وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

گراف‌های فولرن اکسترمال

توسط:

هاجر حقیقت پیشه

استاد راهنما:

دکتر بهزاد صالحیان متی‌کلایی

استاد مشاور:

دکتر مصطفی زارع خورمیزی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

گراف‌های فولرن اکسترمال

توسط:

هاجر حقیقت پیشه

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر مصطفی زارع خورمیزی استادیار ریاضی محض گرایش منطق ریاضی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس استادیار ریاضی کاربردی گرایش علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی شاهرود (داور اول)

دکتر حنیف حیدری استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

تقدیم قطره ای آب به دریا و شراره ی یک شمع به خورشید، پیش از آنکه گویای سپاس و قدردانی باشد، مایه ی شرمندگی است. خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه ی درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه ی آن ها شاخ و برگ گیرم و از سایه ی وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه ی هستی ام بوده اند. دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند، آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.........

تقدیم به **برادران و خواهران عزیزم** ؛

سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می تپد.
الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.
اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته ام لازم می دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده اند، تشکر نمایم.

وظیفه خود می دانم از پدر و مادر عزیزم به عنوان اولین و بهترین آموزگارانم، سپاسگزاری و قدردانی نمایم.
بر خود واجب می دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر مصطفی زارع خورمیزی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.
از اساتید ارجمند مدعو، جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف و جناب آقای دکتر حنیف حیدری که در جلسه ی دفاع حضور یافتند و مرا از نظراتشان بهره مند ساختند، سپاسگزارم.

جا دارد از پروفسور $Dongye$ استاد ریاضی دانشگاه ویرجینیای غربی که در مکاتبات خصوصی بسیار کمک کردند، سپاسگزاری نمایم.
از تمامی اساتیدی که در طول این مدت افتخار شاگردیشان را داشتم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در نهایت

سپاس و تشکر خود را تقدیم دوستان مهربانم می کنم که مرا در سختی ها تنها نگذاشتند و همواره در کنارم بودند.

هاجر حقیقت پیشه
شهریور ماه ۹۱

چکیده

گراف‌های فولرن اکسترمال

به وسیله‌ی:
هاجر حقیقت پیشه

مجموعه‌ی $\mathcal{H}$ از شش‌ضلعی‌های دوبه دو متمایز F_n را الگوی شش گانه می‌گویند، اگر F_n یک جورسازی تام (که در شیمی به آن ساختارهای ککوله [1] می‌گویند) داشته باشد، به طوری‌که هر شش‌ضلعی به تناوب در مجموعه‌ی $\mathcal{H}$ باشد. بزرگترین اندازه‌ی الگوهای شش گانه F_n را عدد کلر می‌گویند که اندازه‌ی عدد کلر F_n، بیش‌تر از $\lfloor (n-12)/6 \rfloor$ نیست. در این پایان نامه، کمیت فوق را برای گراف‌های فولرن بررسی می‌کنیم. گراف فولرن یک گراف مسطح ۳-همبند و ۳-منتظم است که دقیقا ۱۲ وجه پنج‌ضلعی داشته و بقیه‌ی وجه‌هایش از شش‌ضلعی‌ها تشکیل شده است. از دیدگاه شیمی، گراف‌های فولرن، گراف‌های مولکولی هستند. به عنوان مثال مولکول C_{60}، C_{70} دو عضو معروف این گروه هستند که به این کران بالا دست می‌یابند. در این پایان نامه، گراف‌های فولرن اکسترمالی را بررسی می‌کنیم که عدد کلر آن‌ها ماکزیمم مقدارشان را می‌گیرند، سپس نشان می‌دهیم که به طور دقیق ۱۸ گراف فولرن متمایز با ۶۰ راس وجود دارند که ماکزیمم عدد کلر آن‌ها ۸ است.

واژه‌های کلیدی: گراف فولرن، عدد کلر، جورسازی تام، الگوی شش گانه، C_{60}

[1] Kekulé structure

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

گراف فولرن، گراف مسطح مکعبی و ۳-همبند است که به طور دقیق ۱۲ وجه پنج‌ضلعی دارد و بقیه‌ی وجه هایش شش‌ضلعی اند. از دیدگاه شیمی، فولرن یک مولکول شکل یافته‌ی کروی است که از اتم‌های کربن تشکیل می‌شود، به طوری‌که هر حلقه‌ی کربن یا یک پنج‌ضلعی بوده یا به صورت یک شش‌ضلعی است و هر اتم کربن با دقیقاً ۳ اتم کربن دیگر پیوند دارد. فرض کنید F_n گراف فولرن با n راس باشد. به ازای هر $n \geq ۲۰$ کربن، که n عددی زوج است، به غیر از $n = ۲۲$ می‌توان فولرن ساخت [۳، ۹]. برای n کوچک، یک شمارش بازسازی از ایزومرهای فولرن با n راس داده شده است [۳]. برای مثال، ۱۸۱۲ گراف فولرن متمایز با ۶۰ راس وجود دارد. مولکول مشهور $C_{۶۰}$، یکی از فولرن‌هایی است که توسط کروت [۲] و همکارانش در سال ۱۹۸۵ کشف شده است [۱۷]. فرض کنید F گراف فولرن باشد. یک جورسازی تام (ساختارهای ککوله [۳] در شیمی) F، مجموعه‌ی M از یال‌های مستقل است که هر راس F با یک یال در M تلاقی داشته باشد. یک دور F، M-متناوب است، اگر یال‌هایش به تناوب در M و $E \setminus M$ باشد.

مجموعه‌ی $\mathcal{H}$ ازشش ضلعی‌های دو به دو متمایز ، الگوی۶-گانه نام دارد، اگر F جورسازی تام M داشته باشد، به طوری‌که هر شش‌ضلعی در $\mathcal{H}$، M متناوب باشد. به طور هم ارز، حذف شش‌ضلعی‌های در $\mathcal{H}$ با یال‌های برخورد کننده اش یک زیرگراف F با جورسازی تام را نتیجه دهد. ماکسیمم الگوی شش گانه، فرمول کلر نامیده می‌شود. اندازه‌ی فرمول کلر، عدد کلر F نام دارد و آن‌را با نماد $c(F_n)$ نشان می‌دهند.

در مدل کلر [۴]، فرمول کلر توسط دورهایی درون شش‌ضلعی‌ها نشان داده می‌شود. شکل ۰-۱ یک

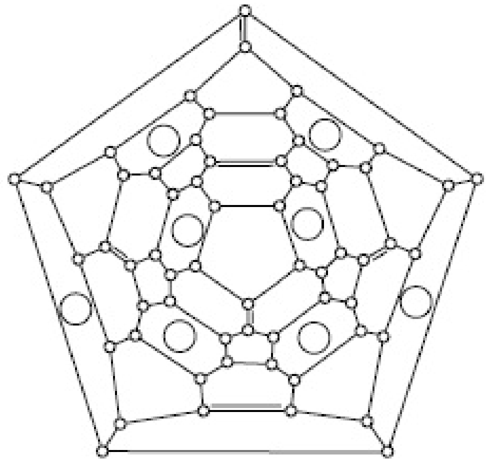
---

[۲] Kroto

[۳] Kekulé structure

[۴] Clar Model

فرمول کلر $C_{۶۰}$ را نشان می‌دهد. در ابتدا عدد کلر برای سیستم بنزنوئید تعریف شده بود که به قضیه‌ی



شکل ۰-۱: یک فرمول کلر $C_{۶۰}$

شش گانه‌ی کلر و به مدل دوری حدس زده‌ی راندیک [5] بستگی داشت [۲۰]. عدد کلردر اندازه گیری پایداری مولکول هیدروکربن‌های بنزنوئید موثر است . برای دو هیدروکربن بنزنوئید، یکی با عدد کلر بالاتر پایداری بیش‌تر نشان داده شده است. عدد کلر هیدروکربن‌های بنزنوئید در بسیاری مقالات [۱۳، ۱۴، ۱۶، ۲۶، ۲۳، ۲۴، ۲۵] پیشنهاد و محاسبه شده است. هانسن [6] و ژنگ [7] در [۱۴] یک برنامه‌ی خطی صحیح را معرفی کردند که عدد کلر هیدروکربن‌های بنزنوئید را محاسبه می‌کند [۹، ۳].

تاکنون روش موثر برای محاسبه‌ی عدد کلر گراف‌های فولرن وجود نداشت . چند جمله ای کلر و چند جمله ای ۶-گانه $C_{۶۰}$ به‌ترتیب برای شمارش ساختارهای کلر و الگوهای ۶-گانه محاسبه شده بود [۲۱]. این نتیجه می‌دهد که $C_{۶۰}$ فرمول کلر ۵ و عدد کلر ۸ دارد. دانگ یه [8] از طریق مکاتبه‌ی خصوصی با نویسنده‌ی مقاله، دلیل فرمول کلر ۵ را این‌چنین بیان کرد که از گروه تقارنی به‌دست می‌آید. اگر $C_{۶۰}$ را هر بار ۷۲ درجه دوران دهید، نتیجه حاصل می‌شود. برای اطلاعات بیش‌تر به [۸] مراجعه کنید.

علاوه بر این، $C_{۶۰}$ ساختار فرایز [9] دارد [۱۱]. یعنی یک ساختار ککوله $C_{۶۰}$ که از پیوندهای دوگانه در پنج‌ضلعی دوری می‌کند و بیش‌ترین تعداد شش‌ضلعی‌های تشدید کننده را دارد $(n/۳)$. گراف‌های

[5] Randic

[6] Hansen

[7] Zheng

[8] Dong Ye

[9] Fries

فولرن با ساختار فرایز هم ارز فولرن‌های لیپ فروگ [۱۰] یا فولرن‌های نوع کلر هستند [۱۸، ۱۰].
نویسنده‌های زیادی نشان دادند که عدد کلر گراف‌های فولرن بیش‌تر از $\frac{n-۱۲}{۶}$ نیست [۲۷]، که این تساوی برای نامتناهی گراف‌های فولرن شامل $C_{۶۰}$ و $C_{۷۰}$ برقرار است.
گراف فولرن F_n اکسترمال است، اگر عدد کلر آن $c(F_n) = \frac{n-۱۲}{۶}$ باشد.
این پایان نامه در ۴ فصل تنظیم شده است.

- فصل اول مفاهیم و قضایای مقدماتی از نظریه‌ی گراف را بیان می‌کنیم که در فصل‌های دیگر مورد نیاز است.

- در فصل دوم به منظور آشنایی بیش‌تر با گراف‌های فولرن ، ابتدا مقدمه‌ای بر فولرن‌ها را بیان می‌کنیم و سپس تعدادی از کاربردهای فولرن را ذکر می‌کنیم و در آخر، به بررسی مفاهیم همبندی در گراف می‌پردازیم.

- در فصل سوم ابتدا تعاریف مقدماتی درباره‌ی عدد کلر را بیان می‌کنیم و بعد یک کران بالا برای عدد کلر گراف‌های فولرن را معرفی می‌کنیم و در قسمت آخر ۲ مساله‌ی باز در مورد عدد کلر فولرن‌ها را مطرح می‌کنیم. این فصل‌ها پیش نیاز فصل بعدی خواهند بود.

- فصل چهارم که قسمت اصلی این پایان نامه را تشکیل می‌دهد. ابتدا گراف‌های فولرن اکسترمال با حداقل ۶۰ راس را مشخص می‌کنیم و سپس متناظر با این ویژگی، همه‌ی ۱۸ تا گراف فولرن اکسترمال با ۶۰ راس که شامل $C_{۶۰}$ است را بازسازی می‌کنیم.

نتایج این کار می‌تواند به خوبی نشان دهد که ترکیب عدد کلر و شمارش ککوله در پایداری $C_{۶۰}$ مؤثر است.

[۱۰] Leapfrog

فصل ۱

مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است می‌پردازیم، این فصل شامل ۳ بخش است، در بخش اول مفاهیم اساسی در مورد گراف و همبندی گراف‌ها را بیان می‌کنیم، در بخش دوم اعمال روی گراف‌ها را ارائه می‌دهیم. در بخش سوم به تعاریف و قضیه‌های مربوط به جورسازی می‌پردازیم و در بخش چهارم مفاهیم و ویژگی‌های مقدماتی گراف‌های مسطح را بیان می‌کنیم.

۱-۱ تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی در مورد گراف و همبندی گراف‌ها

تعریف ۱.۱.۱. گراف G، متشکل از سه تایی مرتب چون $(V(G), E(G), I_G)$ ، که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی، $E(G)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(G)$ ، و I_G یک نگاشت وقوع است، که به هر عضو $E(G)$ یک زوج نامرتب (یکسان یا متمایز) از $V(G)$ نظیر می‌کند. عناصر $V(G)$ را راس‌ها (یا گره‌ها یا نقاط) G ، و عناصر $E(G)$ را یال‌ها (خطوط) G نامیم. اگر برای یال e از G داشته باشیم $I_G(e) = u, v$ ، می‌نویسیم $I_G(e) = uv$.

تعداد رأس‌های G را با n و تعداد یال‌های G را با m نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. دو رأس انتهایی یک یال، رأس‌های هم‌وقوع با آن یال نامیده می‌شوند و دو رأسی را که هم‌وقوع با یک یال مشترک هستند، رأس‌های هم‌جوار یا مجاور می‌گویند و همین طور دو یالی که هم‌وقوع با یک رأس مشترک می‌باشند، دو یال مجاور نامیده می‌شوند. دو یالی که هم‌وقوع با هیچ

رأس مشترکی نیستند، یال‌های مستقل نامیده می‌شوند. دو رأس مجاور مجزا، دو رأس همسایه نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی رأس‌های همسایه‌ی v، با نماد $\mathrm{N_G(v)}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. یک یال با نقاط ابتدا و انتهای مساوی را طوقه و یال با نقاط انتهایی مجزا را پیوند می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱. گراف بدون طوقه و یال‌های موازی گراف ساده نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. دو گراف G و H یکسان اند و می‌نویسیم $G = H$، هرگاه $V(G) = V(H)$ و $E(G) = E(H)$. اگر دو گراف یکسان باشند ساختار و شکل یکسانی دارند. ولی ممکن است دو گراف یکسان نباشند، ولی ساختار یکسانی داشته باشند، در این حالت دو گراف رایکریخت می نامیم. به بیان دقیق تر ، دو گراف G و H یک‌ریخت هستند، اگر تابع دوسوئی $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ وجود داشته باشد به‌طوری که اگر $uv \in E(G)$ آن‌گاه $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$ و بالعکس. به تابع دوسوئی ϕ یک یک‌ریختی بین دو گراف گفته می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. یک خودریختی گراف، یک یک‌ریختی از گراف به خودش است. به عبارتی خودریختی، یک جایگشت مثل α روی مجموعه راس‌های گراف است، به طوری که همسایگی را حفظ کند. یعنی اگر uv یالی از گراف باشد $\alpha(u)\alpha(v)$ نیز یالی از گراف باشد.

ملاحظه ۷.۱.۱. تقارن گراف توسط گروه خودریختی شرح داده می‌شود. خودریختی‌های یک گراف در واقع نظم موجود در گراف رانشان می‌دهند. اگر راس u توسط یک خودریختی به راس v برود، آن‌گاه این دو راس در حقیقت دارای جایگاه یکسانی در ساختار گراف هستند.

تعریف ۸.۱.۱. گراف H زیرگراف G است و می‌نویسیم $H \leq G$، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد و ψ_H تحدید ψ_G به $E(H)$ باشد. وقتی که $H \leq G$ است ولی $H \neq G$ ، می‌نویسیم $H < G$ و H را زیرگراف سره‌ی G می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. H زیرگراف فراگیر G است، هرگاه شامل همه‌ی رأس‌های گراف G باشد. یعنی در واقع داشته باشیم $V(H) = V(G)$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم که V' زیرمجموعه‌ی ناتهی V باشد، زیرگراف G را که مجموعه‌ی رأس‌هایش، V' و مجموعه‌ی یال‌هایش، مجموعه‌ای از آن یال‌های G است که هر دو انتهایشان در V' است زیرگراف G القاء شده به وسیله‌ی V' می‌نامند و با نماد $G[V']$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم که E' زیرمجموعه‌ی ناتهی از E باشد، زیرگراف G را که مجموعه‌ی رأس‌هایش، مجموعه‌ای از ۲ انتهای یال‌ها در E' و مجموعه‌ی یال‌هایش، مجموعه‌ی E' است زیرگراف Gی القایی به وسیله‌ی E' می‌نامند و آن را با نماد $G[E']$ نمایش می‌دهند. در واقع $G[E']$ زیرگراف یال-القایی G می‌باشد.

حذف راس‌ها و یال‌ها در یک گراف:

فرض کنید G یک گراف، S زیرمجموعه‌ی سره ای از V ، و E' زیر مجموعه‌ای از E باشد. زیرگراف $G[V-S]$ را یک زیرگراف حاصل از G با حذف S می‌نامیم. این زیرگراف را با $G-S$ نشان می‌دهیم. اگر $S=\{v\}$ باشد گراف $G-S$ را با $G-v$ نشان می‌دهیم.
زیر گراف فراگیر G با مجموعه‌ی یال $E \setminus E'$ را زیرگراف حاصل از G با حذف مجموعه یال E' نامیم. این زیر گراف را با $G-E'$ نشان می دهیم. اگر $E'=\{e\}$ باشد گراف $G-E'$ را با $G-e$ نشان می دهیم. توجه کنید که با حذف یک راس همه‌ی یال های مجاور آن نیز حذف می‌شوند، در حالی که حذف یک یال تاثیری بر راس‌های G ندارد.

تعریف ۱.۱.۱۲. درجه‌ی رأس v در گراف G که با نماد $\mathrm{d_G(v)}$ نمایش داده می‌شود، تعداد یال‌های گراف G است که رأس v بر آن‌ها واقع شده است. کم‌ترین و بیش‌ترین درجه‌ی رأس‌های G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$، نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۳. گراف G، $k-$منتظم است، هرگاه درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن k باشد و گراف منتظم، گرافی است که به ازاء kیی، منتظم باشد. هر گراف تهی ، منتظم از درجه‌ی صفر و هر گراف کامل K_n ، منتظم از درجه‌ی $n-۱$ است. گراف ۳-منتظم را گراف مکعبی می‌نامند.

همچنین اگر G، n راس داشته باشد و منتظم از درجه‌ی k باشد، آن‌گاه G دارای $(rn)/۲$ یال است.

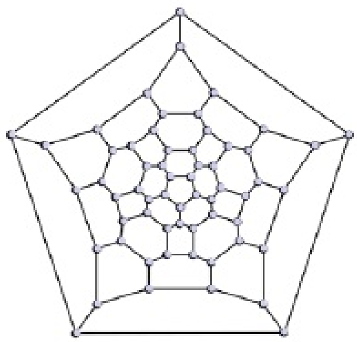
در میان گراف‌های منتظم، گراف‌های موسوم به افلاطونی، مورد توجه خاص اند.

تعریف ۱.۱.۱۴. به هر چند وجهی که همه‌ی وجه‌های آن دو به دو بر هم منطبق شوند یک چند وجهی منتظم گوییم. مثلا مکعب یک شش وجهی منتظم می‌باشد. یونانی‌های باستان از وجود پنج، چند وجهی منتظم مطلع بودند و آن‌ها را اجسام افلاطونی یا چند وجهی‌های افلاطونی می‌نامیدند. این پنج چند وجهی عبارتند :

چهاروجهی منتظم، شش وجهی منتظم ، هشت وجهی منتظم ، دوازده وجهی منتظم و بیست وجهی منتظم. اکنون فرض کنید بخواهیم تصویر هر یک از اجسام را روی صفحه بکشیم. تصاویر به وجود آمده را نمودار شله‌گل [1] می‌نامیم.

فولرن‌ها دارای انواع مختلفی هستند، اما مهم‌ترین آن‌ها، فولرن‌هایی هستند که وجوه آن‌ها از پنج و شش ضلعی ساخته می شوند. ما نیز در این پایان نامه فقط این‌گونه فولرن‌ها با ۶۰ راس را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. یک گراف فولرن، گرافی مسطح، ۳-منتظم و ۳- همبند است که ۱۲ وجه آن پنج‌ضلعی و بقیه‌ی وجوه آن شش‌ضلعی هستند. گراف فولرن n راسی را با F_n نشان میدهیم. در شکل ۱-۱ می‌توانید گراف فولرن C_{60} را مشاهده کنید.



شکل ۱-۱: گراف فولرن با ۶۰راس

تعریف ۱.۱.۱۶. گراف دوبخشی، گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن را می‌توان به دو بخش مانند X و Y افراز کرد، به طوری که هر یال این گراف، یک سرش در بخش X و سر دیگر آن در بخش Y قرار داشته باشد.

قضیه ۱.۱.۱۷. [۲] *برای هر گراف G ، اگر m ، نمایش تعداد یال‌ها باشد، داریم:*

$$\sum_{v\in V(G)} \mathrm{d(v)} = 2m$$

[1] Schlegel diagram

۱–۲ اعمال روی گراف ها

در این بخش تعدادی از روش‌های تولید گراف‌های جدید از دو گراف داده شده را ارائه می‌دهیم. فرض کنید $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ دو گراف ساده باشند.

تعریف ۱.۲.۱. گراف $G = (V, E)$ که در آن $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2$ را اجتماع G_1 و G_2 نامیم و با $G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهیم.

هنگامی که مجموعه راس‌های G_1 و G_2 مجزا باشند، $G_1 \cup G_2$ را با $G_1 + G_2$ نشان می‌دهیم و آن را مجموع دو گراف G_1 و G_2 نامیم. اجتماع متناهی از گراف‌ها را با استفاده از شرکت‌پذیری تعریف می کنیم؛ به ویژه اگر $G_1, G_2, \ldots, G_r$ گراف‌هایی با مجموعه‌ی راس‌های دو به دو مجزا باشند، که هر کدام با G یک‌ریخت هستند، آن‌گاه $G_1 + G_2 + \ldots + G_r$ را با rG نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. اگر $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ ، آن‌گاه گراف $G = (V, E)$ ، که در آن $V = V_1 \cap V_2$ و $E = E_1 \cap E_2$ ، را اشتراک گراف‌های G_1 و G_2 نامیم و آن را با $G_1 \cap G_2$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید G_1 و G_2 گراف‌هایی با مجموعه‌ی راس‌های مجزا باشند. در این‌صورت پیوند $G_1 \vee G_2$ ، از G_1 و G_2 عبارت است از زبرگراف $G_1 + G_2$ به‌طوری که هر راس G_1 با هر راس G_2 مجاور باشد.

تعریف ۴.۲.۱. یک گشت یا راه در گراف G، دنباله‌ی ناتهی به صورت $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ است که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند، به قسمی که برای $1 \leq i \leq k$، دو انتهای یال e_i، رأس‌های v_{i-1} و v_i هستند. در یک گشت، لزومی ندارد که یال‌ها، متمایز باشند، بنابراین رأس‌ها نیز ممکن است متمایز نباشند. عدد صحیح k، طول W می‌باشد. در گراف ساده‌ی G یک گشت را به صورت دنباله‌ای از رأس‌های مجاور می‌نویسیم.

تعریف ۵.۲.۱. اگر یال‌های $e_1, e_2, \ldots, e_k$ در گشت W مجزا باشند، در این صورت گشت W را یک گذر می‌نامند. با وجود متمایز بودن یال‌ها، به دلیل امکان وجود یال‌های موازی در گراف G ، ممکن است رأس‌ها متمایز نباشند. تعداد یال‌ها، طول W را مشخص می‌کنند.

تعریف ۶.۲.۱. اگر در گشت W، علاوه بر یال‌ها، رأس‌های $v_0, v_1, \ldots, v_k$، مجزا باشند W را یک مسیر می‌نامند. بنابراین در گراف ساده‌ی G، یک مسیر به صورت دنباله‌ای از رأس‌های دو به دو متمایز نوشته می‌شوند، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، در گراف G، مجاور هستند. طول یک مسیر، تعداد یال‌های آن مسیر است. یک مسیر به طول k را یک $k-$مسیر می‌نامیم.