جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تربیت معلم

" بسمه تعالی "

جلسه دفاع از پایاننامه $\frac{\text{ﺧﺎﻧﻢ/ﺁﻗﺎ}}{\text{ﺧﻮاﻫﺮ}}$ مژگان مقرب دانشجوی دوره کارشناسی

ارشد ریاضی در روز شنبه مورخه ۱۳۷۰/۱۱/۲۶ در موسسه‌ی ریاضیات تشکیل گردید

ونتیجه آزمون به شرح زیر تعیین میگردد. نمره این آزمون ۱۶٫۵ (شانزده و نیم) می باشد.

۱ـ عالی ☐

۲ـ خوب ☑

۳ـ متوسط ☐ — نیاز به تجدید نظر دارد ☐ / نیاز به تجدید نظر ندارد ☐

۴ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما

آقای دکتر بیژن زاده

۱۳۷۰/۱۱/۲۶

ممتحنین داخلی

۱ـ آقای دکتر ذاکری

۲ـ

ممتحنین خارجی

۱ـ آقای دکتر طاهری زاده

۲ـ

اسکن شد
تاریخ :
توسط :

طاهر قاسمی

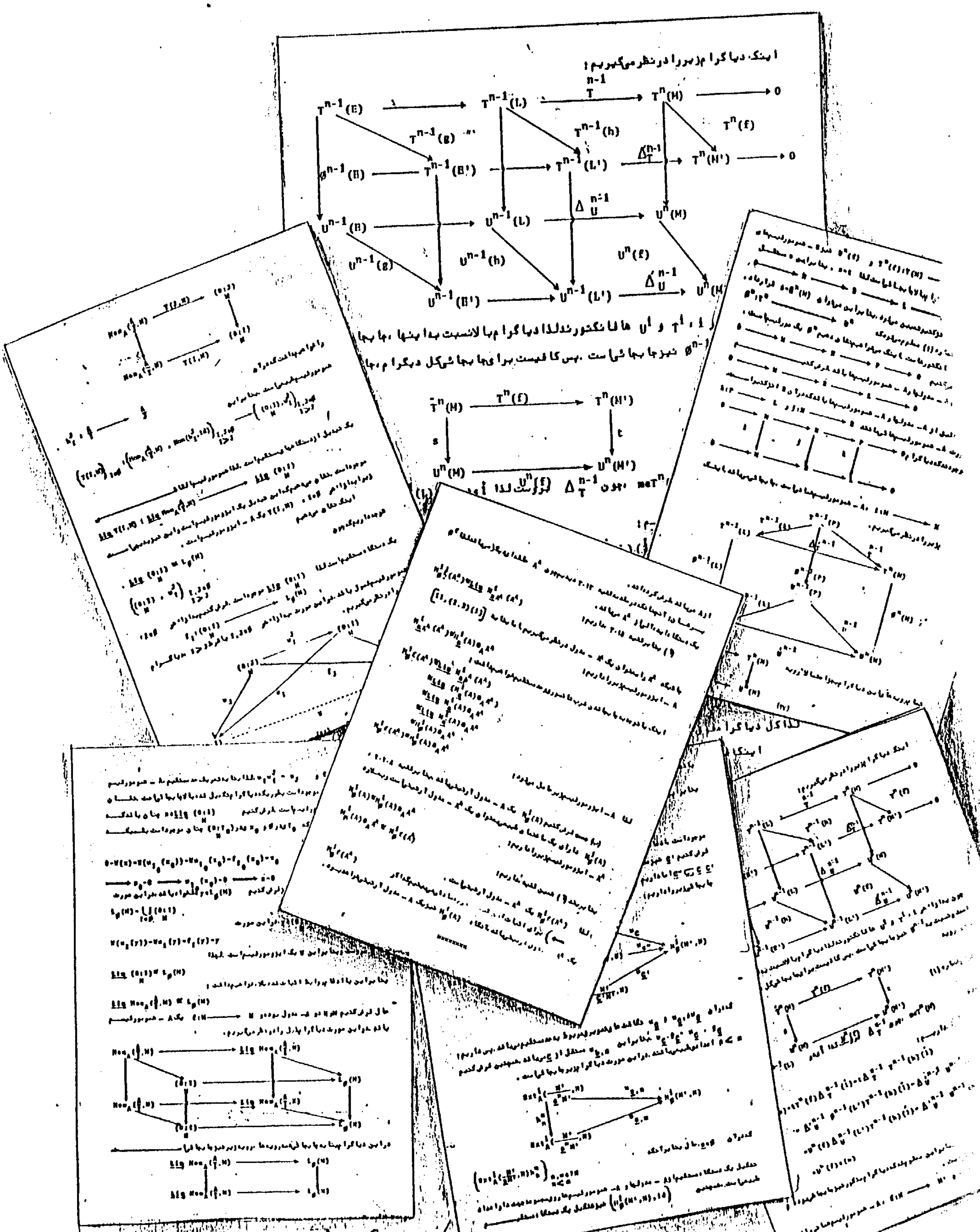
سرپرست موسسه‌ی ریاضیات

دکتر غلامحسین مصاحب

۱۴۴۷

١٥٤٤٧

ON THE ARTINIAN PROPERTY OF CERTAIN GENERAL LOCAL COHOMOLOGY MODULES



١٥٤٤٧

تقــــدیــم بـــــه:

خواهرم	مژده
برادرم	علــی
همســرم	محمــد
پســرم	علـــی

خواص آرتینی مدولهای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته و یژه

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خدای منان را که به من آن توفیق را اعطا نمود تا به باغ علم و دانش قدم گذارده و این دفتر را از ثمرهٔ تلاش دیگران گلچین کنم .

دفتر حاضر برداشت و تعمیم خواص مدولهای کوهمولوژی موضعی است که بر اساس نظریه استاد معظم ، دکتر بیژن زاده و با استفاده از مقالات پروفسور شارپ تنظیم یافته است .

برخود فرض می‌دانم که از راهنمایی‌ها و دلسوزی‌های عالمانه ایشان و استادان گرامی ، آقایان دکتر ذاکری و دکتر فرودی که در تهیه این پایان نامه مرا یاری نموده‌اند ، تشکر و قدردانی کنم .

همچنین زحمت و دقت عمل آقای دکتر طاهری‌زاده به عنوان داور خارجی شایسته سپاسگزاری است .

نیز مایلم مراتب امتنان خود را از کلیهٔ کارکنان موسسهٔ ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب بخصوص خانم یعقوب زاده که همواره با همکاری صادقانه خود به چرخ تحصیل ما سرعت بخشیده‌اند و خانم صمدیان که با حوصله و دقت ویژه ، تایپ این پایان نامه را برعهده داشته‌اند ، ابراز دارم .

٥- خلاصهء پایان نامه

دفتر حاضر با عنوان " خواص آرتینی مدولهای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته و ویژه " بوده و مشتمل بر پنج فصل می باشد. چهار فصل اول مقدمات تحقیق را فراهم نموده، و در فصل پنج به نتیجه گیری می پردازیم.

فصل اول مربوط به " حد مستقیم و معکوس " است که رابطه تنگاتنگی با مبحث همولوژی دارد. در خلال آن نشان می دهیم که با تقریب ایزومورفیسم حد منحصر بفرد است. همچنین نشان می دهیم حد مستقیم با ضرب تانسوری جابجا پذیر است و اینکه حد مستقیم فانکتور همورد ودقیق بوده و حد مستقیم فانکتور همورد ودقیق چپ است.

فصل دوم با عنوان " کمال " است. در این فصل توپولوژی و فضاهای توپولوژیکی را معرفی می نمائیم و مفهوم کمال را ارائه می دهیم. سپس نسبت به توپولوژی فیلتری، نشان می دهیم که چگونه می توان یک مدول را به یک مدول کامل تبدیل نمود و از این طریق به کامل یک حلقه دلخواه دست می یابیم.

در فصل سوم که " فانکتورهای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته و برخی نتایج " نام دارد برای یک حلقه دلخواه، دستگاه ایده آلی معرفی می نمائیم.

در خلال این فصل نشان می دهیم که i-امین فانکتور مشتق شده راست فانکتور

$\varinjlim \operatorname{Hom}_A(\frac{A}{I},-)$ با $\varinjlim \operatorname{Ext}^i_A(\frac{A}{I},-)$

بطور طبیعی هم ارزند.

همچنین نشان می دهیم به ازاء هر $i \geqslant 0$،

$$\varinjlim \operatorname{Ext}^i_A(\frac{A}{I},-) = H^i(-)$$

فرض کنیم $\underline{a}$ ایده آلی از حلقه موضعی و نوتری A باشد توپولوژی $\underline{a}$- ادیک را در نظر گرفته و $A^\wedge$ را تشکیل می دهیم و نشان می دهیم که $H^i_{\emptyset}(A)$ یک A- مدول آرتینی است اگر وتنها اگر $H^i_{\emptyset f}(A^\wedge)$ یک $A^\wedge$- مدول آرتینی باشد که در آن $f:A \longrightarrow A^\wedge$ هومومورفیسم طبیعی است.

در فصل چهار نگاهی اجمالی به نظریه تاب داریم که به معرفی کوتاه نظریه تاب و رادیکال تابی و مدولهای تابی و آزاد می پردازیم و نشان می دهیم که فانکتور کوهمولوژی

موضعی‌یک را دیکال تابی‌است وهمچنین فیلترخودتوان را تعریف کرده‌ونشان می‌دهیم که‌هرفیلترخودتوان یک دستگاه ایده‌آلی‌است .

عنوان فصل پنجم " مدولهای‌کوهمولوژی‌موضعی‌و موضعی‌تعمیم‌یافته‌بعضی‌از مدولها ، آرتینی‌اند" می‌باشد . دراین فصل نشان می‌دهیم‌که‌اگر $(A,\underline{m})$ حلقه‌ای‌موضعی‌با بعد n باشدآنگاه $H^i_{\underline{m}}(M)$ یک A - مدول آرتینی‌است .واگر M یک A ـ مدول با تولید متناهی‌باشدآنگاه‌به‌ازاءهر $i \geqslant 0$ ، $H^i_{\underline{m}}(M)$ یک A ـ مدول آرتینی‌است .

" فهرست "

فصل اول: "حدمستقیم و معکوس"[1]

I – حدمستقیم

در این بخش ابتدا حدمستقیم را معرفی نموده و به قضایا و نتایجی در مورد آن پرداخته وسپس موجودیت آن را نشان می‌دهیم. درسرتاسر این فصل همواره A حلقه‌ای جابجایی ویکدار بوده و M یک A – مدول است.

تعریف : فرض می‌کنیم $(I,\leqslant)$ یک مجموعهٔ جزئا "مرتب باشد. گوئیم I یک "مجموعه جهت دار"[2] است هرگاه به ازاء هر زوج i, j از I، عضوی مانند k از I چنان موجود باشدکه $i\leqslant k$ و $j\leqslant k$. درسرتاسر این فصل I را مجموعه‌ای جهت دار می‌دانیم.

تعریف : فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از A – مدولها بوده و به ازاء هر i و j متعلق به I با شرط $i\leqslant j$، یک A – هومورفیسم

$$u_{ij}:M_i \longrightarrow M_j$$

داشته باشیم بطوریکه دوشرط زیر برقرار باشد:

آ) اگر $i\leqslant j\leqslant k$، آنگاه دیاگرام

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "u_{ij}"] \arrow[dr, "u_{ik}"'] & & M_j \arrow[dl, "u_{jk}"] \\ & M_k & \end{tikzcd}$$

جابجائی بوده یعنی داشته باشیم: $u_{jk}u_{ij}=u_{ik}$

ب) به ازاء هر i متعلق به I، $u_{ii}:M_i \longrightarrow M_i$ A – هومورفیسم همانی باشد. در این صورت گوئیم خانوادهٔ $\{M_i\}_{i\in I}$ به انضمام $\{U_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$ یک "دستگاه مستقیم"[3] روی I است. برای راحتی نماد $\{M_i,u_{ij}\}_{\substack{j,i\in I\\ i\leqslant j}}$ را برای نمایش این دستگاه مستقیم بکار می‌بریم.

تعریف : فرض کنیم $\{M_i,u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$ یک دستگاه مستقیم و M یک A – مدول باشد. نیزفرض کنیم $\{u_i:M_i \longrightarrow M\}_{i\in I}$ یک خانواده از A – هومورفیسم‌ها چنان باشدکه به ازاء هر $i,j\in I$، با شرط $i\leqslant j$، دیاگرام زیر جابجائی باشد.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "u_{ij}"] \arrow[dr, "u_i"'] & & M_j \arrow[dl, "u_j"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

یعنی داشته باشیم $u_j u_{ij} = u_i$. در این صورت گوئیم خانواده $\{u_i\}_{i\in I}$
یک مورفیسم بردستگاه مستقیم فوق بتوی M است .

تعریف : یک مورفیسم $\{u_i\}_{i\in I}$ بردستگاه مستقیم $\{M_i , u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$ بتوی A ـ مدول M را عمومی‌نامیم هرگاه به ازاء هر A ـ مدول M' و هر مورفیسم $\{t_i : M_i \longrightarrow M'\}$ بردستگاه مستقیم مذکور بتوی M' ، یک وفقط یک A ـ همومورفیسم $f : M \longrightarrow M'$ چنان موجود باشد بطوریکه به ازاء هر $i\in I$ ، دیاگرام زیر جابجائی باشد .

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dr, "t_i"] & \\
M \arrow[rr, "f"'] & & M'
\end{tikzcd}$$

یعنی $fu_i = t_i$.

۱.۱.۱ قضیه : فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از A ـ مدولها بوده و

$$\coprod_{i\in I} M_i = \left\{ \{x_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; \text{فقط تعداد متناهی از } x_i \text{ ها ناصفرند} \right\}$$

نیزفرض کنیم D زیرمدول تولیدشده توسط

$$\left\{ (\dots, x_i, \dots, -u_{ij}(x_i), \dots) \in \coprod_{i\in I} M_i \;\middle|\; x_i \in M_i \text{ و } i,j\in I \,,\ i\leqslant j \right\}$$

از A ـ مدول $\coprod_{i\in I} M_i$ باشد . A ـ مدول خارجقسمتی $\dfrac{\coprod_{i\in I} M_i}{D}$ را به $\varinjlim M_i$ نمایش داده وآنرا "حدمستقیم"[۴]، دستگاه مستقیم $\{M_i , u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$ می‌نامیم. حال به ازاء هر $i\in I$ ، $u_i : M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ را با ضابطه

$$u_i(x_i) = \{\delta_{ij} x_i\}_{i,j\in I} + D = \overline{\{\delta_{ij} x_i\}}_{i,j\in I}$$

برای هر $x_i \in M_i$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

دلتای کرونکر است .

در این صورت u_i یک A ـ همومورفیسم‌بوده‌و $\left\{u_i : M_i \longrightarrow \varinjlim M_i\right\}$ یک مورفیسم‌عمومی‌بردستگاه مستقیم $\left\{M_i , u_{ij}\right\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$ بتوی $\varinjlim M_i$ است.

(برای سهولت از نماد $\overline{(\ldots,0,x_i,0,\ldots)}$ بجای $\overline{\left\{\delta_{ij}x_i\right\}_{i,j\in I}}$ استفاده میکنیم.)

برهان: A ـ همومورفیسم‌بودن u_i ها بدیهی است. برای اثبات مورفیسم‌بودن $\left\{u_i\right\}_{i\in I}$ باید نشان دهیم‌به‌ازاء هر $i,j\in I$، اگر $i\leqslant j$ آنگاه $u_j u_{ij}=u_i$

به‌ازاء هر $x_i\in M_i$، داریم:

$$(u_j u_{ij})(x_i)=u_j(u_{ij}(x_i))$$
$$=\overline{(\ldots,0,u_{ij}(x_i),0,\ldots)}$$
$$=\overline{(\ldots,0,-x_i,\ldots,u_{ij}(x_i),\ldots)}+\overline{(\ldots,0,x_i,0,\ldots)}$$
$$=\overline{(\ldots,0,x_i,0,\ldots)}=u_i(x_i)$$

اینک برای نشان دادن عمومی‌بودن $\left\{u_i\right\}$، فرض میکنیم $\left\{t_i : M_i \longrightarrow M\right\}_{i\in I}$ یک مورفیسم‌دلخواه‌بردستگاه مستقیم‌داده‌شده‌بتوی A ـ مدول دلخواه M باشد. باید نشان دهیم‌یک وفقط یک A ـ همومورفیسم $f:\varinjlim M_i \longrightarrow M$ چنان موجوداست که‌به‌ازاء هر $i\in I$، $fu_i=t_i$.

یکتائی f : فرض‌کنیم f یک A ـ همومورفیسم‌باشدبطوریکه‌به‌ازاء هر $i\in I$، $fu_i= t_i$. بدنبال ضابطه f هستیم. اگر $\left\{x_i\right\}$ یک عضودلخواه از $\varinjlim M_i$ باشد، آنگاه‌با توجه‌به‌اینکه‌فقط تعداد متناهی از x_i ها ناصفرند، داریم:

$$f(\overline{\left\{x_i\right\}})=f(\overline{\sum(\ldots,0,x_i,0,\ldots)})=f(\sum\overline{(\ldots,0,x_i,0,\ldots)})$$
$$=\sum f(\overline{\ldots,0,x_i,0,\ldots})=\sum fu_i(x_i)=\sum t_i(x_i)$$

پس f درصورت وجود، ناگزیرباید با ضابطه $f(\overline{\left\{x_i\right\}})=\sum t_i(x_i)$ تعریف شود. بعبارت دیگر f درصورت وجودمنحصربفرداست.

وجود f : ابتدا خوش تعریفی f را بررسی‌کرده‌و A ـ همومورفیسم‌بودن f را بدون اثبات می‌پذیریم.

فرض کنیم $\{x_i\},\{x'_i\} \in \varinjlim M_i$ با شرط $\{x_i\}=\{x'_i\}$ باشد. داریم:

$$\{x_i\}-\{x'_i\}\in D \Longrightarrow \{x_i-x'_i\} \in D$$
$$\Longrightarrow \{x_i-x'_i\}=\sum_{k\leqslant L}(\ldots,y_k,\ldots,-u_{kL}(y_k),\ldots)$$
$$\Longrightarrow t_i(x_i-x'_i)=\sum_{k\leqslant L}(t_k(y_k)+t_L(-u_{kL}(y_k)))$$

وچون t_i $i\in I$ یک مورفیسم است لذا $\sum t_i(x_i-x'_i)=\sum_{k\leqslant L}(t_k(y_k)-t_k(y_k))=\sum 0=0$

لذا $\sum t_i(x_i)=\sum t_i(x'_i)$ ولهذا f خوش تعریف است.

xxxxxxxxxxxxxxxxxx

۱۰۱۰۲ قضیه: (آ) فرض کنیم $\{y_i\}_{i\in I}\in \varinjlim M_i$، دراین صورت یک i در I ویک x_i در M_i چنان موجوداست که: $u_i(x_i)=y_i$

(ب) اگر $i\in I$ و $x_i\in M_i$ بقسمیکه $u_i(x_i)=0\in \varinjlim M_i$، دراین صورت یک j در I با شرط $i\leqslant j$ چنان موجوداست که: $u_{ij}(x_i)=0\in M_j$

برهان: (آ) میدانیم که در $\{y_i\}_{i\in I}$ فقط عده متناهی از y_i ها ناصفرند.

فرض کنیم $y_{i_1},\ldots,y_{i_k}$ همه y_i های ناصفرباشند. چون I یک مجموعه جهت دار است لذا i ی در I به استقراء چنان موجوداست که

$$i_1\leqslant i \quad \& \quad i_2\leqslant i \quad \& \quad \ldots \quad \& \quad i_k\leqslant i$$

قرارمی‌دهیم:

$$x_i=u_{i_1 i}(y_{i_1})+u_{i_2 i}(y_{i_2})+\ldots+u_{i_k i}(y_{i_k})$$

داریم:

$$u_i(x_i)=u_iu_{i_1 i}(y_{i_1})+u_iu_{i_2 i}(y_{i_2})+\ldots+u_iu_{i_k i}(y_{i_k})$$
$$=u_{i_1}(y_{i_1})+u_{i_2}(y_{i_2})+\ldots+u_{i_k}(y_{i_k})$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\overline{(\ldots,0,y_{i_j},0,\ldots)}=\overline{\{y_i\}}_{i\in I}$$

(ب)

$$u_i(x_i)=0 \Longrightarrow \overline{(\ldots,0,x_i,0,\ldots)}=0\in \varinjlim M_i$$
$$\Longrightarrow (\ldots,0,x_i,0,\ldots)\in D$$

$$\Longrightarrow (\ldots,0,x_i,0,\ldots)=\sum_{k\leqslant L}(\ldots,z_k,\ldots,-u_{kL}(z_k),\ldots)$$

فرض کنیم $j\in I$ چنان انتخاب شده باشد که $i\leqslant j$ و به ازای هر k و L ظاهر شده در فرمول بالا، داشته باشیم $k\leqslant j$ و $L\leqslant j$. ثابت می‌کنیم $u_{ij}(x_i)=0$.

$$(\ldots,0,u_{ij}(x_i),0,\ldots)=(\ldots,-x_i,\ldots,-u_{ij}(-x_i),\ldots)+(\ldots,x_i,\ldots)$$

$$=(\ldots,-x_i,\ldots,-u_{ij}(-x_i),\ldots)+\sum(\ldots,z_k,\ldots,-u_{kL}(z_k),\ldots)$$

$$=(\ldots,-x_i,\ldots,-u_{ij}(-x_i),\ldots)+\sum\big((\ldots,z_k,\ldots,-u_{kj}(z_k),\ldots)$$

$$+(\ldots,-u_{kL}(z_k),\ldots,-u_{Lj}(-u_{kL}(z_k))$$

$$=\sum_t(\ldots,\ {}_t,\ldots,-u_{tj}(W_t),\ldots)$$

اگر $t\neq j$، آنگاه چون مؤلفه t ام طرف اول مساوی صفر است خواهیم داشت $W_t=0$
و اگر $t=j$، آنگاه مؤلفه j ام، $(\ldots,W_t,\ldots,-u_{tj}(W_t),\ldots)$
عبارتست از $W_j-u_{jj}(W_j)$ که این نیز بنا به تعریف دستگاه مستقیم، برابر صفر است.
لذا طرف دوم تساوی در هر صورت صفر است. پس $(\ldots,u_{ij}(x_i),\ldots)=\{0\}$
لهذا $u_{ij}(x_i)=0$.

xxxxxxxxxxx

تعریف: فرض کنیم $\{M'_i,u'_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$ ، $\{M_i,u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$

دو دستگاه مستقیم روی I باشند. یک مورفیسم بر دستگاه اول بتوی دستگاه دوم عبارتست از یک خانواده $f_i:M'_i\longrightarrow M_i$ از Aـ هومومورفیسم‌ها بطوریکه به ازاء هر $i,j\in I$، اگر $i\leqslant j$، آنگاه $u_{ij}f_i=f_ju'_{ij}$. یعنی دیاگرام زیر جابجائی است.

$$\begin{tikzcd} M'_i \arrow[r, "u'_{ij}"] \arrow[d, "f_i"'] & M'_j \arrow[d, "f_j"] \\ M_i \arrow[r, "u_{ij}"'] & M_j \end{tikzcd}$$

به آسانی ثابت می‌شود که خانواده $\{u_if_i\}_{i\in I}$ یک مورفیسم بردستگاه اول بتوی $\varinjlim M_i$ است. از آنجا چون خانواده $\{u'_i\}$ یک مورفیسم عمومی است، لذا یک وفقط یک A- همومورفیسم $f:\varinjlim M'_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ موجود است که به ازاء هر $i\in I$ ، $u_if_i=fu'_i$. یعنی دیاگرام زیر جابجائی است.

$$\begin{tikzcd}
M'_i \arrow[r, "u'_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \varinjlim M'_i \arrow[d, "f"] \\
M_i \arrow[r, "u_i"'] & \varinjlim M_i
\end{tikzcd}$$

برای تعیین ضابطه f ، فرض کنیم $\overline{\{x_i\}}$ یک عضو دلخواه $\varinjlim M'_i$ باشد. داریم:

$$f(\overline{\{x'_i\}}_{i\in I})=f(\sum\overline{(\ldots,0,x'_i,0,\ldots)})=f(\sum u'_i(x'_i))$$

$$=\sum fu'_i(x'_i)=\sum u_if_i(x'_i)$$

$$=\sum\overline{(\ldots,0,f_i(x'_i),0,\ldots)}$$

$$=\overline{\{f_i(x'_i)\}}$$

تعریف: یک دنباله دقیق

$$\{M'_i,u'_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}} \xrightarrow{\{f_i\}} \{M_i,u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}} \xrightarrow{\{g_i\}} \{M''_i,u''_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leqslant j}}$$

بین دستگاه‌های مستقیم یعنی یک خانواده از دنباله دقیق $M'_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M''_i$

به ازاء هر $i\in I$ ، بطوریکه $\{f_i\}$ و $\{g_i\}$ مورفیسم‌های بین دو دستگاه می‌باشند یعنی به ازاء هر $i\leqslant j$ ، دیاگرام زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd}
M'_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u'_{ij}"'] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_{ij}"] & M''_i \arrow[d, "u''_{ij}"] \\
M'_j \arrow[r, "f_j"'] & M_j \arrow[r, "g_j"'] & M''_j
\end{tikzcd}$$

۱۰۱۰۳ قضیه : فرض کنیم Dir کاتگوری دستگاههای مستقیم از A ـ مدولها و A ـ همومورفیسم‌های روی I و مورفیسم‌های بین این دستگاههای مستقیم بوده و $\mathcal{C}(A)$ کاتگوری A ـ مدولها و A ـ همومورفیسم‌ها باشد. در این صورت فانکتور

$$\varinjlim : \mathrm{Dir} \longrightarrow \mathcal{C}(A)$$

یک فانکتور همورد دقیق است بطوریکه یک دستگاه مستقیم $\{M_i, u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$

را به $\varinjlim M_i$ و یک مورفیسم

$$\{f_i\} : \{M'_i, u'_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}} \longrightarrow \{M_i, u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$$

را به یک A ـ همومورفیسم $f : \varinjlim M'_i \longrightarrow \varinjlim M_i$

با ضابطه $f(\overline{\{x'_i\}}_{i\in I}) = \overline{\{f_i(x'_i)\}}_{i\in I}$ می‌برد. این f را با $\varinjlim f_i$ نیز نمایش می‌دهند.

برهان: فرض کنیم $\{f_i\} : \{M'_i, u'_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}} \longrightarrow \{M_i, u_{ij}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$

یک مورفیسم باشد در این صورت به ازاء هر $i\in I$ ، $f_i : M'_i \longrightarrow M_i$ یک A ـ همومورفیسم بوده و بعلاوه به ازاء هر $i\leq j$ ، دیاگرام زیر جابجائی است.

$$\begin{tikzcd}
M'_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u'_{ij}"'] & M_i \arrow[d, "u_{ij}"] \\
M'_j \arrow[r, "f_j"'] & M_j
\end{tikzcd}$$

یعنی $f_j u'_{ij} = u_{ij} f_i$. در این صورت دیاگرام جابجائی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{tikzcd}
 & M'_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u'_{ij}"] \arrow[dl, "u'_i"'] & M_i \arrow[d, "u_{ij}"] \arrow[dr, "u_i"] & \\
 & M'_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[dl, "u'_j"] & M_j \arrow[dr, "u_j"'] & \\
\varinjlim M'_i \arrow[rrr, dashed, "f"'] & & & \varinjlim M_i
\end{tikzcd}$$