

صلى الله عليه وسلم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
آمار

مدل نرخ شکست متناسب برای زمان‌های متوالی بر پایه‌ی
سانسور آگاهی بخش

استاد راهنما: دکتر حمزه ترابی

استاد مشاور: دکتر عیسی محمودی

پژوهش و نگارش: نعیمه دهقانی

مهر ماه ۱۳۹۲

تقدیم بہ

پدرو مادر مہربانم

تختہ ہی ناچنیز ذہن کو چکم را
بہ بلندای بی کران وجودتان پیش کش می کنم
بہ آرزوی آن کہ قطرہ کون وجودم را
بہ بی انتہائی دریای سخاوتان پذیرا باشید.



سپاس

حمد و سپاس ایند منان را که با الطاف بی کران خود، طلیعه‌ی علم آموزی را در وجودم نهاد و اشتیاق پویدن این مسیر
نه‌خندان سهل را به من عنایت فرمود. پس از او، سپاس گزارم از پدر و مادر عزیزم که فروغ نگاهشان امید بخش زندگی ام
است. بوسه بردستان پر مهرشان می‌زنم و از خداوند می‌خواهم وجودشان را همیشه سرسبز و استوار گرداند.

از استاد مشاور کران قدرم، جناب آقای دکتر عیسی محمودی که راهبانی‌های ارزنده‌ی خود را در راستای اعتلای
این پایان نامه از من دریغ ننمودند، کمال تشکر و امتنان دارم. هم‌چنین از اساتید گرامی، دکتر دولتی و دکتر فلاح زاده
که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند، تشکر می‌نمایم.

با نهایت احترام، از اساتید بزرگوار گروه آمار دانشگاه یزد، چه آنان که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و چه آنان
که از محضر پر فیضان محروم ماندم، سپاس گزار می‌کنم.

از دوست خوبم خانم مشکوتی و خواهر و برادرم که مایه‌ی امید و دلگرمی من بوده‌اند، سپاس گزارم و از پروردگار،
حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برایشان خواستارم.

و اما...

زانوی ادب در برابر استاد ارجمندی می‌زنم که بخطه‌ای مراد مسیر پر فراز و نشیب این پایان نامه به حال خود
وانگذاشتند. استاد فریخته‌ای که همیشه و همه‌وقت راهبانی‌هایشان، روشنی دیده‌ی تاریک ذهنم و راهکارهایشان، کلیدی
برد های بستی مقابلم بوده است.

زحمت استاد راهبانی بزرگوارم جناب آقای دکتر حمزه‌تربانی را ارج می‌نم و این پژوهش را اگر قدریست، با
احترام و ارادت، پیش کش ایشان نیز می‌نمایم.

چکیده

امروزه تحلیل داده‌های بقا، کاربرد وسیعی در رشته‌های مختلف علوم از جمله پزشکی و مهندسی دارد. یکی از روش‌های متداول برای پیش‌بینی احتمال بقا، استفاده از مدل نرخ شکست متناسب کاکس است. در این مدل، برقراری فرض استقلال میان زمان سانسور و زمان پیشامد، یکی از فرض‌های اساسی به شمار می‌رود. ولی گاهی برقراری این فرض امکان‌پذیر نیست؛ در این موارد از سانسور وابسته استفاده می‌شود.

در این پایان‌نامه مدل نرخ شکست متناسب برای داده‌های زمان شکست یک متغیره و دو متغیره، ارائه می‌گردد. سپس شیوه‌ی استنباط نیم‌پارامتری برای این داده‌ها استفاده می‌شود و این شیوه تحت طرح سانسور آگاهی‌بخش گسترش می‌یابد. در ادامه، ویژگی برآوردهای پارامترها و توابع نرخ شکست پایه در حالت دو متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام این برآوردها با استفاده از شبیه‌سازی ارزیابی می‌گردد و هم‌چنین روش استفاده از داده‌های واقعی، نشان داده می‌شود.

فهرست مطالب

۵	۱ مفاهیم و تعاریف اولیه
۶	۱.۱ تحلیل بقا
۶	۱.۱.۱ تابع بقا
۷	۲.۱.۱ تابع بقای دو متغیره
۷	۳.۱.۱ تابع زیربقا
۸	۴.۱.۱ تابع نرخ شکست
۹	۵.۱.۱ تابع نرخ شکست تکه‌ای-ثابت
۹	۶.۱.۱ مدل نرخ شکست متناسب
۱۱	۲.۱ انواع سانسور
۱۲	۱.۲.۱ سانسور چپ
۱۲	۲.۲.۱ سانسور راست
۱۲	۳.۲.۱ سانسور نوع اول
۱۳	۴.۲.۱ سانسور نوع دوم
۱۴	۵.۲.۱ سانسور تصادفی
۱۴	۶.۲.۱ سانسور آگاهی‌بخش و ناآگاهی‌بخش
۱۵	۷.۲.۱ سانسور آگاهی‌بخش جزئی
۱۵	۳.۱ مجموعه‌ی ریسک
۱۵	۴.۱ تعاریف و قضایای احتمالی مورد نیاز

۱۶	همگرایی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی	۱۰۴.۱
۱۸	مفاهیم استنباطی مورد نیاز	۵.۱
۱۹	مدل نیم پارامتری	۱۰۵.۱
۱۹	روش ماکسیمم درست‌نمایی جزئی	۲۰۵.۱
۲۲	روش ماکسیمم درست‌نمایی نیم‌رخ	۳۰۵.۱
۲۳	مفاهیم آنالیزی مورد نیاز	۶.۱
۲۵	انتگرال ریمان-اشتلیس	۱۰۶.۱
۲۷	۲ استنباط آماری در مدل نرخ شکست متناسب	
۲۸	حالت یک متغیره بدون سانسور	۱.۲
۳۱	حالت یک متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش	۲.۲
۳۵	حالت یک متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش جزئی	۳.۲
۴۱	حالت دو متغیره بدون سانسور	۴.۲
۴۵	حالت دو متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش	۵.۲
۵۷	۳ ویژگی‌های برآوردگرها	
۵۸	تعاریف	۱.۳
۶۲	ویژگی‌های برآوردگرها در حالت دو متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش	۲.۳
۶۹	۴ ارزیابی روش استنباطی با استفاده از شبیه‌سازی و داده‌های واقعی	
۷۰	مقدمه	۱.۴
۷۰	مطالعات شبیه‌سازی	۲.۴
	شبیه‌سازی در حالت یک متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش و طرح	۱.۲.۴
۷۱	سانسور آگاهی‌بخش جزئی	
۷۵	شبیه‌سازی در حالت دو متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش	۲.۲.۴
۸۰	تحلیل داده‌های واقعی	۳.۴

۸۳	الف برنامه‌های کامپیوتری
	الف. برنامه‌ی شبیه‌سازی برآورد پارامترهای a ، b و β_0 در حالت یک متغیره با طرح سانسور
۸۳	آگاهی‌بخش
	الف. برنامه‌ی شبیه‌سازی برآورد پارامترهای a ، b و β_0 در حالت یک متغیره با طرح سانسور
۸۵	آگاهی‌بخش جزئی
	الف. برنامه‌ی شبیه‌سازی برآورد پارامترهای a ، b ، β_1 و β_2 در حالت دو متغیره با طرح
۸۸	سانسور آگاهی‌بخش
	الف. برنامه‌ی برآورد توابع نرخ شکست انباشته و تابع بقای توأم داده‌های واقعی دو متغیره
۹۳	با طرح سانسور آگاهی‌بخش
	الف. برنامه‌ی رسم نمودار توابع نرخ شکست انباشته داده‌های واقعی دو متغیره با طرح
۹۷	سانسور آگاهی‌بخش
۹۹	ب واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
۱۰۳	پ واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
۱۰۶	مراجع

فهرست شکل‌ها

۲۱	نمایش مجموعه‌ی ریسک برای داده‌های سانسور شده و ساختار درست‌نمایی جزئی	۱.۱
۴۶	نمایش سانسور دو پیشامد متوالی	۱.۲
۸۲	نمودار لگاریتم تابع نرخ شکست انباشته‌ی T_1	۱.۴
۸۲	نمودار لگاریتم تابع نرخ شکست انباشته‌ی T_2 به شرط T_1	۲.۴

فهرست جدول‌ها

۱۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای a, b و β_0 برای $a = 0.5, b = 1$ و $\beta_0 = 1.5, 3$ به ازای مقادیر مختلف \bar{b} و n	۷۲
۲۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای a, b و β_0 برای $a = -0.7, b = 0.2$ و $\beta_0 = 1.5, 3$ به ازای مقادیر مختلف \bar{b} و n	۷۳
۳۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای a, b و β_0 برای $a = -0.4, b = 0.9$ و $\beta_0 = 0.5, 1.8$ و مقادیر مختلف \bar{b} و n به ازای $\beta_1 = 1, 0.3$	۷۴
۴۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای a, b و β_0 برای $a = 1, b = -0.1$ و $\beta_0 = 0.5, 1.8$ و مقادیر مختلف \bar{b} و n به ازای $\beta_1 = 1, 0.3$	۷۴
۵۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای a, b, β_1 و β_2 برای $a = -1, b = 0.1$ و $\beta_1 = 1, -1.5$ و $\beta_2 = 0.5, 1.5$ به ازای مقادیر مختلف γ و n	۷۶
۶۰۴	مقادیر برآورد $\Lambda_{10}(t_1), \Lambda_{20}(t_2 t_1)$ و $\bar{F}(t_1, t_2 z)$ در نقطه‌ی $(t_1, t_2) = (1, 1.5)$ برای $a = -1, b = 0.1, \beta_1 = 1, -1.5$ و $\beta_2 = 0.5, 1.5$ به ازای مقادیر مختلف γ و n	۷۷
۷۰۴	مقادیر برآورد $\Lambda_{10}(t_1), \Lambda_{20}(t_2 t_1)$ و $\bar{F}(t_1, t_2 z)$ در نقطه‌ی $(t_1, t_2) = (2, 1.1)$ برای $a = -1, b = 0.1, \beta_1 = 1, -1.5$ و $\beta_2 = 0.5, 1.5$ به ازای مقادیر مختلف γ و n	۷۷
۸۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای a, b, β_1 و β_2 برای $a = -1, b = 0.1$ و $\beta_1 = 1, -1.5$ و $\beta_2 = 0.5, 1.5$ به ازای مقادیر مختلف γ و n	۷۸
۹۰۴	مقادیر برآورد $\Lambda_{10}(t_1), \Lambda_{20}(t_2 t_1)$ و $\bar{F}(t_1, t_2 z)$ در نقطه‌ی $(t_1, t_2) = (1, 1.5)$ برای $a = -1, b = 0.1, \beta_1 = 1, -1.5$ و $\beta_2 = 0.5, 1.5$ به ازای مقادیر مختلف γ و n	۷۹

۱۰.۴ مقادیر برآورد $\Lambda_{1^0}(t_1)$ ، $\Lambda_{2^0}(t_2|t_1)$ و $\bar{F}(t_1, t_2|z)$ در نقطه‌ی $(t_1, t_2) = (2, 1/1)$ برای

۷۹ . . . n و γ مختلف $\beta_2 = 0/5, 1/5$ و $\beta_1 = 1, -1/5, b = 0/1, a = -1$

۸۱ برای داده‌های واقعی $\bar{F}(t_1, t_2|z)$ و $\Lambda_{2^0}(t_2|t_1, z)$ ، $\Lambda_{1^0}(t_1|z)$

نمادها

صفحه	توضیح	نماد
۶.....	تابع بقا	$\bar{F}(\cdot)$
۷.....	تابع نشانگر	$I(\cdot)$
۸.....	تابع زیربقا	$\bar{F}^*(\cdot)$
۹.....	تابع نرخ شکست	$\lambda(\cdot)$
۹.....	تابع نرخ شکست انباشته	$\Lambda(\cdot)$
۱۵.....	مجموعه‌ی ریسک در لحظه‌ی t	\mathcal{R}_t
۱۶.....	همگرایی تقریباً مطمئن	$\xrightarrow{a.s.}$
۱۶.....	همگرایی در احتمال	\xrightarrow{P}
۱۷.....	همگرایی در توزیع	\xrightarrow{d}
۱۷.....	دارای توزیع	\sim
۲۳.....	تابع درست‌نمایی نیم‌رخ	$L_p(\cdot)$
۲۴.....	نرم	$\ \cdot\ $
۲۸.....	پرش تابع در نقطه‌ی x	$F\{x\}$
۳۱.....	تابع لگ-درست‌نمایی نیم‌رخ	$l_p(\cdot)$
۵۸.....	امید ریاضی	$E[\cdot]$
۵۹.....	تابع تجربی	$\hat{F}(\cdot)$

پیش‌گفتار

در بیشتر پژوهش‌های مربوط به داده‌های طول عمر، عوامل بازدارنده‌ای هم‌چون زمان و هزینه باعث می‌شوند که آزمایش‌ها قبل از شکست همه‌ی واحدها، به پایان برسند؛ به داده‌های برآمده از این آزمایش‌ها، داده‌های سانسور شده گفته می‌شود.

در مطالعات بقا، بررسی داده‌های زمان شکست سانسور شده اهمیت بسزایی دارد. در تحلیل این نوع داده‌ها معمولاً برای اطمینان از تشخیص تابع بقا، فرض می‌شود که متغیرهای زمان شکست مستقل از متغیرهای سانسورکننده باشند؛ این فرض به عنوان سانسور ناآگاهی‌بخش در نظر گرفته می‌شود. از این سانسور در ساخت بیشتر برآوردگرهای تابع بقا مانند برآوردگر کاپلان و مایر^۱ [۲۰] استفاده شده است. هم‌چنین کمبل و فولدز^۲ [۱۱] در سال ۱۹۸۰، تسای و همکاران^۳ [۳۲] در سال ۱۹۸۶، دبروسکا^۴ [۱۴] در سال ۱۹۸۸، تسای و کرولی^۵ [۳۱] در سال ۱۹۸۸، پرنتایس و کای^۶ [۲۶] در سال ۱۹۹۲ و لین و یینگ^۷ [۲۳] در سال ۱۹۹۳ برآوردگرهای تابع بقای دو متغیره بر اساس این نوع سانسور ارائه نموده‌اند.

برای بهبود برآوردگرهای تابع بقا می‌توان از اطلاعات کمکی استفاده نمود؛ از این‌رو لین^۸ [۲۲] در سال ۱۹۹۴، کای و پرنتایس [۱۰] در سال ۱۹۹۵، اسپیکرمن و لین^۹ [۳۰] در سال ۱۹۹۸ و سنکاران و سریجا^{۱۰} [۲۸] در سال ۲۰۰۷، نتایج مربوط به برآورد بهبودیافته‌ی تابع بقا را با استفاده از اطلاعات کمکی بر پایه‌ی سانسور ناآگاهی‌بخش بررسی نموده‌اند.

^۱ Kaplan and Meier

^۲ Campbel and Földes

^۳ Tsai et al.

^۴ Dabrowska

^۵ Tsai and Crowley

^۶ Prentice and Cai

^۷ Lin and Ying

^۸ Lin

^۹ Spiekerman and Lin

^{۱۰} Sankaran and Sreeja

کلبفلیش و پرنطایس^{۱۱} [۱۹] در سال ۲۰۰۲ و لاولس^{۱۲} [۲۱] در سال ۲۰۰۳، مرور جامعی بر برآوردهای تابع بقا انجام داده‌اند.

در اکثر مسائل کاربردی تحلیل بقا، سانسور ناآگاهی بخش واقع‌بینانه نیست؛ بنابراین بررسی مسائلی که فرض استقلال متغیر سانسور، در آن ممکن نباشد، اهمیت ویژه‌ای می‌یابد. مدت زمان دو پیشامد متوالی را در نظر بگیرید. چنین نمونه‌هایی برای بحث در مورد پیشرفت بیماری‌های دوماه‌ای مفید است؛ مانند بیماری AIDS که از دوره‌ی نهفتگی تا دوره‌ی بالینی پیشرفت می‌کند. (فاصله‌ی بین انتقال ویروس HIV تا تشخیص AIDS، دوره‌ی نهفتگی نامیده می‌شود). در تحلیل زمان‌های دو پیشامد متوالی، طول اولین مدت زمان روی دومین مدت زمان تأثیر می‌گذارد. در این موارد به دلیل وابستگی این دو زمان، دومین مدت زمان به وسیله‌ی یک متغیر وابسته‌ی مرتبط با مدت زمان اول، سانسور می‌شود که بدان سانسور آگاهی‌بخش گفته می‌شود.

وانگ و ولز^{۱۳} [۳۵] در سال ۱۹۹۸، برآورد ناپارامتری زمان‌های متوالی بر اساس سانسور آگاهی‌بخش ارائه داده‌اند. براکرز و وراوربک^{۱۴} [۹] در سال ۲۰۰۵، مسائل رگرسیونی برای تحلیل داده‌های زمان شکست متوالی بر پایه‌ی سانسور آگاهی‌بخش جزئی در حالت یک متغیره را به کار برده‌اند.

استنباط پیرامون زمان‌های متوالی بر پایه‌ی سانسور آگاهی‌بخش در حضور متغیرهای کمکی نیز، درخور توجه است. بدین منظور، اخیراً، سنکاران و سریجا [۲۹] در سال ۲۰۱۲، مدل نرخ شکست متناسب را برای چنین داده‌هایی ارائه نموده‌اند.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول، مفاهیم و تعاریف اولیه‌ی مورد نیاز این پایان‌نامه بیان شده است. در فصل دوم، استنباط نیم‌پارامتری پیرامون مدل نرخ شکست متناسب برای داده‌های زمان شکست، در چهار حالت یک متغیره و دو متغیره، بدون در نظر گرفتن سانسور و با طرح سانسور انجام می‌شود. در فصل سوم، ویژگی برآوردها در حالت دو متغیره با طرح

^{۱۱}Kalbfleisch and Prentice

^{۱۲}Lawless

^{۱۳}Wang and Wells

^{۱۴}Braekers and Veraverbeke

سانسور آگاهی‌بخش بیان خواهد شد. در فصل چهارم، روش استنباطی معرفی شده برای داده‌های طول عمر دو متغیره با طرح سانسور آگاهی‌بخش، به کمک شبیه‌سازی و استفاده از داده‌های واقعی، ارزیابی شده است.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

مقدمه

در این فصل برخی از مفاهیمی که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، به‌طور خلاصه ارائه شده است. در نخستین بخش، تحلیل بقا و مفاهیم مرتبط با آن، بیان شده و سپس در بخش ۲.۱ برخی از طرح‌های سانسور معرفی گردیده است. مفاهیم احتمالی، استنباطی و آنالیزی مورد نیاز به‌ترتیب در بخش‌های ۴.۱، ۵.۱ و ۶.۱ ارائه گردیده‌اند.

۱.۱ تحلیل بقا

به‌طور کلی، تحلیل بقا، مجموعه‌ای از تکنیک‌های آماری متنوع، جهت تحلیل متغیرهای تصادفی است که دارای مقادیر نامنفی هستند. مقدار این متغیر تصادفی، زمان شکست یک مؤلفه‌ی فیزیکی و یا زمان مرگ یک واحد بیولوژیک است. در تحلیل بقا با داده‌های سانسور شده مواجه هستیم که در بخش ۲.۱ معرفی می‌گردند. تابع بقا و تابع نرخ شکست از مفاهیم پایه‌ای در مطالعات بقا هستند که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم. مفاهیم بیان شده در این بخش برگرفته از مراجع [۱۵] و [۲۱] است.

۱.۱.۱ تابع بقا

احتمال این که واحدی بیشتر از زمان مشخص t عمر کند با تابع بقا محاسبه می‌شود و آن را با $\bar{F}(t)$ نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر،

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

زمانی که $f(\cdot)$ ، تابع چگالی T ، وجود داشته باشد، $\bar{F}(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\bar{F}(t) = \int_t^{\infty} f(u) du,$$

و تابع چگالی T از روی تابع بقا به‌صورت

$$f(t) = -\frac{d\bar{F}(t)}{dt},$$

است. تابع بقا، تابعی غیرنزولی و از چپ پیوسته است که

$$\bar{F}(0) = 1, \quad \bar{F}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}(t) = 0.$$

همان‌طور که گفته شد تابع بقا نقش اساسی در مطالعات بقا ایفا می‌کند؛ زیرا به دست آوردن احتمالات بقا برای مقادیر مختلف t ، اطلاعات مختصر و مفیدی از داده‌های بقا را فراهم می‌کند. تابع بقا، در مطالعات مربوط به طول عمر واحدهای صنعتی، قابلیت اعتماد نامیده می‌شود.

۲.۱.۱ تابع بقای دو متغیره

هرگاه واحدها شامل دو پیشامد باشند، تابع بقای توأم دو متغیر T_1 و T_2 ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{F}(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = 1 - F(t_1) - F(t_2) + F(t_1, t_2).$$

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید (T_1, T_2) داده‌های دو متغیره با تابع بقای $\bar{F}_1(\cdot)$ برای T_1 و $\bar{F}_2(\cdot)$ برای T_2 باشند؛ در این صورت تابع بقای توأم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F}(t_1, t_2) = - \int_{u > t_1} \bar{F}_2(t_2 | u) d\bar{F}_1(u),$$

که در آن $\bar{F}_2(t_2 | u)$ تابع بقای شرطی T_2 به شرط T_1 است.

۳.۱.۱ تابع زیربقا

فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n طول عمر n واحد تحت آزمایش در یک آزمون طول عمر باشند که هر واحد i با C_i از راست سانسور می‌شود و فرض کنید X_i و C_i از یکدیگر مستقل باشند. (T_i, δ_i) را بردار تصادفی از مشاهدات در نظر می‌گیریم که در آن $\delta_i = I(X_i < C_i)$ و $T_i = \min(X_i, C_i)$ ، زمان پایان آزمایش هر کدام از واحدها است. فرض کنید F_i تابع توزیع T_i باشد؛ در این صورت توابع زیرتوزیع F_i به صورت

$$F_{1i}^*(t) = P(T_i < t, \delta_i = 1),$$

$$F_{\Psi_i}^*(t) = P(T_i < t, \delta_i = \circ),$$

به دست می آید.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید δ یک متغیر تصادفی دلخواه باشد که مقادیر \circ و ۱ را اختیار می کند؛ در این صورت توابع زیربقا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{F}_1^*(t) = P(T > t, \delta = ۱),$$

$$\bar{F}_\circ^*(t) = P(T > t, \delta = \circ).$$

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید توابع حقیقی $\bar{F}_1^*(\cdot)$ و $\bar{F}_\circ^*(\cdot)$ روی $[0, \infty)$ ، دو تابع زیربقا باشند؛ در این صورت

الف) $\bar{F}_1^*(\cdot)$ و $\bar{F}_\circ^*(\cdot)$ نامنفی و غیرصعودی هستند.

ب) $\bar{F}_1^*(\cdot)$ و $\bar{F}_\circ^*(\cdot)$ در نقطه‌ی صفر از راست پیوسته هستند و همچنین $\bar{F}_1^*(0) < ۱$ و $\bar{F}_\circ^*(0) < ۱$.

ج) $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}_1^*(t) = 0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}_\circ^*(t) = 0$.

د) $\bar{F}_1^*(0) = ۱ - \bar{F}_\circ^*(0)$.

۴.۱.۱ تابع نرخ شکست

یکی دیگر از مفاهیم اساسی در تحلیل بقا، تابع نرخ شکست است که نرخ لحظه‌ای مرگ یا شکست واحدی را در زمان t محاسبه می کند به شرط این که واحد مورد آزمایش بیشتر از زمان t عمر کند. تابع نرخ شکست به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}. \quad (۱.۱)$$

زمانی که $f(\cdot)$ ، تابع چگالی T ، موجود باشد، تابع نرخ شکست را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -\frac{d \ln \bar{F}(t)}{dt}. \quad (2.1)$$

لازم به یادآوری است که $\lambda(t)$ نامنفی است و $\int_0^{\infty} \lambda(u) du = \infty$ در ضمن تابع نرخ شکست انباشته در زمان t به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

روشن است که

$$\bar{F}(t) = \exp(-\Lambda(t)), \quad (3.1)$$

و

$$f(t) = \lambda(t) \exp(-\Lambda(t)). \quad (4.1)$$

۵.۱.۱ تابع نرخ شکست تکه‌ای-ثابت

در این زیربخش، تابع نرخ شکست تکه‌ای-ثابت تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = \infty$ مقادیر مشخص و متمایز باشند.

اگر تابع نرخ شکست متغیر T به صورت زیر باشد:

$$\lambda(t) = \lambda_j, \quad a_{j-1} \leq t < a_j,$$

که λ_j ها مقادیر مثبت برای $j = 1, \dots, m$ هستند، آنگاه T دارای تابع نرخ شکست تکه‌ای-ثابت است.

۶.۱.۱ مدل نرخ شکست متناسب

در بسیاری از شرایط کاربردی تحلیل بقا، طول عمر واحدها تحت تأثیر متغیرهای کمکی مانند سطح کلسترول یا فشار خون هستند و بررسی متغیر طول عمر واحدها بدون در نظر گرفتن متغیرهای کمکی و یافتن تابع نرخ شکست و تابع بقای آن کاری گمراه کننده است. در نتیجه به جای بررسی داده‌های طول عمر به یافتن عوامل مؤثر بر طول عمر می‌پردازیم. یکی از روش‌های بررسی رابطه‌ی