تتت بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

بررسی رابطه موند های ساختار یافته و اشیاء مونوئید

مولف:
ناهید ایلاقی

استاد راهنما:
دکتر سید ناصر حسینی

شهریور ماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: ناهید ایلاقی	امضاء:
استاد راهنما: دکتر سید ناصر حسینی	امضاء:
استاد مشاور:	امضاء:
داور اول :	امضاء:
داور دوم:	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی:	امضاء:

تقدیم به

پدرم به استواری کوه

مادرم به زلالی چشمه

همسرم به صمیمیت باران

دخترم به طراوت شبنم

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که هرگاه از او چیزی بخواهیم، عطا می کند و آنگاه که امیدی به او داشته ایم به امیدمان می رساند.

سپاس از بودن ها، همراهی وهمدلی هایی که تشویق وترغیبشان، این اعتماد را در ما به وجود آورد که می توانیم بنویسیم، پس به یادشان می نویسیم... .

مقدمه

در این پایان نامه هدف اصلی تعریف موندهای ساختاریافته و بررسی رابطه بین موندهای ساختار یافته و اشیاء مونوئیدی می باشد. در فصل اول ضرب تابعگون ها و تبدیل های طبیعی و برخی روابط بین آن ها آورده شده است. مفاهیم شیء مونوئیدی، ریخت مونوئیدی، شیء موندی، ریخت موندی و ترکیب و همانی آن ها مطرح گردیده و مثال هایی از موند آورده شده است. سپس نشان داده شده که گردایه اشیاء مونوئیدی به همراه ریخت های مونوئیدی تشکیل یک رسته و گردایه موندها به همراه ریخت های موندی تشکیل یک رسته می دهند.
در فصل دوم وجود ضرب متناهی در رسته اشیاء مونوئیدی و رسته موندها نشان داده شده و بعد به بررسی رابطه بین موندها واشیاء مونوئیدی پرداخته ایم. در انتها تابعگون $\mathbf{T}$ ، از رسته اشیاء مونوئیدی به موندها معرفی شده است که اگرچه ضرب متناهی را حفظ نمی کند اما تبدیلی طبیعی بین اثر این تابعگون بر ضرب مونوئیدی دو شیء مونوئیدی وضرب موندی اثر آن برتک تک اشیاء می توان یافت.
در فصل سوم، موند ساختاریافته و ریخت ساختاریافته و ترکیب دو ریخت ساختار یافته و همانی ساختاریافته معرفی گردیده و نشان داده ایم که گردایه موندهای ساختار یافته به همراه ریخت های ساختار یافته تشکیل یک رسته می دهند. سپس با معرفی تابعگون های $\mathbf{T}_*$ و $\mathbf{M}$ بین رسته موندهای ساختار یافته و رسته اشیاء مونوئیدی ارتباط برقرار شده است.
در فصل چهارم، به بررسی ویژگی های تابعگون های $\mathbf{T}_*$ و $\mathbf{M}$ پرداخته و نشان داده ایم که تابعگون $\mathbf{T}_*$ ، وفادار، پر و روی اشیاء در حد یکریختی یک به یک و تابعگون $\mathbf{M}$ روی

اشیاء، در حد یکریختی پوشاست. در پایان نیز رابطه تابعگون های $\mathbf{T}_*$ و $\mathbf{M}$ بررسی شده است.

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا به معرفی مفاهیم موند روی یک رسته و شیء مونوئیدی در یک رسته پرداخته ایم. سپس نشان داده ایم رسته موندها و رسته اشیاء مونوئیدی دارای ضرب متناهی می باشند. با معرفی تابعگونی از رسته اشیاء مونوئیدی به رسته موندها، ثابت کرده ایم که هر شیء مونوئیدی یک موند به دست می دهد.

در ادامه، موندهای ساختاریافته همراه با ریخت های ساختاریافته تعریف شده و نشان داده ایم این اشیاء و ریخت ها یک رسته تشکیل می دهند. تابعگون هایی بین رسته اشیاء مونوئیدی و رسته موندهای ساختاریافته معرفی شده و به بررسی این تابعگون ها پرداخته ایم.

کلمات کلیدی:

موند، اشیاء مونوئیدی، موند ساختاریافته

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات رسته ای

در این فصل برخی مقدمات رسته ای مورد نیاز مطرح می گردد. تعاریف ضرب تابعگون ها، ضرب تبدیل های طبیعی، اشیاء مونوئیدی، ریخت های مونوئیدی، شیء موندی و ریخت موندی بیان می شود و پس از بیان مثال هایی از موند، رسته اشیاء مونوئیدی و رسته موندها معرفی می گردد. جهت آشنایی بیشتر به [۱]، [۲] و [۳] مراجعه شود.

۱.۱ ضرب تابعگون ها و ضرب تبدیل های طبیعی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم رسته های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ داده شده است.

الف) به ازای هر شیء M در رسته $\mathcal{B}$ ، تابعگون با مقدار ثابت M را با $\widehat{M} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \widehat{M}(X) = M \\ \downarrow f & & \downarrow \widehat{M}(f)=1_M \\ Y & \longmapsto & \widehat{M}(Y) = M \end{array}$$

ب) به ازای هر ریخت $f : M \longrightarrow N$ در رسته $\mathcal{B}$ ، تبدیل طبیعی با مقدار ثابت f را با $\widehat{f} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نشان می دهیم که برای هر شیء X در رسته $\mathcal{A}$ ، آن را به صورت

$\widehat{f}_X = f$ تعریف می کنیم.

لم ۲.۱.۱. فرض کنید f, g, α, β ریخت هایی در رسته با ضرب دوتایی باشند. آنگاه در صورت معنا دار بودن ترکیب های نوشته شده، روابط زیر برقرار خواهند بود.

$a)\ f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle \Rightarrow \pi_1 \circ (f \times g) = f \circ \pi_1, \pi_2 \circ (f \times g) = g \circ \pi_2$

$b)\ \langle \alpha, \beta \rangle \circ f = \langle \alpha \circ f, \beta \circ f \rangle$

$c)\ (f \times g) \circ \langle \alpha, \beta \rangle = \langle f \circ \alpha, g \circ \beta \rangle$

$d)\ (f \times g) \circ (\alpha \times \beta) = (f \circ \alpha) \times (g \circ \beta)$

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته که $\mathcal{B}$ دارای ضرب دو تایی و $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ تابعگون باشند، آنگاه $F \times G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ که به صورت زیر تعریف شده است،

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & F(X) \times G(X) \arrow[d, "F(f)\times G(f)"] \\
Y \arrow[r, mapsto] & F(Y) \times G(Y)
\end{tikzcd}$$

یک تابعگون است.

نتیجه ۴.۱.۱. اگر $\widehat{M} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ تابعگون با مقدار ثابت M و $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ تابعگونی دلخواه باشند، آنگاه $\widehat{M} \times F$ یک تابعگون است.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند که $\mathcal{B}$ دارای ضرب دو تایی است. $F, G, F', G' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ تابعگون ، $\alpha : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ و $\alpha' : F' \longrightarrow G' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ دو تبدیل طبیعی باشند، آنگاه $\alpha \times \alpha' : F \times F' \longrightarrow G \times G' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ، که به صورت زیر تعریف شده است،

$$\forall a \in \mathcal{A}, (\alpha \times \alpha')_a = \alpha_a \times \alpha'_a$$

یک تبدیل طبیعی است.

برهان. برای این منظور بایستی نشان دهیم برای هر ریخت $f : a \longrightarrow a'$ در رسته $\mathcal{A}$ نمودار زیر

$$\begin{tikzcd}
F(a) \times F'(a) \arrow[r, "(\alpha\times\alpha')_a"] \arrow[d, "F(f)\times F'(f)"'] & G(a) \times G'(a) \arrow[d, "G(f)\times G'(f)"] \\
F(a') \times F'(a') \arrow[r, "(\alpha\times\alpha')_{a'}"'] & G(a') \times G'(a')
\end{tikzcd}$$

جابه جایی است. که این نیز با کمک رابطه (a) در ۲.۱.۱ و نیز تبدیل طبیعی بودن α, α' براحتی حاصل می شود. $\square$

نتیجه ۶.۱.۱. فرض کنیم $\widehat{f} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ تبدیل طبیعی با مقدار ثابت f و $\alpha : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ تبدیل طبیعی دلخواه باشند، آنگاه $\alpha \times \widehat{f}$ یک تبدیل طبیعی است.

قضیه ۷.۱.۱. اگر $\alpha : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ و $\alpha' : F \longrightarrow G' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ دو تبدیل طبیعی باشند، آنگاه $\langle \alpha, \alpha' \rangle : F \longrightarrow G \times G' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نیز یک تبدیل طبیعی است.

برهان. برای این منظور بایستی نشان دهیم برای هر ریخت $f : a \longrightarrow a'$ در رسته $\mathcal{A}$ نمودار زیر

$$\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "\langle\alpha,\alpha'\rangle_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \times G'(a) \arrow[d, "G(f)\times G'(f)"] \\
F(a') \times F'(a') \arrow[r, "\langle\alpha,\alpha'\rangle_{a'}"'] & G(a') \times G'(a')
\end{tikzcd}$$

جابه جایی است. که این با استفاده از تبدیل طبیعی بودن α α' و رابطه (b) در ۲.۱.۱ براحتی حاصل می شود. $\square$

حکم ۸.۱.۱. اگر $\mathcal{A}$ رسته ای دلخواه و $\mathcal{B}$ رسته ای دارای ضرب متناهی باشند، رسته $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ دارای ضرب متناهی است.

برهان. به راحتی می توان نشان داد برای تابعگون های $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نمودار

$$F \xleftarrow{\pi_1} F \times G \xrightarrow{\pi_2} G$$

یک ضرب در رسته $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ می باشد، که π_i تبدیل طبیعی است که برای هر X ، $(\pi_i)_X$ ریخت تصویر i ام در رسته $\mathcal{B}$ می باشد. □

لم ۹.۱.۱. الف) برای تابعگون های $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ و $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$ داریم:

$$(F \times G) \circ T = (F \circ T) \times (G \circ T)$$

ب) نمودار

$$F \circ T \xleftarrow{\pi_1 T} (F \times G) \circ T \xrightarrow{\pi_2 T} G \circ T$$

یک ضرب در رسته $\mathcal{B}^{\mathcal{X}}$ می باشد.

برهان. الف) برای هر شیء X داریم:

$$(F \times G) \circ T(X) = (F \times G)(T(X)) = F(T(X)) \times G(T(X)) =$$
$$F \circ T(X) \times G \circ T(X) = ((F \circ T) \times (G \circ T))(X)$$

و نیز برای هر ریخت f داریم:

$$(F \times G) \circ T(f) = (F \times G)(T(f)) = F(T(X)) \times G(T(f)) =$$
$$F \circ T(f) \times G \circ T(f) = ((F \circ T) \times (G \circ T))(f)$$

ب) با استفاده از ۸.۱.۱ ، $\pi_i T$ تبدیل طبیعی است که برای هر X در رسته $\mathcal{X}$، $(\pi_i)_{TX}$ ، ریخت تصویر i ام در رسته $\mathcal{B}$ می باشد. □

نتیجه ۱۰.۱.۱. ریخت های $\pi_1 T$ و $\pi_2 T$ همان ریخت های تصویر ضرب $(F \circ T) \times (G \circ T)$ می باشند.

۲.۱ رسته اشیاء مونوئیدی

در ادامه، $\mathcal{X}$ را رسته ای دارای ضرب متناهی فرض می کنیم. اگر A شیء در این رسته باشد، آنگاه $A^{۲}$ شیء حاصل از ضرب $A \times A$ را نمایش می دهد. اگر $f : A \longrightarrow B$ ریختی در این رسته باشد، آنگاه $f^{۲} : A^{۲} \longrightarrow B^{۲}$ ، ریخت $f \times f : A \times A \longrightarrow B \times B$ رانمایش می دهد.

تعریف ۱.۲.۱. [۱] .الف) فرض کنید $\mathcal{X}$ رسته ای دارای ضرب متناهی باشد. یک شیء مونوئیدی در این رسته، سه تایی $(M, *, e)$ است که M یک شیء و $* : M^{۲} \to M$ و $e : ۱ \to M$ دو ریخت در رسته $\mathcal{X}$ باشند، به طوری که نمودارهای زیر جابه جا شوند.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\langle e\circ !_M , ۱_M \rangle"] \arrow[drr, "۱_M"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "///"] & & M^{۲} \arrow[d, "*"] & & M \arrow[ll, "\langle ۱_M , e\circ !_M \rangle"'] \arrow[dll, "۱_M"] \arrow[ll, phantom, shift right=4ex, "///"] \\
& & M & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^{۳} \arrow[r, "* \times ۱_M"] \arrow[d, "۱_M \times *"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & M^{۲} \arrow[d, "*"] \\
M^{۲} \arrow[r, "*"'] & M
\end{tikzcd}
$$

ب) ریخت $f : M \longrightarrow N$ در $\mathcal{X}$ را ریخت مونوئیدی گوئیم هرگاه در جابه جایی نمودارهای زیر صدق کند.

$$
\begin{tikzcd}
۱ \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] \arrow[dr, phantom, shift left=2ex, "///"] & M \arrow[d, "f"] \\
& N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^{۲} \arrow[r, "*"] \arrow[d, "f^{۲}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & M \arrow[d, "f"] \\
N^{۲} \arrow[r, "*'"'] & N
\end{tikzcd}
$$

در این صورت ریخت f را به صورت $f : (M, *, e) \longrightarrow (N, *', e')$ می نویسیم.

ج) ترکیب دو ریخت مونوئیدی f و g را همان ترکیب در رسته $\mathcal{X}$ تعریف می کنیم.

د) ریخت همانی روی شیء مونوئیدی $(M, *, e)$ را ریخت همانی در رسته $\mathcal{X}$ تعریف می کنیم و آن را با $۱_{(M,*,e)}$ نمایش می دهیم.

لم ۲.۲.۱. الف) هرگاه f و g دو ریخت مونوئیدی باشند ترکیب مونوئیدی آن ها نیز یک ریخت مونوئیدی است.

ب) همانی روی یک شیء مونوئیدی، یک ریخت مونوئیدی است.

برهان. الف) با کمک شرکت پذیری رسته $\mathcal{X}$ و نمودارهای جابه جایی ریخت های مونوئیدی f و g ، جابه جایی دیا گرام های مورد نظر به صورت زیر حاصل می شود.

$$
\begin{tikzcd}
۱ \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] \arrow[ddr, bend right, "e''"'] & M \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60, "g\circ f"] \\
 & N \arrow[d, "g"] \\
 & K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^{۲} \arrow[r, "*"] \arrow[d, "f^{۲}"'] \arrow[dd, bend right=60, "(g\circ f)^{۲}"'] & M \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60, "g\circ f"] \\
N^{۲} \arrow[r, "*'"] \arrow[d, "g^{۲}"'] & N \arrow[d, "g"] \\
K^{۲} \arrow[r, "*''"] & K
\end{tikzcd}
$$

داریم:

$$(g\circ f)\circ * = g\circ(f\circ *) = g\circ(*'\circ f^{۲}) = (g\circ *')\circ f^{۲} = (*''\circ g^{۲})\circ f^{۲} =$$

$$*''\circ(g^{۲}\circ f^{۲}) = *\circ(g\times g)\circ(f\times f) = *\circ((g\circ f)\times(g\circ f)) = *''\circ(g\circ f)^{۲}$$

و نیز داریم:

$$(g\circ f)\circ e = g\circ(f\circ e) = g\circ e' = e''$$

ب) برای هرشیء مونوئیدی $(M,*,e)$ ، $M\in\mathcal{X}_{۰}$ است. چون $\mathcal{X}$ یک رسته است، وجود دارد $۱_M\in\mathcal{X}_{۱}$. حال از تعریف همانی مونوئیدی داریم که $۱_{(M,*,e)} = ۱_M$. برای اثبات جابه جایی نمودارهای زیر

$$
\begin{tikzcd}
۱ \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e"'] & M \arrow[d, "۱_M"] \\
 & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^{۲} \arrow[r, "*"] \arrow[d, "۱_M\times ۱_M"'] & M \arrow[d, "۱_M"] \\
M^{۲} \arrow[r, "*"'] & M
\end{tikzcd}
$$

با استفاده از خاصیت ریخت همانی در رسته $\mathcal{X}$ داریم:

$$۱_M\circ * = * = *\circ ۱_{M\times M} = *\circ(۱_M\times ۱_M)$$

$$۱_M\circ e = e$$

در نتیجه ریخت همانی تعریف شده، یک ریخت مونوئیدی است. $\square$

حکم ۳.۲.۱. اشیاء مونوئیدی در $\mathcal{X}$ همراه با ریخت های مونوئیدی، تشکیل یک رسته می دهند، که آن را با $Monoid(\mathcal{X})$ نمایش می دهیم.

برهان. گردایه اشیاء و ریخت های رسته $\mathcal{X}$ کلاس است. از آنجایی که $M \in \mathcal{X}_0$ و $*, e \in \mathcal{X}_1$ گردایه اشیاء رسته مونوئیدی زیر گردایه ای از $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1$ می باشد، در نتیجه یک کلاس است. خاصیت P را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$f \in hom(M, N)$ در خاصیت P صدق می کند، هرگاه $f : (M, *, e) \to (N, *', e')$ یک ریخت مونوئیدی باشد. حال با داشتن مجموعه $hom(M, N)$ و خاصیت P و با استفاده از اصل تصریح مجموعه زیر به دست می آید:

$$\{f \in hom(M,N) | \text{در خاصیت } P \text{ صدق می کند } f\}$$

با استفاده از اصل گسترش مجموعه فوق به طور یکتا مشخص می گردد که آن را با نماد $hom((M, *, e), (N, *, e))$ نمایش می دهیم. از آنجایی که $hom((M, *, e), (N, *, e))$ زیر مجموعه ی $hom(M, N)$ است، نتیجه می شود که اشتراک hom های متفاوت مجزاست. با استفاده از ۲.۲.۱ می توانیم ترکیب را ترکیب مونوئیدی و همانی را همانی مونوئیدی در نظر بگیریم که خاصیت های شرکت پذیری و عضو همانی را از رسته $\mathcal{X}$ به ارث می برد. $\square$

۳.۱ رسته موندها

اگر $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ یک تابعگون روی رسته $\mathcal{X}$ باشد، آنگاه $T^2 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ تابعگون $T \circ T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ را نمایش می دهد. اگر $\theta : T \longrightarrow T' : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ یک تبدیل طبیعی باشد، آنگاه $\theta^2 = \theta T' \circ T\theta$ را تبدیل طبیعی $\theta^2 : T^2 \longrightarrow T'^2 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ که همان ترکیب افقی تبدیل های طبیعی است، تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. [۱]،[۲]،[۳] . الف) یک موند روی رسته $\mathcal{X}$ سه تایی $\mathbb{T} = (T, \mu, \eta)$ است که در آن $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ یک تابعگون و $\eta : 1_{\mathcal{X}} \longrightarrow T$ و $\mu : T^2 \longrightarrow T$ دو تبدیل طبیعی باشند، که در جابه جایی نمودارهای زیر صدق کنند.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "1_T"'] \arrow[dr, phantom, "///", shift left=3] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, "1_T"] \arrow[dl, phantom, "///", shift right=3] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

ب) فرض کنید (T, μ, η) و (T', μ', η') موندهایی روی رسته $\mathcal{X}$ باشند. تبدیل طبیعی $\theta : T \to T' : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ را ریخت موندی نامیم هرگاه در جابه جایی نمودارهای زیر صدق کند.

$$\begin{tikzcd} 1_{\mathcal{X}} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] \arrow[dr, phantom, "///", shift left=3] & T \arrow[d, "\theta"] \\ & T' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta^2"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & T \arrow[d, "\theta"] \\ T'^2 \arrow[r, "\mu'"'] & T' \end{tikzcd}$$

در این صورت ریخت θ را با $\theta : \ (T, \mu, \eta) \longrightarrow (T', \mu', \eta')$ نمایش می دهیم.

ج) ترکیب دو ریخت موندی θ_1 و θ_2 را همان ترکیب عمودی تبدیل های طبیعی تعریف می کنیم، به عبارت دیگر:

$$\begin{tikzcd} (T, \mu, \eta) \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[rr, bend left, "\theta_1 \circ \theta_2"] & (T', \mu', \eta') \arrow[r, "\theta_1"] & (T'', \mu'', \eta'') \end{tikzcd}$$

$$\forall X \in \mathcal{X}, (\theta_1 \circ \theta_2)_X := (\theta_1)_X \circ (\theta_2)_X$$

د) همانی روی موند (T, μ, η) را تبدیل طبیعی همانی روی T تعریف می کنیم و آن را با $1_{(T,\mu,\eta)}$ نمایش می دهیم.

مثال ۲.۳.۱. سه تایی $\mathbb{T} = (T, 1_T, 1_T)$ که $T = 1_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ و $\mu = 1_T : T \longrightarrow T$ و $\eta = 1_T : T \longrightarrow T$ را موند بدیهی نامیم که در آن T تابعگون همانی و 1_T تبدیل طبیعی همانی می باشند. با کمک تساوی های $1_{\mathcal{X}} 1_T = 1_T$ و $1_T 1_{\mathcal{X}} = 1_T$ به راحتی جابه جایی نمودارهای زیر حاصل می شود.

$$\begin{tikzcd} 1_{\mathcal{X}} \arrow[r, "1_{\mathcal{X}} 1_T"] \arrow[dr, "1_T"'] \arrow[dr, phantom, "///", shift left=3] & 1_{\mathcal{X}}{}^2 \arrow[d, "1_T"] & 1_{\mathcal{X}} \arrow[l, "1_T 1_{\mathcal{X}}"'] \arrow[dl, "1_T"] \arrow[dl, phantom, "///", shift right=3] \\ & 1_{\mathcal{X}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{\mathcal{X}}{}^3 \arrow[r, "1_{\mathcal{X}} 1_T"] \arrow[d, "1_T 1_{\mathcal{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & 1_{\mathcal{X}}{}^2 \arrow[d, "1_T"] \\ 1_{\mathcal{X}}{}^2 \arrow[r, "1_T"'] & 1_{\mathcal{X}} \end{tikzcd}$$

مثال ۳.۳.۱. سه تایی $\mathbb{P} = (P, \mu, \eta)$ موند مجموعه توانی روی رسته Set نامیده می شود که در آن P یک تابعگون به صورت زیر است:

$$P : Set \longrightarrow Set$$

$$X \longmapsto P(X)$$

$$f \longmapsto P(f)$$

اگر A عضوی از $P(X)$ باشد تحت تابع $P(f)$ به $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ برده می شود و برای هر $X \in Set$ تبدیل طبیعی μ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu : P^۲ \longrightarrow P$$

$$\mu_X : P^۲(X) \longrightarrow P(X)$$

$$\mu_X(Z) = \cup_{A \in Z} A$$

و نیز برای هر $X \in Set$ تبدیل طبیعی η را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\eta : ۱_{Set} \longrightarrow P$$

$$\eta_X : X \longrightarrow P(X)$$

$$\eta_X(x) = \{x\}$$

می توان نشان داد که P یک تابعگون و μ و η تبدیل های طبیعی هستند. حال برای اثبات جابه جایی نمودار زیر

$$\begin{tikzcd}
P^۳ \arrow[r, "P\mu"] \arrow[d, "\mu P"'] & P^۲ \arrow[d, "\mu"] \\
P^۲ \arrow[r, "\mu"'] & P
\end{tikzcd}$$

داریم:

$$(P\mu)_X = P(\mu_X) : P^۳(X) \longrightarrow P^۲(X)$$

تابعی است که برای هر $K \in P^۳(X)$ به صورت زیر به دست می آید:

$$P(\mu_X)(K) = \mu_X(K) = \{\mu_X(Z) : Z \in K\} = \{\cup_{A\in Z} A : Z \in K\}$$

با توجه به روابط زیر، مجموعه نهایی به دست آمده زیرمجموعه $P(X)$ و در نتیجه عضو $P^{۲}(X)$ می باشد.

$$(K \in P^{۳}(X), Z \in K) \Rightarrow Z \in K \subseteq P^{۲}(X) \Rightarrow (Z \subseteq P(X), A \in Z) \Rightarrow$$

$$A \in P(X) \Rightarrow A \subseteq X$$

بنابراین داریم:

$$\mu_X \circ P(\mu_X)(K) = \mu_X(\{\cup_{A\in Z} A : Z \in K\}) = \cup_{Z\in K} \cup_{A\in Z} A$$

از طرف دیگر داریم:

$$(\mu P)_X(K) = \mu_{P(X)}(K) = \cup_{Z\in K} Z$$

پس داریم:

$$\mu_X \circ (\mu P)_X(K) = \mu_X(\mu_{P(X)}(K)) = \mu_X(\cup_{Z\in K} Z) = \cup_{A\in \cup_{Z\in K} Z} A = \cup_{Z\in K} \cup_{A\in Z} A$$

در نتیجه نمودار مورد نظر جابه جایی است. برای اثبات جابه جایی نمودارهای زیر

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "P\eta"] \arrow[dr, "۱_P"'] & P^{۲} \arrow[d, "\mu"] & P \arrow[l, "\eta P"'] \arrow[dl, "۱_P"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

داریم:

$$(P\eta)_X(A) = P\eta_X(A) = \eta_X(A) = \{\eta_X(a) : a \in A\} = \{\{a\} : a \in A\}$$

برای اثبات جابه جایی مثلث سمت چپ داریم:

$$(\mu \circ P\eta)_X(A) = \mu_X(P\eta_X(A)) = \mu_X(\{\{a\} : a \in A\}) = \cup_{a\in A}\{a\} = A =$$

$$۱_{PX}(A) = (۱_P)_X(A)$$