بسم الله الرحمن الرحیم

١٠٤٧٨٥

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان:

C- نیم گروه ها، C- نیم گروه های موضعی و مسأله کوشی مجرد

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

استاد راهنما :

دکتر محمد جانفدا

۱۳۸۷ /۱۰/ - ۵

استاد مشاور:

دکتر علی اکبر عارفی جمال

نگارش :

وحید بخت شاهی

۱۳۸۶

۱۰۴۲۷۵

باسمه تعالی

شماره : ۳۱/۴۶۰

تاریخ : ۸۶/۸/۶

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده علوم پایه

جلسه دفاع از پایان نامه آقای **وحید بخت شاهی** دانشجوی دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض** ساعت **۱۱/۳۰** روز **چهارشنبه** مورخه **۸۶/۸/۲** در اتاق **۲۴۳** تشکیل گردید. پس از بررسی و نظر هیأت داوران ، پایان نامه نامبرده با نمره ۱۹ و درجه عالی مورد تأئید قرار گرفت.

عنوان رساله : C- نیم گروهها ،C - نیم گروههای موضعی و مسأله کوشی مجرد

تعداد واحد: ۶ واحد

داور رساله : دکتر علیرضا جانفدا

استادیاردانشگاه بیرجند

داور رساله : دکتر علی اکبر استاجی

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

استاد راهنما: دکتر محمد جانفدا

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

استاد مشاور : دکتر علی اکبر عارفی جمال

استادیاردانشگاه تربیت معلم سبزوار

نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سهراب عفتی

دانشیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

مدیر گروه ریاضی : دکتر محمد جانفدا

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

تقديم به:

اولين آموزگاران زندگي؛

سروران ديروز و امروز؛

سرمايه هاي فردا و هميشه ام؛

پدر و مادر عزيزم

قدردانی

اکنون که با عنایت و لطف پروردگار، کار پژوهشی و تحقیقاتی این پایان‌نامه به انتها رسیده است، قبل از شروع لازم می‌دانم از زحمات استاد راهنمای ارجمندم، **آقای دکتر محمد جانفدا**، قدردانی و تشکر نمایم. از استاد مشاور محترم، **آقای دکتر علی‌اکبر عارفی‌جمال** نیز سپاس‌گزاری می‌کنم.

از آقای دکتر علیرضا جانفدا و هم‌چنین آقای دکتر علی‌اکبر استاجی که زحمت بازخوانی و داوری پایان‌نامه را متقبل شدند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از خانواده مهربانم به‌خصوص پدر و مادر عزیزم به خاطر همه دلگرمی‌ها و حمایت‌هایشان صمیمانه قدردانی می‌نمایم. آرزوی سلامتی، موفقیت و پیروزی می‌کنم برای تمامی دوستان و همکلاسی‌هایم که در به مقصد رسیدن این تحقیق مرا یاری نمودند. و از دوست عزیزم آقای علی اصغر طلوع که با کمک‌هایش موجب دلگرمی‌ام در طول این دوره شد کمال تشکر را دارم.

فهرست مطالب

مقدمه و تاریخچه:

نظریه نیم‌گروه‌های عملگرهای کراندار بخشی از آنالیز تابعی را تشکیل می‌دهد و تا حدی مطالب آنالیز تابعی را تحت‌الشعاع خود قرار می‌دهد. این نظریه پس از یافتن قضیه مولد توسط هیل [۱] و یوشیدا [۲] در سال ۱۹۴۸ با سرعت نسبتاً زیادی پیشرفت خود را آغاز کرد و در حال حاضر، کاربردهای اساسی آن در بسیاری از زمینه‌های آنالیز موضوع اصلی ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

هیل و فیلیپس [۳] رابطه بین نیم‌گروه یک پارامتری از عملگرها و مسأله کوشی مجرد یک پارامتری را در قضیه‌ای اثبات کردند. نقطه اوج پیشرفت نظریه نیم‌گروه‌ها ویرایش دوم کتاب *Functional Analysis and semigroups* بود که در سال ۱۹۵۷ توسط هیل و فیلیپس به چاپ رسید. همچنین C- نیم‌گروه‌ها در سال ۱۹٦٦ توسط پراتو [۴] در مقاله‌ای به زبان فرانسه[۱۵] مورد توجه قرار گرفت. اما کار اصلی روی این نظریه از سال ۱۹۸٦ و با کارهای دیویس [۵] و پنگ [٦] [۴] و دلابنفلس [۷] [۵] شروع شد و مقالات بسیار زیادی در این زمینه و ارتباطش با مسأله کوشی مجرد منتشر شد. برای نمونه می‌توان به مقالات [۴]، [۵] و [۱۵] اشاره کرد. C-نیم‌گروه‌های موضعی نیز که حالتی خاص از C- نیم‌گروه‌ها هستند، در مقالات [۷]، [۱۷]، [۱۸]، [۱] و [۲۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین اغتشاش نیم‌گروه‌ها نیز یکی از مسایل قدیمی نظریه نیم‌گروه‌ها است که در مقالات و کتاب‌های بسیار زیادی مورد بررسی واقع شده‌اند و اغتشاش C- نیم‌گروه‌های موضعی نیز در مقالاتی از

[۱] Hille

[۲] Yosida

[۳] Phillips

[۴] Prato

[۵] Davies

[٦] Pang

[۷] deLaubenfels

جمله [۱۰] و [۱۸] مورد بحث واقع شده‌اند.

این پایان‌نامه شامل سه فصل است

فصل اول به مقدمات اختصاص دارد که در آن تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی، تابعی، نیم‌گروه‌های یک پارامتری و ... بیان می‌شوند که در طول این پایان‌نامه به‌کار رفته‌اند. در این فصل تمامی قضایا بدون اثبات پذیرفته می‌شوند و تنها مراجع لازم برای اثبات آن‌ها بیان شده است.

فصل دوم شامل چهار بخش است که عمدتاً مستخرج از مقاله

R. deLaubenfels, *C-semigroups and the Cauchy problem*, J. Funct. Anal. 111 (1993), 44-61.

است. در بخش اول مفاهیم C- نیم‌گروه‌ها، مولد و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در بخش دوم تعریفی معادل برای مولد یک C- نیم گروه را ارایه می‌دهیم. در بخش سوم رابطه بین C- نیم‌گروه‌ها و مسأله کوشی مجرد را بررسی می‌کنیم. در بخش چهارم از تکنیک تبدیل لاپلاس برای توصیف مولدهای C- نیم‌گروه‌های کراندارنمایی که دامنه آن‌ها ممکن است چگال نباشد، استفاده می کنیم و تعمیمی از قضیه هیل- یوشیدا برای C-نیم‌گروه‌ها را بیان کرده و به اثبات آن خواهیم پرداخت.

فصل سوم مشتمل بر سه بخش است که از مقالات

1) Y. C. Li, and S. Y. Shaw *On Characterization and perturbation of local C-semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc, 135. No 4 (2007), 1097-1106.

2) S. Y. Shaw and C. C Kuo, *Generation of local C-semigroups and the abstract Cauchy problem* Taiwanese J. Math. ,9 (2005), 291-311.

3) S. Y. Shaw, C. C Kuo, and Y. C. Li, *Perturbation of local C-semigroups*, Nonlinear Analysis 63 (2005), e2569-e2574.

آورده شده است. در بخش اول مفاهیم C- نیم‌گروه‌های موضعی، مولد و خواص اساسی آن و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در بخش دوم به ارتباط بین عملگر A و جواب‌های قوی مسایل کوشی مجرد می‌پردازیم. در بخش سوم اغتشاش را که مسأله‌ای قدیمی و پرکاربرد در نظریه نیم‌گروه‌ها و در حال حاضر در C- نیم‌گروه‌های موضعی است را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مفاهیم اولیه

۱.۱.۱. تعریف: یک فضای برداری[۸] عبارت است از یک گروه آبلی و جمعی مانند $(X,+)$ به همراه ضرب اسکالر از میدان F $(F=\mathbb{R}$ یا $F=\mathbb{C})$ به توی X مانند

$$\begin{aligned} . : F\times X &\longrightarrow X \\ (\alpha,x) &\longrightarrow \alpha x \end{aligned}$$

که دارای شرایط زیر می‌باشد

الف) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$،

ب) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$،

ج) $1x=x$،

د) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.

۲.۱.۱. تعریف: فرض کنید X فضایی برداری روی میدان F باشد، تابع $\|.\|:X\longrightarrow[0,\infty)$ یک نرم[۹] روی X نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند

الف) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$،

ب) به ازای هر $\alpha\in F$ و هر $x\in X$ ، $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$،

ج) به ازای هر $x,y\in X$ ، $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

فضای برداری X روی میدان F را یک فضای نرمدار[۱۰] گویند، اگر یک نرم $\|.\|$ روی X وجود داشته باشد. فضای نرمدار X با متر $d(x,y)=\|x-y\|$ یک فضای متریک است. حال اگر این فضای

---

[۸] Vector Space

[۹] Norm

[۱۰] Normed space

متریک کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی[۱۱] در آن همگرا باشد، آن‌را یک فضای باناخ[۱۲] گوییم.

۳.۱.۱. تعریف: فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار روی میدان F باشند. تابع $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی[۱۳] نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

۴.۱.۱. تعریف: عملگر خطی T را کراندار گوییم هرگاه $M > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\|Tx\| \leq M\|x\|.$$

مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و نرم عملگری روی این فضا را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \leq 1\}.$$

۵.۱.۱. تعریف: برای عملگر $A : D(A) \subset X \to X$، نرم گراف به‌صورت، $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ تعریف می‌شود.

٦.۱.۱. تعریف: عملگر خطی A با دامنه $D(A)$ در فضای باناخ X، یعنی $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$، را بسته گوییم هرگاه

برای هر دنباله $(x_n)_{n \in N} \subset D(A)$ اگر حدود $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y \in X$ موجود باشند، آن‌گاه $x \in D(A)$ و $Ax = y$.

می‌توان نشان داد که بسته بودن A با گزاره‌های زیر معادل است

[۱۱] Cauchy sequence

[۱۲] Banach space

[۱۳] Linear operator

الف) $G(A) = \{(x, Ax) \;\;:\; x \in D(A)\}$ (گراف A) در $X \times X$ بسته است.

ب) $X_1 := (D(A), \|.\|_A)$ فضایی باناخ با نرم گراف باشد.

۷.۱.۱. تعریف: عملگر $A_|$ که بخش عملگر A روی مجموعه Y است به‌صورت $A_|y := Ay$ با دامنه $D(A_|) := \{y \in D(A) \cap Y \;:\; Ay \in Y\}$ تعریف می‌شود.

۸.۱.۱. قضیه (قضیه گراف بسته [۱۴]): فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و T عملگر خطی بسته از X به Y باشد، در این صورت T کراندار است.

برهان: به مرجع ۵.٦.[۱۴] مراجعه کنید.

۹.۱.۱. قضیه (قضیه باناخ اشتن هاوس[۱۵]): فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $\{A_n\}$ یک دنباله در $B(X,Y)$ باشد با این خاصیت که برای هر $x \in X$، $y \in Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\|A_nx - y\| \to 0$. آن‌گاه $A \in B(X,Y)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$، $\|A_nx - Ax\| \to 0$ و $sup\|A_n\| < \infty$.

برهان: به مرجع ۱۴.٦.[۲] مراجعه کنید.

۱۰.۱.۱. قضیه (اصل کرانداری یکنواخت[۱٦]): اگر X فضای نرمدار و خانواده $\{S_\alpha \;:\; \alpha \in A\}$ در $B(X,Y)$ به گونه‌ای باشد که برای هر $x \in X$ مجموعه $\{S_\alpha(x) \;:\; \alpha \in A\}$ در Y کراندار باشد، آن‌گاه $\{\|S_\alpha\| \;:\; \alpha \in A\}$ نیز کراندار است.

برهان: به مرجع [۱٦] مراجعه کنید.

۱۱.۱.۱. تعریف: عملگر $(B, D(B))$ را توسیع $(A, D(A))$ گویند و با $A \subset B$ نشان می‌دهند، اگر $D(A) \subseteq D(B)$ و به‌ازای هر $x \in D(A)$ داشته باشیم $Ax = Bx$. کوچک‌ترین توسیع بسته از A در

[۱۴] Closed Graph theorem

[۱۵] Banach-Steinhaus theorem

[۱٦] Uniform boundedness principle

صورت وجود را بستار A نامیده و با $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. عملگرهایی که بستار داشته باشند، بسته‌پذیر نامیده می‌شوند.

۱.۱.۱۲. گزاره: عملگر $(A, D(A))$ بسته‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر دنباله $(x_n)_{n\in N} \subset D(A)$ که $x_n \longrightarrow 0$ و $Ax_n \longrightarrow z$ داشته باشیم، $z = 0$.

برهان: به مرجع $B.4$.[۶] مراجعه کنید.

۱.۱.۱۳. تعریف: A را یک جبر[17] روی میدان F نامیم، هرگاه A یک فضای برداری روی F باشد و نگاشتی مانند $(a,b) \to ab$ از $A \times A$ به A موجود باشد به‌قسمی که به‌ازای هر a, b, c در A و $\alpha \in F$ داشته باشیم

الف) $a(bc) = (ab)c$،

ب) $a(b+c) = ab + ac$،

ج) $(a+b)c = ac + bc$،

د) $\alpha(ab) = (\alpha a)b$.

۱.۱.۱۴. تعریف: جبر A را جبر یکدار نامیم، هرگاه عنصری مانند e از A موجود باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$، داشته باشیم $ae = ea = a$. دراین‌صورت e را یکه A نامیم.

۱.۱.۱۵. تعریف: هرگاه یک نرم در A موجود باشد به‌طوری‌که A را به فضای نرمدار تبدیل و در نامساوی ضربی $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ صدق کند، آن‌گاه A را جبر نرمدار نامند. اگر A جبر نرمدار و $(A, \|.\|)$ فضای باناخ باشد، آن‌گاه A را جبر باناخ نامیم.

۱.۱.۱۶. تعریف: تابع مختلط مقدار f را روی بازه $I \subset \mathbb{R}$ انتگرال پذیر موضعی می گویند هرگاه f روی I اندازه‌پذیر بوده و برای هر زیرمجموعه فشرده K از I، $\int_K |f| < \infty$. مجموعه تمام توابع

[17] Algebra

انتگرال‌پذیر موضعی روی I را با $L^1_{loc}(I)$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که $L^1_{loc}(I)$ فضای باناخ است. (به مرجع [۳] بعد از تعریف ۴.۷.۱ رجوع کنید.)

۱۷.۱.۱. تعریف: فرض کنید f و g متعلق به $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ باشند. آن‌گاه $f*g$ به‌صورت زیر است

$$(f*g)(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(s-t)g(t)dt \qquad (s\in S)$$

که S زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ بوده و انتگرال روی آن مطلقاً همگرا است. حال اگر f و g متعلق به $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ باشند، آن‌گاه

$$(f*g)(s)=\int_{0}^{s}f(s-t)g(t)dt \qquad (s\in \mathbb{R}^+).$$

۲.۱ نیم‌گروه یک پارامتری عملگرها روی فضای باناخ

هدف ما در این بخش مطالعه نیم‌گروه‌های یک پارامتری عملگرهای خطی کراندار روی فضاهای باناخ و برخی مباحث مربوط به آن است. پس از تعریف نیم گروه‌ها، مولد بی‌نهایت کوچک، پیوستگی قوی، پیوستگی یکنواخت و برخی قضایای شناخته شده در این باره را بیان می‌کنیم. از آن‌جا که بیشتر این مباحث با انتگرال‌گیری روی فضاهای باناخ مربوط است قبل از هر چیز به معرفی انتگرال‌گیری بوخنر[۱۸] از توابع برداری می‌پردازیم.

فضای باناخ X و تابع $f:J\subseteq I\!R\to X$ روی بازه J را در نظر بگیرید. اگر f تابعی پیوسته باشد، همانند توابع اسکالر مقدار، می‌توان انتگرال را به صورت حد مجموع ریمان تعریف کرد. در حالت کلی داریم،

۱.۲.۱. تعریف: فرض کنید f تابعی برداری مقدار است

[۱۸] Bochner integration

الف) تابع f را ساده[۱۹] گوییم هرگاه بتوان آن‌را به صورت زیر نمایش داد

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{J_k}$$

که در آن $x_k \in X$ و $J_k \subseteq J$ و J_k ها اندازه‌پذیرند (χ_{J_k} نمایشگر تابع مشخصه روی مجموعه J_k است).

برای تابع ساده f انتگرال را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_J f(s)ds = \sum_{k=1}^{n} x_k m(J_k)$$

که در آن m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ را به ما می‌دهد و این انتگرال مستقل از نمایش‌های مختلف f است.

ب) اگر بتوانیم f را به‌صورت نقطه‌وار با توابع ساده تقریب بزنیم، یعنی اگر دنباله $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از توابع ساده موجود باشد که

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \quad \text{a.e.}$$

آن‌گاه f را (به‌طور قوی) اندازه‌پذیر گوییم.

ج) اگر f اندازه‌پذیر باشد و دنباله‌ای از توابع ساده روی J موجود باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} \int_J \|f(s) - f_n(s)\| ds = 0$$

آن‌گاه f را انتگرال پذیر بوخنر گوییم و انتگرال تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_J f(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_J f_n(s)ds,$$

که این انتگرال مستقل از انتخاب دنباله تقریبی $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ است.

[۱۹] Simple

اکنون برخی خواص مقدماتی توابع اندازه‌پذیر برداری مقدار را بیان می‌کنیم.

۲.۲.۱. گزاره: الف) اگر $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر همگرا به f روی J باشد آن‌گاه f اندازه‌پذیر است.

ب) اگر f اندازه پذیر، $B(X)$ فضای باناخ تمام عملگرهای خطی کراندار روی X و $F : J \to B(X)$ پیوسته قوی باشد، یعنی برای تمام $x \in X$ و $s_\circ \in J$ داشته باشیم $\lim\limits_{s\to s_\circ} F(s)x = F(s_\circ)x$، آن‌گاه ترکیب $Fof : J \to X$ اندازه‌پذیر است که در آن برای $s \in J$، $Fof(s)$ به‌صورت $F(s)f(s)$ تعریف می‌شود.

برهان: به مرجع $C.۲$[۶] مراجعه کنید.

توابع انتگرال پذیر را می‌توان به صورت زیر توصیف نمود

۳.۲.۱. گزاره: برای تابع اندازه پذیر $f : J \subseteq \mathbb{R} \to X$ موارد زیر هم ارزند

الف) f انتگرال‌پذیر است.

ب) $\int_J \|f(s)\|ds < \infty$.

برهان: به مرجع $C.۳$[۶] مراجعه کنید.

۴.۲.۱. گزاره: فرض کنید $A : D(A) \subseteq X \to Y$ عملگری بسته بین فضاهای باناخ X و Y باشد. اگر $f : J \to X$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد که برای تمام $s \in J$، $f(s) \in D(A)$، علاوه بر این اگر $Af : J \to Y$ تعریف شده با $(Af)(s) = Af(s)$ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه $\int_J f(s)ds \in D(A)$ و $A(\int_J f(s)ds) = \int_J Af(s)ds$.

برهان: به مرجع $C.۴$[۶] مراجعه کنید.

در ادامه این بخش به معرفی نیم‌گروه‌های یک پارامتری عملگرها روی فضاهای باناخ و بررسی

خواص مقدماتی مورد نیاز آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۲.۵. تعریف: فرض کنید X فضایی باناخ و $B(X)$ فضای تمام عملگرهای خطی کراندار روی X باشد. به خانواده $\{T(t) : \circ \leq t < \infty\}$ که زیرمجموعه‌ای از $B(X)$ است یک نیم‌گروه از عملگرهای خطی کراندار روی X گوییم اگر

الف) $T(\circ) = I$ (I عملگر همانی روی X است)،

ب) برای هر $s, t \geq \circ$، $T(s+t) = T(s)T(t)$.

برای نمایش این نیم‌گروه معمولاً به‌طور ساده نماد $T(t)$ را به کار خواهیم برد.

نیم‌گروه $T(t)$ را پیوسته قوی [۲۰] یا $C_\circ$-پیوسته گوییم هرگاه برای تمام $x \in X$، $\lim\limits_{t\to\circ+} T(t)x = x$ و آن‌را پیوسته یکنواخت [۲۱] گوییم هرگاه

$$\lim_{t\to\circ+} \|T(t) - I\| = \circ.$$

عملگر A تعریف شده روی

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to\circ+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ موجود است } \} \qquad \text{با}$$

$$Ax = \lim_{t\to\circ+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=\circ}$$

را مولد بی‌نهایت کوچک [۲۲] نیم‌گروه $T(t)$ گوییم. گاهی به جای مولد بی‌نهایت کوچک از مولد استفاده خواهیم کرد و دراین حالت می‌گوییم $T(t)$ به‌وسیله A تولید شده است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که نیم گروه‌های پیوسته یکنواخت شکل نمایی دارند و نیم‌گروه‌های پیوسته قوی را می‌توان با یک تابع نمایی تقریب زد.

[۲۰] Strongly continuous

[۲۱] Uniformly continuous

[۲۲] Infinitesimal generator

۱.۲.۶. قضیه: الف) عملگر خطی A مولد یک نیم‌گروه پیوسته یکنواخت مانند $T(t)$ است اگر و تنها اگر A عملگری کراندار باشد. در این حالت

$$T(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

ب) اگر $T(t)$ پیوسته قوی باشد آن‌گاه ثابت‌های $w > 0$ و $M \geq 1$ موجودند چنان‌که $\|T(t)\| \leq M \exp(wt)$.

برهان: به مرجع [۱۳].$I.۲.۲$, [۱۳].$I.۱.۲$ مراجعه کنید.

حال اگر $T(t)$ یک نیم‌گروه پیوسته قوی باشد نامساوی

$$\begin{aligned}\|T(t)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t_0)\|\|T(t-t_0)x - x\| \\ &\leq M \exp wt_0 \|T(t-t_0)x - x\|\end{aligned}$$

نشان می‌دهد که نگاشت $t \to T(t)x$ برای هر $t_0 > 0$ پیوسته است.

۱.۲.۷. قضیه: الف) فرض کنید $S(t)$ و $T(t)$ نیم‌گروه‌هایی پیوسته یکنواخت از عملگرهای خطی کراندار باشند. اگر

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t}$$

آن‌گاه برای هر $t \geq 0$، $T(t) = S(t)$.

ب) فرض کنید $T(t)$ و $S(t)$ نیم‌گروه‌هایی پیوسته قوی با مولدهای به ترتیب A و B باشند. اگر $A = B$ آن‌گاه برای هر $t \geq 0$، $T(t) = S(t)$.

برهان: به مرجع [۱۳].$I.۲.۶$, [۱۳].$I.۱.۳$ مراجعه کنید.

۱.۲.۸. قضیه: فرض کنید $(A, D(A))$ مولد C_0-نیم‌گروه $T(t)$ باشد آن‌گاه