gamma(TM)$ آنگاه بنا به تعریف می‌توان نوشت :

$$\flat(X) = X_i dx^i$$

که در آن:

$$X_i = g_{ij} X^j$$

بنابراین عملگر فلت در واقع یک اندیس تانسور را پایین می‌آورد و به همین ترتیب اگر $\omega = \omega_j dx^j = \Gamma(T^*M)$ آنگاه می‌توان نوشت:

[1] Musical isomorphism
[2] Sharp
[3] Flat

$$\sharp(\omega) = \omega^i \partial_j$$

که در آن

$$\omega^i = g^{ij}\omega_j$$

یعنی عملگر شارپ در واقع یک اندیس تانسور را بالا می‌برد.

۳.۱ کلاف های برداری

گاهی اوقات در هندسه اتفاق می‌افتد که می‌خواهیم با کنار هم قرار دادن یا با اجتماع منیفلدها ، منیفلد جدیدی بسازیم. برای انجام این کار باید ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی این خانواده از منیفلدها تعریف کنیم. این عمل را کلاف‌کردن خانواده‌ای از منیفلدها به یکدیگر و این ساختار جدید را ساختار کلافی می‌نامند. نظریه کلاف‌ها بخش مهمی از هندسه دیفرانسیل را تشکیل می‌دهد و یکی از اهداف این نظریه ارائه یک تعریف جامع از مشتق‌گیری هموردا [1] از تانسور ها می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم E, M, F منیفلدهای C^∞ و $\pi : E \longrightarrow M$ یک نگاشت C^∞ پوشا باشد چهارتایی (E, π, M, F) را کلاف تاری [2] می‌گوییم هرگاه زیرمجموعه بازی از M مانند U و دیفومورفیسمی C^∞ مانند $\phi : \pi^{-1}(u) \longrightarrow U \times F$ موجود باشد که نمودار زیر جابه جایی باشد یعنی $pr_1 o\phi = \pi$

$$\begin{tikzcd}
E \subseteq \pi^{-1}(u) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

E را فضای کل [3] ، M را منیفلد پایه [4] ، f را تار [5] و زوج (u, ϕ) را کارت کلاف تاری می‌نامیم. در حالت خاص اگر F یک فضای برداری باشد آن‌گاه (E, π, B, F) را یک کلاف برداری می‌نامیم هرگاه تحدید کارت‌های کلافی به تارهای کلافی یک ایزومرفیسم خطی باشد.

نکته: بعد منیفلد E با مجموع ابعاد M و F برابر است یعنی

$$\dim E = \dim M + \dim F$$

[1] Covariant derivative
[2] Fiber bundele
[3] Total space
[4] Base manifold
[5] Fiber

بعد F را رتبه کلاف می‌نامیم، یعنی: $\mathrm{rank}E = \mathrm{dim}F$

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه $\mathcal{A} = (u_\alpha, \phi_\alpha)$ از کارت‌های کلاف تاری را یک اطلس برای کلاف تاری (E, π, M, F) می‌نامیم هرگاه u_αها M را بپوشانند.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم E یک کلاف برداری C^r باشد هر نگاشت C^r که به صورت $X : M \longrightarrow E$ تعریف شود، یک برش کلاف برداری [۱] از کلاس C^r نامیده می‌شود، هرگاه

$$\pi o X = ۱_M$$

برش‌های کلاف برداری (E, π, M) را با نماد $\Gamma(E, M)$ یا $\Gamma(E)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴.۳.۱. هر میدان برداری روی منیفلد M یک برش از کلاف برداری TM می‌باشد لذا برش‌های این کلاف را به صورت$\Gamma(TM, M)$ یا $\Gamma(TM) = \chi(M)$ نشان می دهیم.

کلاف برگردان: فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار و $f : M \longrightarrow N$ نگاشت هموار باشد به طوری که N دارای ساختار کلافی و(E, π, N, F) یک کلاف تاری، در این صورت کلاف برگردان E روی M را با f^*E نشان داده وبه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*E = \{(x, u) | x \in M, u \in E, f(x) = \pi(u)\}.$$

در واقع f^*E توسط اجتماع برگردان تارهای کلاف E روی منیفلد M ساخته می‌شود و چون f^* خاصیت خطی دارد پس پایه‌های تارهای کلاف برگردان یک کپی از پایه‌های تارهای کلاف E می‌باشد.
نگاشت تصویر مؤلفه‌ی اول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$pr_۱ : f^*E \longrightarrow M$$
$$(x, u) \in M \times E \longmapsto x \in M$$

واگر نگاشت تصویر مؤلفه دوم به صورت زیر تعریف شود:

$$pr_۲ : f^*E \longrightarrow E$$
$$(x, u) \longmapsto v \in E$$

[۱] Vector bundle section