دانشگاه حکیم سبزواری
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

محاسبه تقریب مرتبه ی اول توابع سه نقطه ای و توابع چهارنقطه ای با خطوط خارجی $(\bar{\lambda}\bar{\lambda}AA)+(\bar{\lambda}\lambda)^{2}$ درنظریه ی پیمانه ای $SU(N)\times U(1)$ ابرتقارنی $N=\frac{1}{2}$

نگارش
سید سمیع منصورمقدم

استاد راهنما
دکتر احمدفرزانه کرد
استاد مشاور
دکترسیدعلی اصغرعلوی

۱۳۹۲

تقدیم به آنکس که بداند و بداند که بداند

و آنکس که نداند و بداند که نداند و بخواهد که بداند

خدایا دردمندم ...

روحم از شدت درد می سوزد، قلبم می جوشد، احساسم شعله می کشد و بند بند وجودم از شدت درد صیحه می زند.

خدایا...

تو مرا اشک کردی که همچون باران بر تکزار انسان ببارم. تو مرا فریاد کردی که همچون رعد در میان طوفان حوادث بغرم. تو مرا درد و غم کردی تا همنشین محرومین و دل شکستگان باشم. تو مرا عشق کردی تا در قلب های عشاق بسوزم. تو مرا برق کردی تا در آسمان ظلمت زده بتازم و سیاهی این شب ظلمانی را بدرم.

خدایا...

تار و پود وجود مرا با غم و درد سرشتی، تو مرا به آتش عشق سوختی، در کوره ی غم گداختی، در طوفان حوادث ساختی و پرداختی، تو مرا در دریای مصیبت و بلا غرق کردی و در کویر فقر، حرمان و تنهایی سوزاندی.

خدایا...

دل غم زده و دردمندم آرزوی آزادی می کند و روح پژمرده ام خواهش پرواز دارد، تا از این غربت کده ی سیاه، ردای خود را به وادی عدم بکشاند و از بار هستی برهد و در عالم نیستی فقط با خدای خود به وحدت برسد.

خدایا... [1]

[1] مناجات استاد شهید دکتر مصطفی چمران

سپاس گزاری...

ستایش و سپاس اولاً و بالذات مخصوص خداوندی است که تقارن را در ظاهر آدمی نمایان فرمود و فطرتاً او را در جست و جوی تقارن قرار داد.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و زحمات استاد بزرگوارم دکتر احمدفرزانه کرد در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه قدردانی نمایم.

همچنین جا دارد که تشکری ویژه داشته باشم از دوست عزیزم محسن حدادی مقدم، که با همراهی و مساعدت او به فراگیری ابرتقارنی پرداختم و مقالات مرتبط با پایان‌نامه را به دقت مطالعه کرده و مسائل و مشکلات پیش‌آمده را با این یار شفیق در میان گذاشته وایشان با روی گشاده پذیرای بنده بودند.

و در انتها از تمامی اساتیدی که بر پیشرفت علمی اینجانب تأثیرگذار بودند همانند استاد عزیزم دکتر سید علی اصغر علوی و دیگر اساتید گروه فیزیک سپاسگزاری می نمایم.

سید سمیع منصورمقدم

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: منصورمقدم نام: سیدسمیع

عنوان: محاسبه تقریب مرتبه ی اول توابع سه نقطه ای و توابع چهارنقطه ای با خطوط خارجی $(\bar{\lambda}\bar{\lambda}AA) + (\bar{\lambda}\lambda)^{۲}$ درنظریه ی پیمانه ای $SU(N) \times U(۱)$ ابرتقارنی $N = \frac{۱}{۲}$

استاد راهنما: دکتر احمدفرزانه کرد

استاد مشاور: دکترسیدعلی اصغرعلوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: فیزیک گرایش: ذرات بنیادی

دانشگاه: حکیم سبزواری علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۸۴

واژگان کلیدی: نظریه پیمانه ای $SU(N) \times U(۱)$ ، ابرتقارن $N = \frac{۱}{۲}$ ،ابرفضای ناجابجایی

چکیده

به تازگی علاقه مندی بسیاری به نظریه های ابر فضای ناجابجایی دیده می شود که منجر به ارائه ی کار های بسیاری در این زمینه شده است.
چنین نظریه هایی غیر هرمیتی بوده وتنها در برگیرنده ی نیمی از ابر تقارن مربوط به نظریه ی ابر تقارنی معمول می باشند. از این روی عبارت « ابر تقارنی $N = \frac{۱}{۲}$ » برای آنها در نظرگرفته می شود. در ظاهر این نظریه ها قدرت محاسبه بازبهنجاری را ندارند اما با این وجود عقیده براین است که بازبهنجار هستند. درحقیقت لازم است تعداد محدودی از عبارات به لاگرانژی اضافه شده تا واگرایی های موجود در تمام حالات حذف شوند.
در این پایان نامه سعی شده است تا با بررسی دقیق لاگرانژی موجود در نظریه

پیمانه ای $SU(N)\times U(1)$ ابر تقارنی $N=\frac{1}{2}$ و کسب اطلاعات موردنیاز به حل توابع سه نقطه ای و چهارنقطه ای با خطوط خارجی $(\bar{\lambda}\bar{\lambda}AA) + (\bar{\lambda}\lambda)^2$ بپردازیم. تا با این کار اولین گام برای بررسی باز بهنجارپذیری این نظریه ها در تصحیح مرتبه ی اول برداشته شود.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

مقدمه

ریچارد فاینمن [۲] فیزیکدان آمریکایی، نمایشی نموداری، با ظاهری خیلی ساده ولی بسیار پر بار، از برهمکنش های الکتردینامیک به وجود آورده است. نمودارهای فاینمن مسیرهای ذرات برخورد کننده را در فضا - زمان به نمایش می گذارد. این نمودارها محاسبه ی انتگرال ها را آسان تر می کند و اجازه می دهد به فرایند هایی بیندیشند که هنوز مشاهده نشده اند.

با وجود موفقیت های آزمایشگاهی زیادی که در الکتردینامیک کوانتومی فراهم آورده است، بنیادهای نظری آن یک کاستی دارد که می توانست کل نظریه را با خطر رو به رو کند و آن وجود مقادیر بی نهایت (واگرایی ها) در نظریه است. آنها از آنجا پیدا می شدند که الکترون در حال حرکت فوتون گسیل می دارد و این میدان از نو با ویژه میدان الکترون برهمکنش می کند. این خود برهمکنش پایان ناپذیر، وضعی را به وجود می آورد که به لحاظ ریاضی فاجعه به حساب می آید، در حالی که انتظار داشتند مقادیر معینی به دست آورند. این گرفتاری به مدت بیست سال مانع گسترش نظریه شد. پس از جنگ جهانی دوم، جولیان شوینگر [۳] ، سین-یتیرو توموناگا [۴] ، ریچارد فاینمن و فریمین دایسون [۵] راهی پیدا کردند که مشکل را حل نمی کرد، بلکه با ترفندی به نام عملیات **بازبهنجارش** [۶] آن را دور می زد. باز بهنجارش به پیشنهادی از واسیکوف [۷] و کرامرز [۸] ، درست پیش از جنگ جهانی دوم، برمی گردد و آن عبارت است از تغییر دادن مقدار های مرجع به منظور حذف بینهایت، نوعی ترفند ریاضی است که انجام دادنش ظرافت فوق العاده ای می طلبد [۳] .

آنچه بیان شد تاریخچه ی مختصری از ایجاد باز بهنجارش بود. در واقع دلیل فعالیت های ما نیز بررسی بازبهنجارش در نظریه پیمانه ای $SU(N) \times U(۱)$ ابر تقارن $N = \frac{۱}{۲}$ در تقریب مرتبه ی اول است. اما از آنجا که این بررسی حجم گسترده ای از فعالیت را می طلبد و نیاز به محاسبات سنگین گسترده ای دارد. بر آن شدیم تا در قالب یک گروه کار را انجام دهیم. در نتیجه گام اول برای طی این مسیر، پایان نامه ای است که اینک در مقابل شما است.

---

[۲] Feynman Richard (1918-1988)

[۳] Schwinger Julian (1918-1994)

[۴] Tomonaga Sin-Itiro (1906-1979)

[۵] Dyson Freeman

[۶] renormalization

[۷] Weisskopf Victor

[۸] Kramers Hans

از میان بیش از نود نمودار پیش بینی شده توسط نمودارهای فاینمن برای نظریه، در این پایان نامه به محاسبه ی توابع سه نقطه ای و چهار نقطه ای با خطوط خارجی $(\bar{\lambda}\lambda)^2 + (\bar{\lambda}\bar{\lambda}AA)$ بسنده کرده ایم. برای رسیدن به این هدف ابتدا به بررسی دقیق لاگرانژی نظریه می پردازیم. به طوری که ثمره ی آن کسب عبارت های مربوط به راس ها درنمودارهای فاینمن مورد نظر شد. سپس با اعمال روابط ریاضی گسترده وبسیار پیچیده اقدام به حل توابع نمودیم.

این پایان نامه در سه فصل تنظیم گردید. فصل اول آن با نام ، آشنایی با نظریه ی پیمانه ای $SU(N) \times U(1)$ ابر تقارن $N = \frac{1}{2}$ در پی آن است که تا جای امکان، فارغ از روابط ریاضی پیچیده وطاقت فرسا به معرفی نظریه بپردازد و چشم انداز روشنی را درآغاز راه برای خواننده به وجود آورد. همچنین با تعاریفی ساده، فیزیک نظریه را برجسته نماید و نقشه ی راه را نمایان کند. تا دیگر در میان روابط ریاضی گسترده ی فصل های بعد دوچار سر درگمی نشویم. باید اقرار کرد که کاری بسیار دشوار بود زیرا اکثر منابع موجود این تعاریف را به وسیله ی ریاضیات پیچیده بیان نموده اند. با این حال آنچه در فصل اول دیده می شود در حد توان است نه آنچه شایسته.

فصل دوم به معرفی لاگرانژی نظریه می پردازد و با بازنمودن روابط ریاضی آن سعی در آموزش و بدست آوردن انتشارگرها و راس های مورد نیاز لاگرانژی نظریه دارد. نتیجه ی حاصله اطلاعات اولیه فصل بعد را فراهم می نماید.

در فصل نهایی به محاسبه ی نمودارهای فاینمن مورد نظر می پردازیم. با استفاده از قواعد فاینمن نمودارها را رسم، نامگذاری و با ارائه ریاضیات مناسب اقدام به حل آن می نماییم. به دلیل حجم بالای محاسبات تمام محاسبات ارائه نشده است. بلکه تنها اقدام به حل چند نمودار شاخص کرده، البته به صورت کامل و جامع تا برای دیگر نمودارها به ارائه ی پاسخ ها بسنده شود. در انتها نیز بسیاری از روابط ریاضی مورد نیاز در قالب ضمیمه به اثر افزوده شد.

همانطور که بیان شد این پایان نامه اولین گام در باز بهنجارپذیری نظریه ی مورد بحث را برمی دارد. امیدوارم این گام صحیح و استوار بر جایگاه خویش نهاده شده باشد تا با یاری ادامه دهندگان هرچه سریع تر و صحیح تر به سر منزل مقصود برسیم. انشا الله.

فصل ۱

آشنایی با نظریه پیمانه ای $SU(N) \times U(1)$ ابرتقارن $N = \frac{1}{2}$

۱.۱ تقارن

تقارن یکی از ویژگی های بنیادی طبیعت است. این امر باعث شده است که تمامی فعالیت های بشری نیز رنگ تقارن به خود بگیرد. در حقیقت تعجب آور است اگر بدانیم که بشر بدون هیچ بینش قوی از مسیرهای سیاره ای مشاهده شده، کشف کرد که میدان جاذبه خورشید بایستی دارای تقارن کروی باشد.

تا سال ۱۹۱۷ معانی ضمنی دینامیکی تقارن به طور کامل مشخص شده بود. در آن سال امی نودر [۱] ، قضیه ی مشهورش را در رابطه با تقارن و قانون های پایستگی منتشر کرد:

قضیه ی نودر [۲] **:** **قانون های پایستگی** $\longleftrightarrow$ **تقارن ها**

تقارن		قانون های پایستگی
انتقال زمانی	$\longleftrightarrow$	انرژی
انتقال مکانی	$\longleftrightarrow$	اندازه حرکت
انتقال زاویه ای	$\longleftrightarrow$	اندازه حرکت زاویه ای
تغییرات بار	$\longleftrightarrow$	بار

جدول ۱.۱: برخی ازتقارن ها و قوانین بقای مربوط به آنها

هر تقارن از طبیعت یک قانون بقاء (پایستگی) را به بار می آورد، و برعکس هر قانون بقاء نشانگر یک تقارن مشخص است [۴] .

[۱] Emmy Noether

[۲] NOETHER'S THEOREM : SYMMETRIES $\longleftrightarrow$ CONSERVATION LAWS

تقارن چیزی را توصیف می کند که پس از هر تبدیل تغییر نمی کند. برای مثال این مفهوم از تقارن را می توان برای هر شئی که در فضا جابجا شود و در آن تغییری رخ ندهد، تعمیم داد. در این جا با تقارن در انتقال، یا هم ارز آن، ناوردایی نسبت به انتقال، سرو کار داریم. در فیزیک تقارن را در دو سطح بررسی می کنیم، طبیعت متقارن است و قانون های فیزیک تقارن دارند.

هرگاه چارچوب مرجع، مقیاس یا تراز دستگاهی عوض شود و این دستگاه بدون تغییر بماند، تقارن خاصی پدیدار می شود. بدینسان، هر گاه شیئی جایش را عوض کند، یا دستگاه یکاهای اندازه گیری تغییر کند و یا حتی هنگام اندازه گیری مبدا درجه بندی را تغییر دهند، طول شیء ثابت می ماند. این تقارن که بر عمل « پیمانه کردن » یا اندازه گیری، تکیه دارد « تقارن پیمانه ای » یا ناوردایی پیمانه ای [۳] نامیده می شود [۳] .

۲.۱ ابرتقارن

مدل استاندارد در طول چند دهه به صورت نظری و تجربی مورد مطالعه بسیار قرار گرفته و گسترش وسیعی یافته است. به طور نظری این مدل براساس اصول پیمانه ای بنا نهاده شده است.

موفقیت های مدل استاندارد قابل تحسین است. پیش بینی های این مدل در بسیاری از آزمایش ها چک شده و نتایج دقیقی به دست آمده است. همچنین تمام ذرات موجود در مدل استاندارد بجز بوزون هیگز [۴] ، به صورت تجربی مشاهده شده اند. با این وجود در این مدل با چند مشکل برای توصیف وقایع، در فیزیک انرژی های بالا مواجه هستیم. از آن جمله می توان مشکل زیاد بودن درجات آزادی موجود در نظریه و نیز وجود مسئله ی سلسله مراتب [۵] را نام برد [۵] [۶] .

سوالات بی پاسخ دیگری نیز وجود دارد که انگیزه یافتن پاسخی برای آنها ما را به سوی مدل های فراسوی مدل استاندارد سوق می دهد. ابرتقارن [۶] یکی از این مدل ها است که می تواند پاسخ گوی مناسبی برای حل این مشکلات باشد.

ایده اساسی پیدایش ابر تقارن به عنوان یک چارچوب جدید در فیزیک ذرات بنیادی مسئله وحدت [۷] میان تمام نیروهای طبیعت است. در کنار آن پاسخ گویی به چالش های پیش روی مدل استاندارد نیز از وظایفی است که بر دوش آن نهاده اند.

تقارن یک مفهوم بسیار اساسی در ساختار نظریه ها است. پس یک راه طبیعی برای توسعه مدل استاندارد توسعه تقارن های موجود در این نظریه است [۷] [۲۳] .

ابرتقارن دو دسته ذره، بوزون ها و فرمیون ها را که تاکنون از بنیاد متفاوت فرض می شدند، چراکه

[۳] Gauge invariance

[۴] Higgs Boson

[۵] Hierarchy problem

[۶] Supersymmetry (SUSY)

[۷] Unification problem

اندازه ی اسپین شان آنها را از همدیگر متمایز می سازد [۸] ، با یکدیگر ارتباط می دهد. چنانکه می دانیم فرمیون ها از اصل پائولی پیروی می کنند و قادر به اشغال حالت کوانتومی یکسان نیستند، در حالی که بوزون ها می توانند به تعداد زیاد در حالت کوانتمی یکسان باشند [۳] .

بنابه تعریف **ابرتقارن عملیاتی است که بوزون ها را به فرمیون ها تبدیل می کند، و برعکس** ،این تبدیلات ابر تقارن توسط عملگر اسپینوری Q صورت می گیرد. عملگر کاهش ناپذیر Q را اینگونه معرفی می کنیم.

$$\mathbf{Q} \mid \mathbf{boson}\rangle \quad =\mid \mathbf{fermion}\rangle \qquad \mathbf{Q} \mid \mathbf{fermion}\rangle \quad =\mid \mathbf{boson}\rangle$$

که $\mid fermion\rangle$ نماد ویژه حالت فرمیونی و $\mid boson\rangle$ نماد ویژه حالت بوزونی است.

اگر ابرتقارن واقعا وجود داشته باشد با اثر عملگر Q روی هر حالت فیزیکی حالت فیزیکی جدیدی حاصل می شود. این عملگر کمیت هایی نظیر بار الکتریکی، جرم، تکانه و انرژی را بدون تغییر باقی می گذارد و فقط اسپین حالت اولیه را به اندازه ی $\frac{1}{2}$ واحد تغییر می دهد. اگر این عملیات را دو بار انجام دهیم، هم ارز این است که پاره ای تبدیلات هندسی ابتدایی، برای مثال انتقالی در فضا، انجام داده ایم. بدین سبب، گراویتون نمی تواند تنها وجود داشته باشد. باید با یک خانواده ی دیگر ذرات با اسپین های مختلف، بویژه با ذرات دارای اسپین $\frac{3}{2}$ که به **گراویتینوها** معروفند، زندگی کنند. این خانواده در واقع خیلی پرجمعیت است. اگر بشود ذرات شناخته شده، لپتون ها، کوارک ها و بوزون ها را در این خانواده جا داد ابر تقارن می تواند به همه ی فیزیک وحدت ببخشد. دراین صورت ذرات پیام رسانی ظاهر می شوند که می توانند برهمکنش های الکترومغناطیسی، ضعیف و قوی را توصیف کنند. **فوتینوها** [۹] برهمکنش های الکترومغناطیسی را شرح می دهند. **وینوها** [۱۰] و **زینو ها** [۱۱] به همراه بوزون ها یW و Z برهمکنش ضعیف را کامل می کنند و **گلوینوها** [۱۲] به گلوئون های برهمکنش قوی افزوده می شوند. سودمندی این رویکرد در این است که اجازه می دهد بینهایت های منفی پیدا شوند و بینهایت های مثبت را خنثی کنند [۳] [۲۳] [۲۴] .

پل دیویس می گوید : با پذیرفتن ابر تقارن بینهایت ها به سوی مرگ کشیده می شوند.

۳.۱ جبر ابر تقارن

هر تبدیل در فیزیک ذرات روابط جبری مخصوص به خود دارد. در مورد ابر تقارنی نیز جبر حاکم، به جبر ابر تقارن معروف است. در واقع مولد هایی که بر روی میدان ها اثر می کنند ابر بارهای Q و $\bar{Q}$ می باشند. این دو عملگر در واقع همیوغ مختلط هستند.

[۸] فرمیون ها دارای اسپین نیمه صحیح و بوزون ها دارای اسپین صحیح می باشند.

[۹] photino

[۱۰] wino

[۱۱] zino

[۱۲] gluino

در این بخش قصد داریم به مبانی نظریه ی ابرتقارن بپردازیم. در جبر ابرتقارنی علاوه بر جابجاگرها حضور پاد جابجاگرها را داریم. می توان ساختار کلی زیر را برای مولدهای بوزونی و فرمیونی در نظر گرفت:

$$[B,B]=B \qquad , \qquad [B,F]=F \qquad , \qquad \{F,F\}=B$$

با ترکیبی از جبر پوانکاره به همراه تقارن های داخلی موجود در ابرتقارن می توانیم، ابر تقارن را ساختار بندی نماییم. در ساده ترین حالت ابر تقارنی یعنی $N=۱$ دارای یک جفت از اسپینورهای ($Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot\alpha}$) هستیم. جبر بین عناصر به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
&[Q_\alpha,P_\mu]=[\bar{Q}_{\dot\alpha},P_\mu]=\circ\\
&[\bar{Q}_{\dot\alpha},M_{\mu\nu}]=-\tfrac{۱}{۲}\bar{Q}_{\dot\beta}(\sigma_{\mu\nu})^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \qquad , \qquad [Q_\alpha,M_{\mu\nu}]=\tfrac{۱}{۲}(\sigma_{\mu\nu})^{\beta}_{\alpha}Q_\beta\\
&\{Q_\alpha,Q_\beta\}=\{\bar{Q}_{\dot\alpha},\bar{Q}_{\dot\beta}\}=\circ\\
&[Q_\alpha,R^\alpha]=[\bar{Q}_{\dot\alpha},R^\alpha]=\circ
\end{aligned} \qquad (۱.۱)$$

R^α مولد های داخلی ابرتقارن می باشد و P_μ و $M_{\mu\nu}$ به ترتیب چهار بردار اندازه حرکت خطی و عملگر اندازه حرکت زاویه ای است. α و β اندیس های اسپینوری می باشند. حالت یک تک ذره را در نظریه ابرتقارن بوسیله یک حالت کاهش ناپذیر در جبر ابرتقارنی که ابرچندگانه [۱۳] نامیده می شود، بیان می کنیم. هر ابرچندگانه شامل هر دو حالت فرمیونی و بوزونی می باشد که به صورت مرسوم ابرشریک [۱۴] یکدیگر نامیده می شوند؛ از طرف دیگر می دانیم عملگرهای Q و $\bar{Q}$ با عملگر $P^۲$ و با مولدهای گروه پیمانه ای جابجا می شوند لذا ذراتی که در یک ابرچندگانه قرار می گیرند باید نمایشی یکسان از گروه پیمانه ای داشته باشند و بنابراین دارای بار الکتریکی، ایزواسپین ضعیف و رنگ یکسانی باشند.

۱.۳.۱ اسپینورهای وایل و مایورانا

اسپینور Ψ دیراک توسط معادله دیراک به صورت زیر تعریف می شود:

$$((i\partial_\mu-eA_\mu)\gamma^\mu-m)\Psi=\circ \qquad (۲.۱)$$

که در آن γ^μ توسط رابطه پادجابجاگری $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=۲\eta_{\mu\nu}$ توصیف می شود. $\eta_{\mu\nu}$ تانسور متریک در نسبیت خاص می باشد. در بیان دیراک که مناسب برای کار در حیطه انرژی نسبیتی می باشد، ماتریس های γ به شکل زیر هستند:

$$\gamma^\circ=\begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{pmatrix} \qquad , \qquad \gamma^i=\begin{pmatrix} \circ & \sigma_i \\ -\sigma_i & \circ \end{pmatrix} \qquad (۳.۱)$$

[۱۳] Supermultiplet

[۱۴] Superpartner

که $i = ۱,۲,۳$ و σ_i ماتریس های پائولی می باشند. توصیف دیگر از معادله دیراک بیان وایل [۱۵] یا کایرال [۱۶] است. این بیان مناسب برای حیطه انرژی های بسیار بالای نسبیتی است. در توصیف کایرال ماتریس های γ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\gamma_W^\mu = \begin{pmatrix} ۰ & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & ۰ \end{pmatrix} \tag{۴.۱}$$

که $\sigma^\mu = (۱,\vec{\sigma})$ و $i = ۱,۲,۳$ و $\bar{\sigma}^i = -\sigma^i$ و $\bar{\sigma}^۰ = -\sigma^۰$ ، براساس این توصیف از ماتریس های γ

در بیان کایرال می توانیم یک اسپینور را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \tag{۵.۱}$$

توابع موج ۲ بعدی ϕ و $\bar{\psi}$ به ترتیب اسپینورهای چپ گرد و راست گرد وایل یا کایرال نامیده می شوند.

اسپینورهای چپ گرد وایل توسط اندیس های بدون نقطه مشخص می شوند در حالی که اسپینورهای راست گرد توسط اندیس های نقطه دار به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_۱ \\ \phi_۲ \end{pmatrix} = (\phi_A) \qquad , \qquad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{i} \\ \bar{\psi}^{\dot{۲}} = (\bar{\psi}^{\dot{A}}) \end{pmatrix} \tag{۶.۱}$$

اندیس ها را می توان توسط ماتریس هایی که به صورت زیر تعریف می شود بالا و پایین برد.

$$\epsilon = (\epsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = (\epsilon^{AB})^{-۱} \tag{۷.۱}$$

و

$$\bar{\epsilon} = (\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} = (\epsilon^{\dot{A}\dot{B}})^{-۱} \tag{۸.۱}$$

می دانیم معادله دیراک تحت تاثیر عملگر الحاقی بار(C) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$((i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m)\Psi^C = ۰ \tag{۹.۱}$$

[۱۵] Weyl
[۱۶] Chiral

مفهوم عملگر الحاقی به صورت تبدیل کردن یک ذره به پاد ذره اش و بالعکس تعبیر می شود. تاثیر عملگر الحاقی روی اسپینور ψ به صورت زیر است:

$$\Psi \xrightarrow{C} \Psi^C = C\bar{\Psi}^\top \qquad (۱۰.۱)$$

که در آن $C = i\gamma^۲\gamma^\circ$ و $\Psi = \Psi^\dagger\gamma^\circ$ یک اسپینور مایورانا [۱۷] در حقیقت یک اسپینور دیراک می باشد.

اما در نمایش مایورانا، خود اسپینور با الحاقی بار همان اسپینور، یکسان است به عبارت دیگر خودش پاد ذره خودش است.

$$\Psi_M = C\Psi_C^M \qquad (۱۱.۱)$$

در توصیف وایل عملگر الحاقی بار، اسپینور را به صورت زیر تبدیل می کند.

$$\bar{\Psi}_W = \Psi_W^\dagger\gamma_W^\circ = (\phi^{A*}, \bar{\psi}^*_{\dot{A}})\begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{pmatrix} = (\bar{\psi}^*_{\dot{A}}, \phi^{A*}) = (\psi^A, \bar{\phi}_{\dot{A}})$$

همچنین داریم :

$$\begin{aligned}(\Psi_W^C)_A &= \begin{pmatrix} \phi_C^A \\ \bar{\psi}^{C\dot{A}} \end{pmatrix} = C_w\bar{\Psi}_W^\top \\ &= \begin{pmatrix} (i\sigma^۲\bar{\sigma}^\circ)_A^{\ B} & \circ \\ \circ & (i\bar{\sigma}^۲\sigma^\circ)^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_B \\ \bar{\phi}^{\dot{B}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (i\sigma^۲\bar{\sigma}^\circ)_A^{\ B}\psi_B \\ (i\bar{\sigma}^۲\sigma^\circ)_{\dot{A}}^{\ \dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

اما

$$(i\sigma^۲\bar{\sigma}^\circ)^{AB} = \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ -۱ & \circ \end{pmatrix}^{AB} = (\epsilon^{AB})$$

$$(i\bar{\sigma}^۲\sigma^\circ)_{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ -۱ & \circ \end{pmatrix}_{\dot{A}\dot{B}} = (\epsilon^{\dot{A}\dot{B}})$$

از طرف دیگر داریم :

$$(i\sigma^۲\bar{\sigma}^\circ)_A^{\ B} = \epsilon_{AC}(i\sigma^۲\bar{\sigma}^\circ)_{CB} = \epsilon_{AC}\epsilon^{CB} = \delta_A^B$$

[۱۷] Majorana