به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

عنوان :

# شعاع های طیفی عملگرهای خطی کراندار بر روی فضاهای برداری توپولوژیک

استاد راهنما :

دکتر مجید میرزا وزیری

استاد مشاور :

دکتر محمد صال مصلحیان

نگارنده :

امید ضابطی

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

همسر صبور، قانع و مهربانم

خانواده بزرگوارم

جناب دکتر میرزاوزیری

و تمام اساتید و بزرگوارانی که در راه علم تلاش می کنند

# قدردانی

خداوند مهربان را بسیار شاکرم که عنایت بیکران و رحمت لایزال خود را همواره و در تمام مراحل زندگی به این بنده حقیر ارزانی داشته و بی شک یقین دارم که اگر توجه حضرت حق نبود هیچ گاه موفقیتی در زندگی خود بدست نمی آوردم.

سر ارادت ما و آستان حضرت دوست          که هر چه بر سر ما می رود ارادت اوست

از زحمات بی دریغ پدر و مادر عزیزم بی نهایت سپاسگزارم.

زیباترین لحظه های سبز گل های بیقرار نیلوفر را تقدیم به سبزترین استاد زندگی، جناب دکتر میرزا وزیری می نمایم و از نقش بسیار ارزنده ایشان در مراحل جمع آوری، نگارش و تدوین پایان نامه کمال تشکر را دارم و به دور از همه تعارفات و به دلیل احساسات قلبی خود، ارادت خاص خود را به ایشان ابراز داشته و از صمیم قلب برای ایشان آرزوی موفقیت می کنم.

از جناب دکتر صال مصلحیان که مشاوره رساله اینجانب را بر عهده داشته اند، سرکار خانم دکترحجازیان وجناب دکترمیرمصطفایی که قبول زحمت کرده و این رساله رامورد مطالعه و داوری قرار داده اند، بی نهایت سپاسگزارم.

از تک تک اعضای خانوادهام که نقش بسیار مهمی در بوجود آوردن محیطی مناسب برای تحصیل بنده داشتهاند، کمال تشکر را دارم. از خانواده همسر خود نیز سپاسگزارم.

ازتمام اساتید بزرگوارم بی نهایت سپاسگزارم. از دوستان بسیار خوبم در دوره کارشناسی ارشد آقایان علی دادخواه، محسن کیان، امین روشنی که همواره یار و همکار اینجانب بوده اند، بسیار سپاسگزارم.

اما بی شک خدای مهربان گوهرهای ارزشمندی برای خوشبختی انسان هابه آنها عطا کرده است و لذا تشکر و سپاس بی نهایت خود را نثار ارزشمندترین گوهر زندگی خود همسر فداکارم خانم طیبه اکبریان می نمایم که با صبوری متانت و دلسوزی تمام زمینه موفقیت های اینجانب را فراهم کرده اند.

در پایان از تمام عزیزانی که نام آنها در اینجا ذکر نشده پوزش می طلبم و از یکایک آنها بی نهایت سپاسگزارم.

در پایان، این مجموعه را به تمام بزرگوارانم تقدیم می کنم.

امید ضابطی — شهریور ماه ۱۳۸۸

# فهرست مندرجات

# پیشگفتار

در این رساله سعی شده است که نوعی از نظریه طیف برای عملگرهای خطی کراندار بر روی فضاهای برداری توپولوژیک توسعه داده شود. نشان داده خواهد شد که فرمول گلفند برای شعاع طیفی و سری نیومن همچنان برای عملگرهای خطی کراندار بر روی فضاهای برداری توپولوژیک قابل بیان می باشند. البته این تعمیم تشابه زیادی با نظریه طیف برای عملگرهای کراندار بر روی فضاهای باناخ دارد، اگرچه‌تفاوت های مهمی نیز وجود دارد. مهمترین تفاوت آن است که برای یک عملگر خطی بر روی یک فضاهای برداری توپولوژیک چندین طیف و چندین شعاع طیفی وجود دارد.

شعاع طیفی یک عملگر کراندار $T$ بر روی یک فضای باناخ توسط فرمول گلفند $r(T) = \lim \sqrt[n]{\|T^n\|}$ تعریف می شود.

می دانیم که $r(T)$ با شعاع هندسی طیف یعنی $|\sigma(T)|$ مساوی است. علاوه بر آن می دانیم که هرگاه $|\lambda| > r(T)$، عملگر حلال $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ حد سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ است که سری اخیر سری نیومن $T$ در نقطه $\lambda$ نامیده می شود.

یک سوال طبیعی آن است که از خود بپرسیم آیا نتایج مشابهی برای فضاهای کلی تر موجود است؟ برای نمونه برای عملگرهای خطی کراندار بر روی فضاهای برداری توپولوژیک.

البته در این راه چندین مشکل اساسی وجود دارد:

۱) مشخص نیست کدام رده از عملگرها باید مورد توجه قرار گیرد زیرا چندین راه غیر هم ارز برای تعریف عملگرهای خطی کراندار بر روی فضاهای برداری توپولوژیک وجود دارد.

۲) نظریه طیف برای عملگرهای کراندار بر روی فضاهای باناخ بسیار مشهور و مطالعه شده است ولی برای

فضاهای برداری توپولوژیک مطالعه زیادی انجام نشده است.
۳) بسیاری از تکنیک های نظریه طیف عملگرهای خطی کراندار بر روی فضاهای باناخ همچون نحوه محاسبه شعاع طیفی و ... در مورد فضاهای برداری توپولوژیک قابل کاربرد نمی باشند.
برای غالب شدن بر این مشکلات در این رساله سعی شده است یک نوع نظریه طیف برای عملگرهای خطی کراندار بر روی فضاهای برداری توپولوژیک دلخواه تعمیم داده شود.
برخی نتایج در این رساله توسط [۱]،[۲]،[۸] نیز بدست آمده اند.
منبع اصلی این رساله مقاله زیر می باشد:

Troitsky V. G., Spectral radii of bounded linear operators on topological vector spaces, PanAmerican Math. J.,**11**, no. 3, 1-35, (2001).

# فصل ۱

# پیش نیازها

**تعریف ۱.۰.۱** یک **فضای برداری توپولوژیک** [۱] ، یک فضای برداری[۲] با یک توپولوژی[۳] بر روی آن است که تحت آن توپولوژی، اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر پیوسته باشند.

برای بررسی ویژگی های یک فضای برداری به [۱۱] مراجعه شود.
همواره میدان اسکالر هر فضای برداری در این رساله، میدان اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و یا اعداد مختلط $(\mathbb{C})$ می‌باشد.
بعضی از نویسندگان (رجوع کنید [۱۱])، $T_1$ بودن توپولوژی را نیز در تعریف اضافه می نمایند.
نکته جالب آنجاست که با شرط $T_1$ بودن توپولوژی، می توان نتیجه گرفت که هر فضای برداری توپولوژیک، هاسدورف[۴] می باشد (رجوع کنید [۱۱]).
برای مقاصدی که در این رساله دنبال شده است، شرط $T_1$ بودن توپولوژی در تعریف اصلی یک فضای برداری توپولوژیک لزومی ندارد و در مواقع لازم از عبارت فضای برداری توپولوژیک هاسدورف برای زمانی که توپولوژی مورد نظر هاسدورف باشد، استفاده می کنیم.
نمادهای $X$ و $Y$ همواره فضاهای برداری توپولوژیک را نشان می دهند. منظور از یک همسایگی[۵] نقطه $x \in X$، یک مجموعه باز[۶] شامل $x$ است.

**تعریف ۲.۰.۱** یک **پایه موضعی**[۷] شامل صفر، گردایه ای از همسایگی هاشامل صفراست که هرهمسایگی از صفر یکی از اعضای آن را شامل شود. یک همسایگی بسته[۸]، بستار[۹] یک همسایگی می باشد.

همواره منظور از یک پایه موضعی، یک پایه موضعی شامل صفر است و منظور از یک همسایگی صفر، یک همسایگی شامل صفر می باشد.
چون در هر فضای برداری توپولوژیک، برای هر همسایگی صفرمانند $V$، می توان یک همسایگی صفر مانند $W$ پیدا کرد به طوری که $\bar{W} \subseteq V$ ( رجوع کنید [۱۱] )، لذا متناظر با هر گردایه از همسایگی های شامل صفرمانند

[۱] Topological vector spaces
[۲] Vector spaces
[۳] topology
[۴] Hausdorff
[۵] neighborhood
[۶] open
[۷] Local basis
[۸] closed
[۹] closure

$\beta_1$، می توان یک گردایه از همسایگی های بسته شامل صفرمانند $\beta_2$ بدست آورد.
بنابراین هرگاه از عبارت یک پایه موضعی از همسایگی های بسته شامل صفر، استفاده نمودیم، منظور، مجموعه‌ای مانند $\beta_2$ می باشد.
یک فضای برداری توپولوژیک، **به طور موضعی کراندار** [۱۰] نامیده می شود اگر یک همسایگی صفرکرانداردداشته باشد.

**تعریف ۳.۰.۱** فرض کنید $X$ یک فضای برداری توپولوژیک است، در این صورت یک زیر مجموعه $A \subseteq X$:

i. **جاذب** [۱۱] نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in X$، $t > 0$ موجود باشد که $tx \in A$.

ii. **متعادل** [۱۲] نامیده می شود هرگاه برای هر اسکالر $\lambda$ با $|\lambda| \leq 1$، $\lambda A \subseteq A$.

iii. **کراندار** [۱۳] نامیده می شود اگر برای هر همسایگی صفر جذب شده باشد، یعنی برای هر همسایگی صفر مانند $V$، اسکالر مثبت $\alpha$ موجود باشد به طوری که $A \subseteq \alpha V$.

iv. **شبه محدب** [۱۴] نامیده می شود هرگاه اسکالر مثبت $\alpha$ موجود باشد به طوری که $A + A \subseteq \alpha A$.

v. **محدب** [۱۵] نامیده می شود هرگاه $A + A \subseteq 2A$.

اگر $A \subseteq X$، **هسته محدب** [۱۶] $A$ عبارت است از کوچکترین زیر مجموعه محدب $X$ که $A$ را شامل می شود، به عبارت دیگر اشتراک تمام زیرمجموعه های محدب $X$ که $A$ را شامل می شوند. به وضوح، هسته محدب یک مجموعه، خود، یک مجموعه محدب می باشد.
هر همسایگی صفرمانند $V$ جاذب است ( رجوع کنید [۱۱] ).

[۱۰] locally bounded
[۱۱] absorbing
[۱۲] balance
[۱۳] bounded
[۱۴] pseudo convex
[۱۵] convex
[۱۶] convex hull

**تبصره ۴.۰.۱** برای هر فضای برداری توپولوژیک بر روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ پایه ای موضعی شامل صفرمانند $\aleph$ موجود است که خواص زیر را دارد:

i. هر $V \in \aleph$ متعادل است.

ii. برای هر $V_1, V_2 \in \aleph$، $V \in \aleph$ موجود است به طوری که $V \subseteq V_1 \bigcap V_2$.

iii. برای هر $V \in \aleph$، $U \in \aleph$ موجود است که $U + U \subseteq V$.

iv. برای هر $V \in \aleph$ و برای هر اسکالر$\lambda$، $\lambda V \in \aleph$.

از این پس منظور ازیک پایه موضعی شامل صفر مانند $\aleph$، پایه ای است که تمام خواص بالا را دارد.
اگر توپولوژی فضای برداری $X$ توسط یک **نرم** [۱۷] داده شود، آنگاه $X$، یک فضای نرم دار نامیده می شود. با استناد به همگرایی دنباله ها برای پیوستگی، به راحتی دیده می شود که هر فضای نرم داریک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف می باشد. دراین حالت به وضوح مجموعه گوی های به مرکز صفر، یک پایه موضعی شامل صفر تشکیل می دهند.
یک فضای برداری توپولوژیک $X$ **کامل** [۱۸] نامیده می شود هرگاه هر **دنباله کشی** [۱۹] در آن همگرا باشد.
یک فضای نرم دار کامل، **باناخ** [۲۰] نامیده می شود.
فرض کنید $X$، یک فضای باناخ باشد. مجموعه همه **تابعک های خطی** [۲۱] پیوسته روی آن را با $X^\star$ نمایش می‌دهیم.
$X^\star$، با نرم زیر یک فضای باناخ است

$$||x^\star|| = \sup\{|x^\star(x)|, ||x|| \leq 1\} \qquad x^\star \in X^\star$$

توپولوژی القایی از آن بر روی $X$ را **توپولوژی ضعیف** [۲۲] $X$ می نامیم. در واقع این توپولوژی، ضعیف ترین توپولوژی بر روی $X$ است که همه تابعک های خطی بر روی $X$ را پیوسته می کند.
فرض کنید $(\Lambda, \leq)$ مجموعه ای جهتدار[۲۳] و $X$ مجموعه ای دلخواه باشد. در این صورت هر خانواده اندیس دار مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از عناصر $X$ که توسط مجموعه $\Lambda$ اندیس گذاری شده اند، یک **تور** [۲۴] در $X$ جهتدار شده

[۱۷] norm
[۱۸] complete
[۱۹] Cauchy sequence
[۲۰] Banach
[۲۱] linear functionals
[۲۲] weak topology
[۲۳] directed
[۲۴] net

توسط $\Lambda$ نامیده می شود.
اگر $A \subseteq X$ و $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک تور در $X$ و $x \in X$ می نویسیم $x_\gamma \xrightarrow{A} x$ اگر برای هر $\epsilon > \circ$ اندیس $\gamma_\circ$ موجود باشد به طوری که برای هر $\gamma \geq \gamma_\circ$ رابطه $x_\gamma - x \in \epsilon A$ را داشته باشیم.
به آسانی دیده می شود وقتی $A$ شبه محدب است توپولوژی حاصل از این همگرایی، $X$ را تبدیل به یک فضای برداری توپولوژیک می کند و مجموعه همه مضارب اسکالر $A$ یک پایه موضعی در صفر تشکیل می دهند.
این توپولوژی را با نماد $(X, A)$ یا به طور ساده، $X_A$ نمایش می دهیم.
باز هم به آسانی قابل تحقیق است که $X_A$ هاسدورف است اگر و تنها اگر $\bigcap_{n=\backslash}^{\infty} \frac{\backslash}{n}A = \{\circ\}$.
توجه کنید که اگر $U$ یک همسایگی صفر کراندار باشد، شبه محدب نیز می باشد (از آنجا که $U+U$ یک مجموعه کراندار است، $\alpha > \circ$ موجود است که $U + U \subseteq \alpha U$). برعکس اگر $U$ یک همسایگی شبه محدب در $X$ باشد، $X_U$ یک فضای به طور موضعی کراندار است.
یک شبه نرم[۲۵]، تابع حقیقی مقدار بر روی فضای برداری $X$ است که در تمام اصول نرم جز نامساوی مثلث صدق می کند و نا مساوی مثلث به شکل ضعیفتر

$$||x+y|| \leq K(||x|| + ||y||)$$

بیان می شود که $K > \backslash$ یک ثابت مثبت است.
یک فضای برداری توپولوژیک شبه نرم پذیر است اگر و تنها اگر به طور موضعی کراندار و هاسدورف باشد(رجوع کنید به [۷]).
یک فضای شبه نرم پذیر کامل، شبه باناخ [۲۶] نامیده می شود.
یک نیم نرم [۲۷]، تابعی حقیقی مقدار مانند $p$ بر روی فضای برداری $X$ است که در تمام اصول نرم جز اصل $(p(x) = \circ \Rightarrow x = \circ)$ صدق می کند.
به وضوح اگر توپولوژی $X$ توسط نیم نرم $p$ القا شود، آنگاه $X = X_U$ می باشد که در آن

$$.U = \{x \in X, p(x) < \backslash\}$$

فرض کنید $A \subseteq X$، محدب و جاذب و متعادل باشد. تابع حقیقی مقدار $\mu_A$ رابر $X$ بصورت زیر تعریف کنید:
$$\mu_A(x) = \inf\{t > \circ, t^{-\backslash}x \in A\}$$

[۲۵] quasi norm
[۲۶] quasi Banach
[۲۷] seminorm

$\mu_A$، یک نیم نرم می باشد که آن را **تابعک مینکوفسکی** [۲۸] $A$ می نامیم (رجوع کنید [۱۱] ).
یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف، **به طور موضعی محدب** [۲۹] نامیده می شود اگر یک پایه موضعی از همسایگی های محدب را دارا باشد یا به طور معادل توپولوژی فضا توسط خانوادهای ازنیم نرم هایی که فضا را جدا می کنند تولید شده باشد (رجوع کنید [۱۱] ).
یادآوری می کنیم که یک گردایه $P$ از نیم نرم ها، فضای برداری $X$ را جدا می کنند اگر برای هر $x \in X$ که $x \neq 0$ ، $p \in P$ موجود باشد که $p(x) \neq 0$.
همچنین یک فضای برداری توپولوژیک (نه لزوما هاسدورف ) به طور موضعی محدب است اگر و تنها اگر توپولوژی فضا توسط یک خانواده از نیم نرم ها تولید شود( که لزوما فضا را جدا نمی کنند ).
یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف، **به طور موضعی شبه محدب** [۳۰] نامیده می شود اگر پایه ای موضعی از عناصر شبه محدب داشته باشد.

**تبصره ۵.۰.۱** در این رساله، همواره منظور از یک فضای به طور موضعی محدب ( به طور موضعی شبه محدب)، یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف است که پایه ای موضعی از عناصر محدب (شبه محدب ) شامل صفر را دارا می باشد.

یک متریک[۳۱] $d$ بر روی فضای $X$، **پایدار** [۳۲] نامیده می شود هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ رابطه $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ را داشته باشیم .
یک فضای برداری توپولوژیک که متریکی پایدارو کامل و سازگار[۳۳] با توپولوژی خود دارد، یک فضای **فرشه** [۳۴] نامیده می شود.

---

[۲۸] Minkowski functional
[۲۹] locally convex
[۳۰] locally pesudo convex
[۳۱] metric
[۳۲] invariant
[۳۳] compatible
[۳۴] Frechet

**قضیه: ۶.۰.۱** (نگاشت باز)[۳۵] هر عملگر خطی پیوسته و پوشا بین دو فضای باناخ، باز خواهد بود.

**برهان .** رجوع کنید [۱۲]. □

این قضیه برای فضاهای فرشه نیز، برقرار می باشد (رجوع کنید [۱۱] ).

جزییات بیشتر در مورد فضاهای برداری توپولوژیک می توانند در[۳]،[۴]،[۷] و همچنین در مورد فضاهای به طور موضعی کراندار و فضاهای برداری توپولوژیک شبه نرم پذیر می توانند در [۶]،[۷]،[۱۰] پیدا شوند.

همیشه منظور از یک عملگر، یک عملگر خطی بین فضاهای برداری توپولوژیک است و همواره از نماد های $T$ و$S$ برای نشان دادن عملگرها استفاده می کنیم .

یادآوری می کنیم که یک عملگر $T$ بین دو فضای نرم دار$X$ و $Y$ کراندار است اگر و تنها اگر

$$||T|| = \sup\{||Tx||, ||x|| \leq ۱\} < \infty.$$

یک عملگر بین دو فضای نرم دار $X$ و $Y$ کراندار است اگر و تنها اگر پیوسته باشد( رجوع کنید [۱۱] ).

فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای برداری هستند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی است. رتبه [۳۶] $T$ برابر با بعد برد $T$ تعریف می شود. یک عملگرخطی بین دو فضای برداری با رتبه متناهی نامیده می شود اگررتبه آن، متناهی باشد.

اگر$A$ یک **جبر** [۳۷] باشد و $I \subseteq A$، آنگاه $I$ یک **ایده ال** [۳۸] راست ( چپ )$A$ نامیده می شود هرگاه یک زیر فضای برداری $A$ باشد و همچنین برای هر $a \in A$ و برای هر $r \in I$ رابطه $ra \in I$ ( $ar \in I$ ) را داشته باشیم.

$I$، یک ایده ال دو طرفه $A$ نامیده می شود هرگاه هم ایده ال راست و هم ایده ال چپ $A$ باشد.

اگر$A$ یک **جبر یکدار** [۳۹] باشد و $a \in A$، **مجموعه حلال** [۴۰] $a$ که با $\rho(a)$ نشان داده می شود عبارت است از همه $\lambda \in \mathbb{C}$ که $e - \lambda a$ در $A$ معکوس پذیر[۴۱] است. مجموعه حلال یک عنصر $a$ در یک **جبر غیر یکدار** [۴۲]

---

[۳۵] open mapping
[۳۶] rank
[۳۷] algebra
[۳۸] ideal
[۳۹] unital algebra
[۴۰] resolvant set
[۴۱] invertible
[۴۲] nonunital algebra

$A$ به صورت $\lambda \in \mathbb{C}$ که $e - \lambda a$ در جبر یکدار شده $A_\times$ از $A$ معکوس پذیر است، تعریف می شود.

**طیف** [۴۳] یک عنصر $a$ از یک جبر به صورت $\sigma(a) = \mathbb{C} - \rho(a)$ تعریف می شود.

وقتی $A$ یک جبر باناخ یکداراست، $\sigma(a)$ برای هر $a \in A$ فشرده و غیر تهی است ( رجوع کنید [۱۱] ). در این حالت شعاع طیفی $r(a)$ توسط فرمول گلفند[۴۴] یعنی $r(a) = \lim \sqrt[n]{\|a^n\|}$ محاسبه می شود. همچنین $r(a) = |\sigma(a)|$ که در آن $|\sigma(a)|$ شعاع هندسی در نقطه a می باشد یعنی

$$|\sigma(a)| = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

برای برهان به [۱۱] رجوع کنید.

اگر $T$ یک عملگر کراندار بر روی فضای باناخ $X$ باشد همیشه طیف $\sigma(T)$ و مجموعه حلال آن در مفهوم جبر باناخ عملگر های کراندار بر روی $X$ مورد توجه قرار می گیرند.

اگر $\lambda \in \rho(T)$ معکوس $(\lambda I - T)^{-1}$ **عملگر حلال** [۴۵] $T$ در نقطه $\lambda$ نامیده می شود و با $R_\lambda$ نشان داده می شود.

اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $|\lambda| > r(T)$ آنگاه **سری نیومن** [۴۶] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{T^i}{\lambda^{i+1}}$ به $R_\lambda$ در نرم عملگری همگرا می‌شود. برای برهان به [۱۱] مراجعه کنید.

اگر $X$ یک فضای اندازه پذیر [۴۷] و $\mu$ یک اندازه[۴۸] بر روی آن باشد، قرار دهید:

$$L^1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \ \text{اندازه پذیر است}\ f, \int_X f d\mu < \infty \}$$

آنگاه، $L^1(\mu)$ یک فضای نیم نرم دار است که می توان آن را به عنوان یک فضای نرم دار در نظر گرفت (رجوع کنید [۱۲] ).

**قضیه: ۷.۰.۱** (همگرایی تسلطی لبگ )[۴۹]

اگر $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع اندازه پذیر بر فضای اندازه پذیر $X$ با اندازه $\mu$ باشد و $f_n \to f$ (نقطه وار[۵۰] ) و اگر

---

[۴۳] spectrum
[۴۴] Gelfand formula
[۴۵] resolvent operator
[۴۶] Neumann series
[۴۷] measurable
[۴۸] measure
[۴۹] Lebesgue dominated convergence
[۵۰] pointwise

$g \in L^1(\mu)$ به قسمی باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|f_n| \le g$، آنگاه

$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$.

**برهان .** رجوع کنید به [۱۲]. □

**تبصره ۸.۰.۱** برای جزییات بیشتر در مورد فضاهای اندازه پذیر و اندازه ها به [۱۲] رجوع کنید.

اگر $0 < p < 1$، قرار دهید:

$$\ell^p = \{\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$$

$L^p([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C},$ لبگ اندازه پذیر[۵۱] است $f, \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty\}$

در این صورت $\ell^p$ و $L^p([0,1])$ فضاهای فرشه می باشند (رجوع کنید به [۱۱]).

همچنین قراردهید:

$$\ell^\infty = \{\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$$

در این صورت، $\ell^\infty$ با نرم $||\{a_n\}||_u = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ یک فضای نرم دار می باشد( رجوع کنید [۱۲] ).

**قضیه: ۹.۰.۱** (نمایش ریس برای فضاهای $\ell^p$، $0 < p < 1$ )[۵۲] یک یکریختی [۵۳] طولپا [۵۴] برای هر $0 < p < 1$، به صورت زیر برقرار است :

$$(\ell^p)^\star \cong \ell^\infty$$

**برهان .** رجوع کنید به [۱۱]. □

---

[۵۱] Lebesgue measurable
[۵۲] Riesz representation
[۵۳] isomorphism
[۵۴] isometric

# فصل ۲

# خواص فضاهای برداری توپولوژیک

## ۱.۲ خواص فضاهای برداری توپولوژیک

بسیاری از خواصی که در آنالیز در ذهن ما جای گرفته است به نوعی با مفهوم نرم ومتر رابطه داشته است ولی زمانی که بافضاهای برداری توپولوژیک دلخواه کار می کنیم این چهار چوب ذهنی زیاد هم مطمئن نخواهد بود. برای روشن شدن مطلب به مثال های زیر توجه کنید:

**مثال ۱.۱.۲** فرض کنید $C$ فضای همه توابع پیوسته بر بازه $[۰,۱]$ باشد. آن را با دو توپولوژی زیر در نظر بگیرید:

$(C,\tau)$، $C$ باتوپولوژی القایی حاصل از نیم نرم های

$$p_x(f) = |f(x)| \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$

$(C,\sigma)$ ، $C$ با توپولوژی القایی حاصل از متریک زیر

$$d(f,g) = \int_۰^۱ \frac{|f(x)-g(x)|}{۱+|f(x)-g(x)|}dx$$

حال عملگر همانی را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$id : (C,\tau) \to (C,\sigma)$$

این عملگر مجموعه های کراندار را به مجموعه های کراندار نقش می کند، زیرا $\sup_{f,g\in C} d(f,g) < \infty$. همچنین می توان از قضیه همگرایی تسلطی لبگ استفاده نمود تا نشان داد که عملگر همانی مذکور به طور دنباله‌ای پیوسته خواهد بود اماهمانطور که در زیر نشان خواهیم داد این عملگر پیوسته نمی باشد واین نشان می دهد که $(C,\tau)$ متر پذیر نمی باشدیا بطور معادل $(C,\tau)$ پایه موضعی شمارا ندارد(رجوع کنید به [۱۱]). قرار دهید:

$$V = \{f \in C, \int_۰^۱ \frac{|f(x)|}{۱+|f(x)|}dx < \frac{۱}{۱۰}\}$$

این مجموعه در$(C,\sigma)$ باز می باشد حال اگر عملگر همانی مذکور پیوسته باشد عنصری از پایه $(C,\tau)$ مانند $A$ موجود است که $A \subseteq V$.

لذا $\epsilon > 0$ و $x_1, x_2, ...x_n \in [0, 1]$ موجودند که

$$A = \{f \in C, |f(x_i)| < \epsilon, i = 1, 2, ...n\}$$

اگربرای هر $i$، $x_i = 0$، $\frac{9}{10} < \alpha < 1$ ثابتی را اختیار کرده و $n > \max\{\epsilon, \frac{1}{9-10\alpha}\}$ ثابتی را در نظر می گیریم.
تابع پیوسته $f$ را بر $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{\alpha}x & 0 \leq x < \alpha \\ n & \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

در این حالت به وضوح $f \in A$ ولی $f \notin V$.
اگر برای هر $i$، $x_i = 1$، $\frac{1}{10} < \alpha < 1$ ثابتی را اختیار کرده و $n > \max\{\epsilon, \frac{1}{10\alpha-1}\}$ ثابتی را در نظر می گیریم.
تابع پیوسته $f$ را بر $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} n & 0 \leq x < \alpha \\ \frac{n}{\alpha-1}x + \frac{n}{1-\alpha} & \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

در این حالت نیز به وضوح $f \in A$ ولی $f \notin V$.
حال فرض کنید $x_i \in (0, 1)$ کوچکترین عضو مجموعه $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ باشد. در این صورت $0 < \alpha < \min\{x_i, \frac{1}{10}\}$ ثابتی را اختیار کرده و $n \in \mathbb{N}$ چنان بزرگ بگیرید که $n \geq \max\{\frac{1}{10\alpha-1}, \epsilon\}$.
تابع پیوسته $f$ را با ضابطه زیر بر $[0, 1]$ تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} n & 0 \leq x < \alpha \\ \frac{n}{\alpha-x_1}x - \frac{n}{\alpha-x_1}x_1 & \alpha \leq x < x_1 \\ 0 & x_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

به وضوح $f$ در $A$ قرار دارد ولی در $V$ قرار ندارد زیرا

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}dx \geq \int_0^\alpha \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}dx = \frac{n}{n+1}\alpha \geq \frac{1}{10}$$

و این تناقض نشان می دهد که عملگر همانی مذکور پیوسته نمی باشد.
همچنین معکوس عملگر همانی مذکور نیز پیوسته نمی باشد. زیرا اگر پیوسته باشد، فرض کنید:

$$V = \{f \in C, |f(x_\circ)| < \frac{۱}{۱\circ}\}$$

که $x_\circ \in (\circ, ۱)$ دلخواه است . به وضوح $V$ در $(C, \tau)$ باز می باشد پس یک عضو پایه در $(C, \sigma)$ مانند $A$ موجود است به طوری که $A \subseteq V$
لذا $\delta > \circ$ موجود است که

$$A = \{f \in C, \int_\circ^۱ \frac{|f(x)|}{۱+|f(x)|} dx < \delta\}$$

اعداد $\alpha, \beta > \circ$ را حول $x_\circ$ چنان اختیار کنید که $\beta - \alpha < \delta$
حال تابع پیوسته $f$ با ضابطه زیر رابر $[\circ, ۱]$ در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \circ & \circ \leq x < \alpha \\ \frac{۱}{x_\circ - \alpha} x - \frac{\alpha}{x_\circ - \alpha} & \alpha \leq x < x_\circ \\ \frac{۱}{x_\circ - \beta} x - \frac{\beta}{x_\circ - \beta} & x_\circ \leq x < \beta \\ \circ & \beta \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

به وضوح $f \in A$ زیرا

$$\int_\circ^۱ \frac{|f(x)|}{۱+|f(x)|} dx \leq \int_\circ^۱ |f(x)| dx = \int_\alpha^\beta |f(x)| dx = \frac{\beta - \alpha}{۲} < \beta - \alpha < \delta$$

اما $f \notin V$ زیرا $\frac{۱}{۱\circ} \geq ۱ = |f(x_\circ)|$ و این تناقض نشان می دهد که عملگر مذکور پیوسته نمی باشد.

**تبصره ۲.۱.۲** دقت کنید از اینکه یک فضای برداری توپولوژیک به طور موضعی محدب نباشد، نمی توان نتیجه گرفت که دارای هیچ همسایگی محدبی نیست.
یک مثال نقض در این مورد فضاهای $\ell^p$ برای $۱ > p > \circ$ می باشند که با استناد به قضیه نمایش ریس $(\ell^p)^\star \cong \ell^\infty$ و لذا $\ell^\infty$ نقاط $\ell^p$ را جدا می کند و بنابراین $\ell^p$ با توپولوژی ضعیف خود یک فضای به طور موضعی محدب است. لذا در توپولوژی اصلی تعداد بسیاری همسایگی محدب وجود دارند ولی به‌اندازه کافی زیاد نیستند که تشکیل یک پایه موضعی دهند (رجوع کنید [۱۱] ).